

Resonancia Dipolar Gigante y Gas de Fermi en el  
Decaimiento del Continuo Nuclear Según la  
Estadística de Orden.

Trabajo de Tesis presentado para optar al título de  
Magister en Física

John Jairo Sandoval Llanos

Director  
Dr. Fernando Crisancho Mejía

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física  
Bogotá D.C.  
Mayo de 2008

# Agradecimientos

A Joel Leandro por iluminar mi camino con su sonrisa.

A Alexandra por su infinito amor.

Al profesor Fernando Cristancho por guiarme en esta aventura y soportar mis ausencias e inconsistencias.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estados de Alto Espín</b>	<b>3</b>
2.1. Emisión de Radiación Gamma . . . . .	5
2.2. Transiciones Estadísticas . . . . .	6
2.2.1. Densidad de Niveles . . . . .	7
2.2.2. Fortalezas de Emisión . . . . .	8
2.3. Intensidad de la Radiación Emitida . . . . .	11
<b>3. Histogramas Temporal y Energéticamente Ordenados</b>	<b>13</b>
3.1. Estadísticos de Orden y el Continuo Nuclear . . . . .	15
<b>4. Consideraciones Iniciales</b>	<b>17</b>
4.1. Significado del Mayor Estadístico Para $n$ Dado . . . . .	17
4.2. Primera Aproximación Para el Cálculo de los Coeficientes $b_n$ . . . . .	19
4.2.1. Temperatura Constante y Partícula Aislada . . . . .	19
<b>5. Gas de Fermi y GDR</b>	<b>25</b>
5.1. Primera Aproximación del Cálculo de los Coeficientes $b_n$ . . . . .	26
5.2. Evaluación Numérica de los Coeficientes $b_n$ . . . . .	28
5.3. Coeficientes $b_n$ en Función de la Energía . . . . .	29
5.4. Los programas Gamble y Gamana . . . . .	32
5.4.1. Resultados . . . . .	40
<b>6. Conclusiones</b>	<b>42</b>



# Capítulo 1

## Introducción

El continuo nuclear es un tema de interés fundamental dentro de la física nuclear debido a la gran variedad de fenómenos que se presentan en él, por ésta razón presenta un constante desarrollo tanto teórico como experimental. [1].

La riqueza de fenómenos involucrada en el continuo nuclear dificulta su estudio y comprensión, por ésta razón los investigadores han formulado diversos modelos para describir el comportamiento del núcleo en esta región. Cada uno de los modelos propuestos reúne una serie de consideraciones teóricas y de parámetros que son ajustados o propuestos por resultados experimentales, encontrándose así, que no hay un modelo puramente teórico que de forma consistente pueda describir y predecir todos los resultados obtenidos por el experimento. Igualmente las técnicas experimentales aplicables en la actualidad presentan falencias en la recolección de datos debido las limitaciones impuestas por la electrónica. Estas carencias limitan las posibilidades en la toma, clasificación y posterior análisis de los datos e impiden discriminar efectivamente las variables que intervienen en el estudio del continuo nuclear.

Experimentalmente el continuo nuclear puede ser estudiado produciendo una reacción de fusión-evaporación con núcleos pesados obteniendo como producto final, luego de un proceso de emisión de partículas, un núcleo que decae emitiendo rayos gamma. En el capítulo 1 hacemos una recopilación de este proceso e incluimos además otras consideraciones teóricas relacionados con los estados nucleares de alto espín. En el estudio del continuo nuclear necesitamos conocer el espectro de los primeros rayos gamma en ser emitidos, conocidos como *radiación primaria*. Tal necesidad radica en que ésta radiación es la que tiene la información del estado que deseamos estudiar.

Una cascada es un conjunto de rayos gamma que son emitidos en secuencia temporal y que permiten que el núcleo se desexcite pasando de un estado con cierto valor de energía al estado base.

Infortunadamente, no es posible diferenciar experimentalmente, en una cascada, el primer rayo gamma en ser emitido. Esto sucede porque los tiempos de resolución de la electrónica usada en el experimento son superiores a los tiempos que le toman al núcleo

pasar de un estado nuclear a otro. Una alternativa para enfrentar el problema de no poder diferenciar la radiación primaria es explorada en el capítulo 2 con ayuda de la teoría matemática de la Estadística de Orden [2].

Matemáticamente el decaimiento gamma del núcleo es descrito, a grandes rasgos, como un producto de dos funciones que son: la densidad de niveles y las fortalezas de emisión (gamma strength). Para cada una de estas funciones existen varias formulaciones que varían en grado de complejidad, además podemos combinar cada una de las formulaciones para la densidad de niveles con cada uno de los modelos para las fortalezas de emisión, obteniendo una interesante variedad de posibilidades para describir el núcleo.

En trabajos previos la utilidad potencial de la Estadística de Orden en el análisis del decaimiento del continuo ha sido ya mostrada [3, 4, 5]. Sin embargo tales análisis sólo han usado las descripciones matemáticas del núcleo más sencillas, por lo tanto, posiblemente las menos realistas.

El formalismo matemático utilizado, es decir, la estadística de orden, requiere de ciertas restricciones que el decaimiento gamma no satisface, sin embargo los resultados obtenidos por las investigaciones previas han sido exitosas, por lo tanto es necesario entender por qué ésta técnica matemática es aplicable en una situación que se escapa de sus requerimientos. En el capítulo 3 estudiamos las limitaciones y consideraciones que deben ser tomadas en cuenta y recopilamos los resultados obtenidos en este campo.

Es necesario aplicar la Estadística de Orden a descripciones más completas del núcleo y por lo tanto más complejas desde el punto de vista matemático: fortalezas de emisión gamma según la *Resonancia Dipolar Gigante* (GDR en la literatura) y densidad de niveles según el *Gas de Fermi*. Esto es explorado en el capítulo 4.

En otro aspecto podemos decir que aún falta dar una interpretación física de los diferentes parámetros que describen los espectros obtenibles experimentalmente, por ejemplo la relación de las pendientes a altas energías con la temperatura nuclear, y la de los puntos de corte a bajas y altas energías con la parametrización de las fortalezas gamma.

# Capítulo 2

## Estados de Alto Espín

Existen diferentes métodos para producir estados nucleares de alto espín, por ejemplo el roce suave, las reacciones de fusión- evaporación, el roce fuerte y las llamadas colisiones distantes como la dispersión de Rutherford o la excitación de Coulomb, éstas están esquemáticamente mostradas en en la figura 2.1. El parámetro de impacto  $b$ , es el que determina qué proceso ocurre. Sin embargo, estamos interesados en reacciones que transfieran el mayor momento angular posible, esto es logrado por las reacciones de fusión- evaporación [6]. En este caso se produce un núcleo compuesto que decae siguiendo diferentes canales. En algunos casos el decaimiento es independiente del proceso de formación. La independencia quiere decir que el modo de desintegración del núcleo compuesto ocurre sin importar el mecanismo de formación del sistema. Este proceso depende de la energía, momento angular y paridad, además de los principios de conservación asociados a estas magnitudes. Este planteamiento es conocido como la suposición de Bohr [7].

En las reacciones de fusión- evaporación el proyectil sufre una colisión con el blanco formando un núcleo compuesto; este sistema puede fusionarse completamente o desintegrarse mediante una fisión. En el primer caso el núcleo compuesto emite partículas tales como neutrones, protones y partículas alfa. La emisión de partículas es muy efectiva disminuyendo la energía del sistema pero no lo es tanto reduciendo el momento angular. Después de este proceso el núcleo tiene una energía de excitación inferior a la necesaria para que un nucleón sea emitido. En este caso el núcleo solamente puede decaer emitiendo rayos gamma. Aquellos estados de energía y momento angular que satisfacen esta condición son conocidos como estados de entrada en el decaimiento gamma.

Para estudiar el decaimiento del núcleo en cuestión es útil construir un espacio de fase conformado por la energía de excitación del núcleo,  $E$ , y el espín  $I$ . En la figura 2.2 podemos ver este espacio. Allí encontramos la línea yrast que corresponde a los estados que tienen el máximo momento angular para una energía de excitación dada o equivalentemente la menor energía para un momento angular dado. De esto se infiere que por debajo de esta línea no hay estados accesibles al sistema. La energía de excitación intrínseca  $U$  del núcleo es medida a partir de la línea yrast. Para valores de energía de excitación

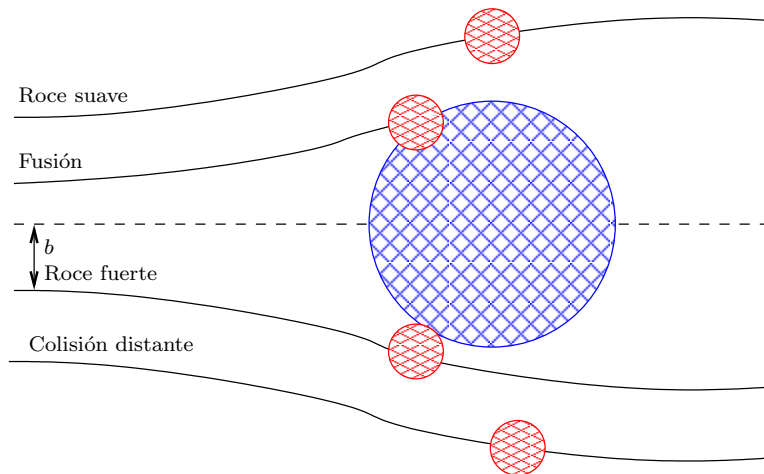


Figura 2.1: Reacciones para producir estados de alto espín [6].

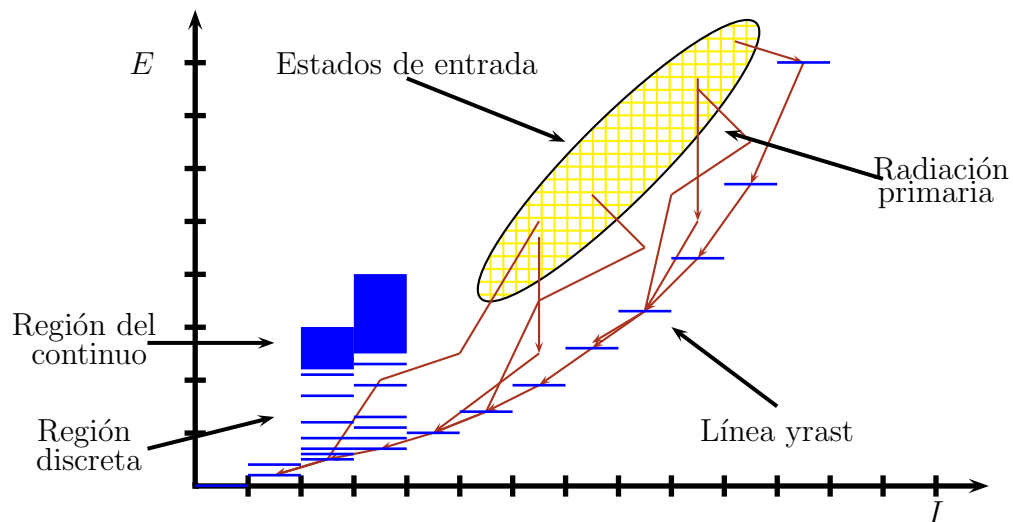


Figura 2.2: Espacio de fase energía de excitación,  $E$ , versus momento angular,  $I$ .



entre 0 y 2 MeV la densidad de niveles es baja y hablamos de estados discretos. Cuando tenemos valores superiores a estos y menores a 5 o 6 MeV hablamos del cuasi-continuo. Finalmente para valores de energía superiores a los ya comentados, la densidad de niveles es tan grande que los niveles se solapan y no es posible distinguirlos, ellos forman el llamado continuo nuclear. En la misma figura representamos los estados de entrada y la respectiva radiación primaria proveniente de ellos.

## 2.1. Emisión de Radiación Gamma

Cada uno de los núcleos que se encuentra en los estados de entrada realiza una serie de transiciones energéticas a través de rayos gamma hasta alcanzar el estado base. La sucesión de rayos gamma desde un punto en los estados de entrada hasta el estado base recibe el nombre de cascada. Cuando en una reacción se registran la totalidad de las cascadas obtenemos el espectro de radiación gamma. Las transiciones que puede realizar un núcleo están sujetas a las reglas de selección para el momento angular, espín y paridad. Estas reglas son consecuencia de los principios de conservación.

Una descripción completa de la emisión y absorción de radiación gamma por parte del núcleo requiere de la aplicación de la teoría cuántica de la radiación, sin embargo, información valiosa puede ser obtenida a partir del estudio del campo clásico de radiación emitida por una distribución de cargas y corrientes que varía en el tiempo [8]. Para realizar tal trabajo aplicamos la aproximación de onda larga, en donde la longitud de onda de la radiación emitida es mucho mayor que las dimensiones del núcleo. Esto es cierto para un sistema como el de nuestro interés que puede ser un núcleo de  $^{110}\text{Hf}$  cuyo tamaño es del orden de  $1,2 \times 10^{-14} A^{1/3} \text{ m} = 5,75 \times 10^{-14} = 5,75 \text{ fm}$  y la energías emitidas están comprendidas entre 1 y 11 MeV, correspondiendo a longitudes de onda entre  $1,24 \times 10^{-12} \text{ m} = 124 \text{ fm}$  y  $1,13 \times 10^{-13} \text{ m} = 11,3 \text{ fm}$  aproximadamente.

La radiación emitida es clasificada de acuerdo su número cuántico de momento angular  $\vec{l}$  y componente  $m$  en dirección  $z$ , además de considerar sus propiedades bajo la reflexión de sus coordenadas, es decir su paridad  $\Pi$ . Para cada valor de momento angular  $l$  se tienen dos posibles valores de paridad que son asociados a radiación eléctrica y magnética. El nombre eléctrico o magnético es dado porque los multipolos eléctricos son asociados a variaciones en la distribución de carga y los magnéticos a variaciones temporales en la distribución de la densidad de magnetización. De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell la paridad de un multipolo eléctrico  $l, m$  es dada por  $(-1)^l$  y la de uno magnético por  $-(-1)^l$  [8].

Cuando el núcleo pasa de un estado inicial caracterizado por los números cuánticos de momento angular, proyección de éste sobre el eje  $z$  y paridad  $(I_i, M_i, \Pi_i)$  a uno con números cuánticos  $(I_f, M_f, \Pi_f)$  se debe tomar en cuenta que las interacciones electromagnética y

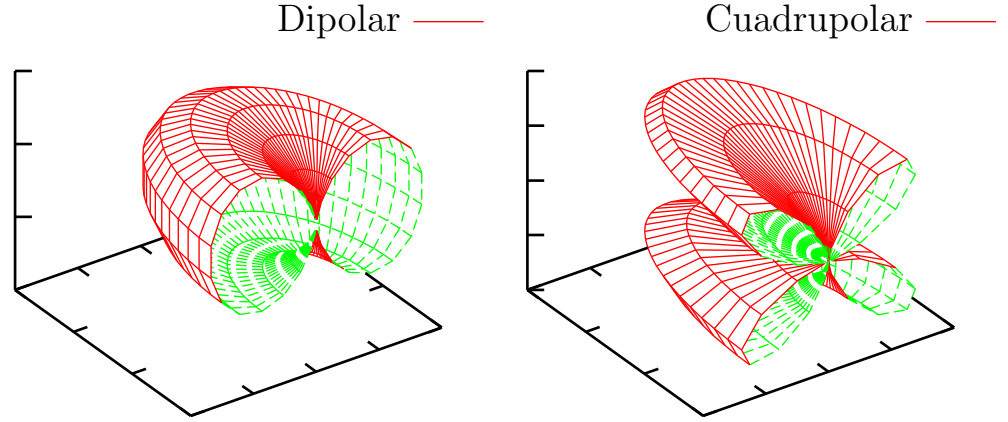


Figura 2.3: Distribución angular de la radiación dipolar y cuadrupolar con  $m = 0$ .

fuerte respetan la paridad. Por esta razón se tiene que

$$\Pi_f = \begin{cases} (-1)^l \Pi_i & \text{Multipolo eléctrico} \\ -(-1)^l \Pi_i & \text{Multipolo magnético.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Además consideramos las reglas de suma para el momento angular

$$|I_i - I_f| \leq l \leq I_i + I_f \quad (2.2)$$

$$M_f - M_i = m. \quad (2.3)$$

Aplicando las ecuaciones (2.1) y (2.3) que son la reglas de selección, obtenemos los estados a los que puede decaer el núcleo.

La emisión de radiación gamma es dominada por las menores multipolaridades porque la probabilidad de emisión disminuye rápidamente cuando aumenta el orden multipolar [9]. Por esta razón prácticamente sólo los dos menores valores de  $l$  consistentes con la conservación del momento angular necesitan ser considerados. Las radiaciones de ordenes multipolares superiores son menos frecuentes. Como un ejemplo, vemos en la figura 2.3 la distribución angular para radiación dipolar y cuadrupolar con  $m = 0$ .

## 2.2. Transiciones Estadísticas

La estructura nuclear ha sido poco explorada a altos valores de energía y espín. Diversas teorías se han propuesto para dar una explicación a los fenómenos allí encontrados,

estas teorías involucran a su vez diferentes formulaciones para la densidad de niveles y las fortalezas de emisión. A continuación daremos un breve recuento de las más usadas.

### 2.2.1. Densidad de Niveles

La densidad de niveles de un núcleo con  $A$  nucleones y energía  $E$  es definida como el número de estados nucleares en el rango  $(E, E + \Delta E)$  dividido por el intervalo de energía  $\Delta E$ . Tenemos tres modelos que varían en complejidad y que dan cuenta de esta magnitud, ellos son el modelo de niveles equidistantes, el gas de Fermi a temperatura constante y el modelo más general que es el gas de Fermi.

**Modelo de Niveles Equidistantes** Este es el modelo más sencillo y permite hacernos una idea clara del significado del parámetro de densidad de niveles que denotaremos como  $a$ . Éste proporciona información sobre la estructura ya que es característico de cada núcleo. Contamos los estados y decimos que la distancia entre ellos es  $D$ , este valor depende del número de nucleones  $A$ . La densidad de niveles es el inverso de este número, es decir,  $1/D$ . Para cierta energía de excitación  $E$  la distribución de estados es [9]

$$\rho(A, U) = \frac{\exp(2\sqrt{aU})}{U\sqrt{48}} \quad (2.4)$$

donde el parámetro de densidad de niveles es

$$a = \frac{\pi^2}{6D}. \quad (2.5)$$

**Gas de Fermi a Temperatura Constante** Una de las más sencillas formulaciones posibles corresponde al modelo de gas de Fermi con temperatura constante. Asociamos la densidad de estados  $\rho(A, U)$ , que es una función del número de nucleones  $A$  y de la energía de excitación  $U$ , con  $\Omega$  que es el número de estados accesibles a un sistema. Por lo tanto la entropía del sistema puede ser calculada como

$$S(A, U) = k_B \ln \Omega = k_B \ln \rho(A, U)$$

donde  $k_B$  es constante de Boltzman. Además sabemos que si toda la energía del núcleo se convierte en energía de excitación, sin variación del volumen tenemos

$$dS = \frac{dE}{T}$$

donde  $T$  es la temperatura y se toma como constante. Con estas consideraciones se tiene que la densidad de niveles es

$$\rho(A, U) = \rho_\gamma(A, U_i) \exp\left(\frac{U_f - U_i}{k_B T}\right) \quad (2.6)$$

ya que la energía de un rayo gamma es  $E_\gamma = U_i - U_f$  tenemos que

$$\rho(E_\gamma) = C_2 \exp\left(\frac{-E_\gamma}{k_B T}\right) \quad (2.7)$$

donde  $k_B T \approx 640,740$  keV para los casos que nos interesan.

**Gas de Fermi** En el modelo de gas de Fermi el núcleo es considerado como un gas ideal de  $A$  fermiones encerrados en un volumen fijo

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \text{con} \quad R = r_0 A^{1/3} \quad (2.8)$$

esto corresponde a un sistema de  $A$  nucleones independientes moviéndose en un pozo de potencial esférico infinito. Asumimos que el potencial es generado por el campo promedio de los nucleones y son una idealización del potencial más real de partícula aislada más interacción de Coulomb más potencial nuclear del modelo de capas [10]. La forma más conveniente de describir la termodinámica del gas ideal de Fermi es aplicar el ensamble gran canónico donde el sistema tiene temperatura  $T$  fija. Con estas consideraciones es posible encontrar que la densidad de niveles se puede expresar como

$$\rho(U, I) = \sqrt{a} \left(\frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}\right)^{3/2} (2I + 1) \frac{e^{2\sqrt{a}U}}{\left(U + \frac{3}{2}T\right)^2} \quad (2.9)$$

donde  $U$  es la energía de excitación,  $\mathcal{J}$  es el momento de inercia y  $T$  es la temperatura dada por

$$T = \sqrt{\frac{a}{U} + \left(\frac{3}{4a}\right)^2} + \frac{3}{4a}. \quad (2.10)$$

### 2.2.2. Fortalezas de Emisión

Podemos maximizar la utilidad de un espacio de fase si la probabilidad de ir de un lugar a otro en él puede ser dada en términos generales y relativamente simples. Tales probabilidades globales son conocidas como fortalezas de emisión [11]. En esta sección mostramos algunas formulaciones para las fortalezas de emisión. Ellas pueden ser expresadas en términos del número de masa  $A$ , las energías de los estados inicial y final de la transición y la deformación nuclear.

**Modelo de Partícula Aislada** El modelo más sencillo fue desarrollado por V. Weisskopf y en algunas ocasiones es referenciado con este nombre. En él se considera que la transición gamma es el resultado de la actividad de un sólo nucleón, de esta manera se obtiene la siguiente expresión para la radiación de carácter eléctrico

$$\Gamma = C_1 E_\gamma^m \quad m = 3, 5, 7 \quad (2.11)$$

donde  $m = 3$  corresponde al dipolo,  $m = 5$  es el cuadrupolo etc..

En trabajos anteriores [12, 13] esta formulación fué aplicada en el análisis del continuo nuclear.

**Resonancias Gigantes** El modelo más apropiado para la descripción de las fortalezas de emisión de la radiación dipolar eléctrica es la resonancia dipolar gigante (GDR). Por ser éste el modelo aplicado en el presente trabajo presentamos una breve descripción de las resonancias gigantes en general.

Las resonancias gigantes son excitaciones altamente colectivas, principalmente en el continuo nuclear, en ellas un gran número de protones y neutrones se mueven juntos, algunas veces en fase, otras en desfase [14]. Experimentalmente las resonancias gigantes fueron observadas por Baldwin y Klaiber en 1974 [15, 16] en reacciones fotonucleares. Aunque cada núcleo o grupo de núcleos en cierta región de la tabla nuclear tiene un comportamiento más o menos propio, su comportamiento en una absorción de fotones tiene muchas características comunes, por ejemplo el valor medio de la energía de la sección eficaz de absorción varía suavemente con  $A$ . El ancho en el que está centrado el valor de la energía cambia localmente un poco pero no mucho [17].

Podemos imaginar que el núcleo es un sistema compuesto de dos fluidos, uno de protones(p) y otro de neutrones(n) que pueden tener espín up( $\uparrow$ ) o down( $\downarrow$ ). Cuando el movimiento es en fase recibe el nombre de resonancia isoescalar y usamos el número cuántico  $\Delta\tau = 0$  para denotarlo, para un movimiento en desfase usamos  $\Delta\tau = 1$  y la llamamos isovectorial, así mismo si el cambio en el espín es nulo  $\Delta S = 0$  decimos que es una resonancia eléctrica mientras que es  $\Delta S = 1$  indica una resonancia magnética. Estas oscilaciones son mostradas en la figura 2.4

De esta forma tenemos por ejemplo que en el modo magnético isoescalar ( $\Delta S = 1, \Delta T = 0$ ), los protones y neutrones con espín up se mueven contra los protones y neutrones con espín down. En el caso de un modo magnético isovectorial ( $\Delta S = 1, \Delta T = 1$ ) los protones con espín up y neutrones con espín down se mueven contra los neutrones con espín up y protones con espín down.

El modo de oscilación determina la multipolaridad  $\lambda$ . En el modo monopolar ( $\lambda = 0$ ), el núcleo se comprime y descomprime sin cambiar su forma. La resonancia monopolar isoescalar ( $\Delta T = 0$ ) es una medida de la incompresibilidad nuclear. En el modo dipolar ( $\lambda = 1$ ), oscilan los centros de masa de los protones contra el de los neutrones sin cambiar la forma de cada uno de los “fluidos” nucleares, el movimiento es axialmente simétrico. Para el caso dipolar y un movimiento en fase de neutrones contra protones,  $\Delta T = 0$ , tenemos que el centro de masa se mueve como un todo, es decir, no existe una resonancia como tal, porque no hay movimiento relativo de protones y neutrones. El caso  $\lambda = 1, \Delta T = 1$  es la llamada resonancia dipolar gigante, que es nuestro interés en este trabajo, esta resonancia

	Eléctrico ( $\Delta S = 0$ )	Magnético ( $\Delta S = 1$ )	Eléctrico ( $\Delta S = 0$ )	Magnético ( $\Delta S = 1$ )
	Monopolo ( $\lambda = 0$ )		Dipolo ( $\lambda = 1$ )	
Isoescalar ( $\Delta\tau = 0$ )				
Isovectorial ( $\Delta\tau = 1$ )				
	Cuadrupolo ( $\lambda = 2$ )		Octupolo ( $\lambda = 3$ )	
Isoescalar ( $\Delta\tau = 0$ )				
Isovectorial ( $\Delta\tau = 0$ )				

Figura 2.4: Relación entre los modos de oscilación [14].

fué la primera en ser descubierta. La resonancia dipolar elèctrica tiene energías de entre 8 y 20 MeV. De igual forma se tienen resonancias de carácter cuadrupolar y octupolar.

La primera explicación para las oscilaciones dipolares fué dada por M. Goldhaber y E. Teller en 1948 [18], en términos de fluidos de neutrones y protones. Dos años después H. Steinwedel [19], realizó, un nuevo trabajo sobre este tema.

La sistemática muestra que la energía de resonancia disminuye gradualmente cuando se incrementa el número de masa  $A$ , esta dependencia se expresa como una combinación lineal de  $A^{-1/3}$  y  $A^{-1/6}$ . El ancho de la resonancia es tambien influenciado por la estructura de capas del núcleo. Ésta varía entre 4 y 5 MeV para núcleos de capas cerradas y alrededor de 8 meV para los intermedios [20].

Matemáticamente GDR puede ser formulada como lorenzianas dadas por [11]

$$\Gamma_{\text{GDR}} = \frac{\sigma}{3(\pi\hbar c)^2} E_\gamma^4 \sum_{k=1}^{k_{def}} \frac{\omega_k \Gamma_{Gk}}{(E_\gamma^2 - E_{Gk}^2 + \Gamma_{Gk} E_\gamma)^2} \quad (2.12)$$

donde  $\sigma$  es la sección eficaz para GDR,  $E_{Gk}$  es la llamada energía de resonancia,  $\Gamma_k$  es el ancho de  $E_{Gk}$ ,  $\omega_k$  es el peso de cada una de estas energías y  $k$  etiqueta los ejes de deformación que corresponden a oscilaciones a lo largo y perpendiculares al eje de simetría. Para bajas energías  $\Gamma_{\text{GDR}} \approx E_\gamma^4$ . Estos valores pueden ser calculados en términos del parámetro de deformación cuadrupolar  $\beta$  según las expresiones

$$\begin{aligned} w_{1,2} &= \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ \Gamma_{G1,2} &= 4 \left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \right]^2 \text{ MeV} \\ E_{1,2} &= 78A^{-1/3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \right] \text{ MeV} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para bajas energías  $\Gamma_{\text{GDR}} \approx E_\gamma^4$ .

## 2.3. Intensidad de la Radiación Emitida

La intensidad de la radiación gamma proveniente de una región del continuo nuclear es expresada como [3]

$$I_\gamma(E_\gamma) = \sum_{I_f} \sum_{I_i=I_f-1}^{I_i+1} \int_{U_i=U_l}^{U_h} \Gamma(E1, E_\gamma) \frac{\rho(U_f, I_f, \pi_f)}{\rho(U_i, I_i, \pi_i)} dU_i \quad (2.14)$$

donde  $\Gamma(E1, E_\gamma)$  es la fortaleza de emisión y  $\rho$  la densidad de niveles. La energía inicial de una transición,  $U_i$ , se encuentra en la región comprendida entre  $U_l$  y  $U_h$ , siendo  $E_\gamma =$

$U_i - U_f$  la energía del rayo gamma que va de un estado de energía  $U_i$  a uno de energía  $U_f$ . Además  $I_f, I_i$  corresponden al espín final e inicial respectivamente, así como la paridad final  $\pi_f$  e inicial  $\pi_i$ .

La integral debe ser calculada para todos los posibles valores finales de espín  $I_f$  corriendo entre  $I_i - 1$  e  $I_i + 1$ . El espín inicial debe incluir todos los valores definidos por los estados de entrada.

La integral de la ecuación (2.14) no puede ser solucionada analíticamente, por ello es necesario realizar ciertas consideraciones adicionales, tales como suponer que la región de energías determinada por  $U_h - U_l$  es lo suficientemente pequeña como para que la densidad de estados iniciales sea constante. Adicionalmente observamos que la dependencia en el espín es dada por  $(2I_f + 1)/(2I_i + 1)$  correspondiente a la razón entre la densidad de niveles final e inicial para el gas de Fermi de la ecuación (2.9). Debido a el espín final e inicial son mucho mayores que la unidad y que su diferencia nunca es mayor que uno, este factor puede aproximarse a 1, eliminando así las sumatorias. De esta forma obtenemos que la intensidad se puede expresar como

$$I_\gamma(E_\gamma) = C\Gamma(E1, E_\gamma)\rho(U_f, I_f, \pi_f) \quad (2.15)$$

donde  $C$  es una constante.



## Capítulo 3

# Histogramas Temporal y Energéticamente Ordenados

Estamos concentrados en estudiar núcleos que se encuentran con energías de excitación comprendidas en el rango  $(U_h, U_l)$  y para ello analizaremos su decaimiento gamma. Sin embargo, en una cascada únicamente el primer rayo gamma en ser emitido contiene información sobre la zona que nos interesa.

Cuando se tiene una cascada, teóricamente se pueden organizar los rayos gamma en relación al orden temporal en que fueron emitidos, es decir, podemos “etiquetar” los rayos gamma diciendo cual fué el primero en ser emitido, cual fué el siguiente y así sucesivamente hasta el  $n$ -ésimo rayo, siendo  $n$  la multiplicidad de la cascada. Este proceso de “etiquetar” los rayos gamma es realizado asociando un ordinal a cada rayo de acuerdo a la secuencia temporal en que fueron emitidos.

$$\begin{aligned} E_\gamma(t_1), E_\gamma(t_2), \dots, E_\gamma(t_n) \\ t_1 < t_2 < \dots < t_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Podemos hacer una gráfica la frecuencia de ocurrencia de estos rayos como función de la energía de cada uno y obtener lo que llamamos histogramas temporalmente ordenados. Igualmente podríamos hacer con cualquier otro orden como los segundos o terceros rayos gamma en ser emitidos, así que para diferenciar estos espectros usaremos las etiquetas  $N = 1, N = 2$  o  $N = 3$  según sea necesario. El espectro para  $N = 1$  debería ajustarse al dado por la expresión (2.15).

Infortunadamente, no es posible diferenciar experimentalmente, en una cascada, el primer rayo gamma en ser emitido. Esto sucede porque los tiempos de resolución de la electrónica usada en el experimento son superiores a los tiempos que le toman al núcleo pasar de un estado nuclear a otro. Esta limitación se traduce en la imposibilidad de ordenar temporalmente los rayos de una cascada como se había planteado. Debido a que los sistemas físicos tienden a deshacerse de su exceso de energía en el menor tiempo posible podemos reorientar el problema y aplicar este principio en el hecho de que las transiciones

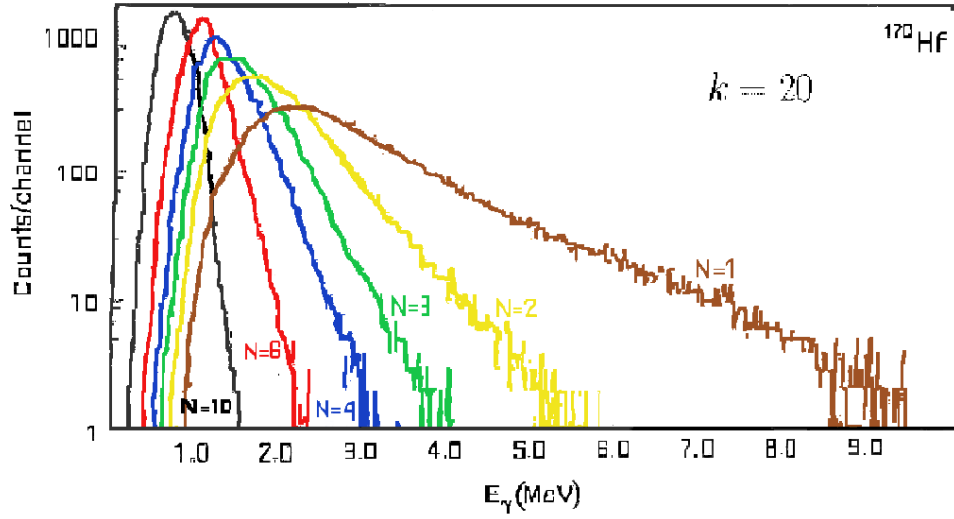


Figura 3.1: Histogramas experimentales energéticamente ordenados para  $N=1,2,3,4,6$ , y  $10$  en una reacción de  $^{130}\text{Te}(^{44}\text{Ca},4n)^{170}\text{Hf}$ . [21]. Los colores han sido modificados para facilitar la lectura.

más energéticas son las más probables en suceder primero y construir espectros energéticamente ordenados [21], con los rayos gamma más energéticos supliendo la información de los primarios.

El proceso de construir histogramas energéticamente ordenados es análogo al de los temporalmente ordenados. Ahora podemos “etiquetar” los rayos gamma diciendo cuál es el que tiene la mayor energía, cual es el que tiene la siguiente energía y así sucesivamente hasta el último rayo que será el que tiene la energía más pequeña de todas.

$$E_{\gamma N=1} \geq E_{\gamma N=2} \geq \dots \geq E_{\gamma N=n} \quad (3.2)$$

La relación entre los histogramas temporalmente ordenados y los energéticamente ordenados ya ha sido estudiada [3] y sabemos que a pesar de que existen diferencias en ellos, los segundos son una posibilidad real y práctica para estudiar características de la estructura nuclear tal como fué realizado por [21]. En la figura 3.1 vemos los espectros experimentales para  $N=1,2,3,4,6$ , y  $10$  en una reacción de  $^{130}\text{Te}(^{44}\text{Ca},4n)^{170}\text{Hf}$ . Infortunadamente no contamos con tales resultados y por ello simulamos el proceso de decaimiento y tomamos estos resultados como equivalentes a los experimentales.

### 3.1. Estadísticos de Orden y el Continuo Nuclear

Hasta el momento si deseamos trabajar con los histogramas energéticamente ordenados debemos realizar un experimento o una simulación, ya que no existe una expresión analítica que los describa. Una expresión de este tipo facilitaría el trabajo de interpretación de los histogramas ya que permitiría controlar de una forma más directa las variables involucradas. Hasta el momento la mejor ruta posible para encontrar esta expresión es la aplicación de la teoría matemática de los estadísticos de orden [2], a continuación daremos una breve descripción de ella.

Suponemos que tenemos una distribución de  $n$  variables aleatorias  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . El más grande de los  $X_i$  será denotado como  $X_{1:n}$ , el segundo en tamaño como  $X_{2:n}$ , el tercero como  $X_{3:n}$  y así sucesivamente hasta  $X_{n:n}$ , de esta forma se pueden ordenar las variables como:

$$X_{1:n} \geq X_{2:n} \geq X_{3:n} \geq \dots \geq X_{n:n} \quad (3.3)$$

Los  $X_N$  deben ser continuos y tener una función densidad de probabilidad (pdf)  $f(x)$  y una función distribución acumulativa (cdf)  $F(x)$ . El objetivo de la teoría es describir el comportamiento de secuencias como las dadas por (3.3), que como vemos es similar a la ecuación (3.2). Para una descripción satisfactoria necesitamos determinar la probabilidad de encontrar el evento  $X_{N:n}$  entre  $x$  y  $x + \delta x$ , que es

$$P(x \leq X_{N:n} \leq x + \delta x) = \frac{n!}{(N-1)!(n-1)!} \{F(x)\}^{N-1} \{1 - F(x + \delta x)\}^{n-N} \times \{F(x + \delta x) - F(x)\} + O((\delta x)^2) \quad (3.4)$$

y la función densidad de probabilidad de  $X_{N:n}$  ( $1 \leq N \leq n$ ) es

$$p_{N:n}(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{P(x \leq X_{N:n} \leq x + \delta x)}{\delta x} \right\} \quad (3.5)$$

que es equivalente a

$$p_{N:n}(x) = \frac{n!}{(N-1)!(n-1)!} \{F(x)\}^{N-1} \{1 - F(x)\}^{n-N} f(x) \quad (3.6)$$

podemos ver que la expresión está en términos de cdf, pdf y los  $X_N$

Los dos casos extremos son para  $N = 1$  el mayor de todos y  $N = n$  el menor de todos. Obtenemos para el primero

$$p_{1:n}(x) = n \{1 - F(x)\}^{n-1} f(x) \quad (3.7)$$

en el segundo caso  $N = n$

$$p_{n:n}(x) = n \{F(x)\}^{n-1} f(x) \quad (3.8)$$

Como ya lo notamos, la relación entre (3.3) y (3.2) es evidente, por tanto los estadísticos de orden deberían describir satisfactoriamente los histogramas energéticamente ordenados. A pesar de ello debemos realizar algunas precisiones para mostrar las limitaciones del modelo.

Para combinar estadística de orden con la teoría nuclear, tomamos las siguientes consideraciones: la energía  $E_\gamma$  de un rayo gamma en una cascada es asociada con la variable  $X$  definida en la ecuación (3.6). En esta misma ecuación,  $n$  es la multiplicidad, es decir, la cantidad de rayos gamma en una cascada.  $N$  que es un ordinal indica el orden de la radiación que estamos trabajando, por ejemplo:  $N = 1$  corresponde a la radiación primaria. La función de distribución de probabilidad  $f(x)$  corresponde a la intensidad  $I_\gamma(E_\gamma)$  del rayo gamma con energía  $E_\gamma$ .

Para aplicar la estadística de orden al caso nuclear se deben tomar en cuenta los siguientes problemas

1.  $n$ , el número de transiciones en una cascada, es una variable aleatoria y en la teoría de la estadística de orden este es un número fijo.
2. Las energías  $E_\gamma$  no son independientes e idénticamente distribuidas y la teoría de la estadística de orden exige que las variables  $X_N$  lo sean.

Para enfrentar el primero de estos problemas se considera la intensidad descrita por

$$I_{N=1}(E_\gamma) = C \sum_{n_{min}}^{\infty} b_n p_{1:N}(E_\gamma) \quad (3.9)$$

donde

- $b_n$  Es la probabilidad relativa para que ocurra una cascada con multiplicidad  $n$
- $C$  Es una constante de normalización
- $p_{1:N}(E_\gamma)$  es la expresión dada en (3.7)

Uno de los problemas fundamentales consiste en encontrar los coeficientes  $b_n$  de la ecuación (3.9), ya que la teoría no nos proporciona un método para efectuar el cálculo. Parte de esta labor ya ha sido realizada en investigaciones previas [3, 4, 5] tal como se verá en la siguiente sección.

# Capítulo 4

## Consideraciones Iniciales

Para realizar los cálculos correspondientes simulamos el decaimiento de un núcleo de  $^{170}\text{Hf}$  con un programa simple denominado Decae que nos permite controlar fácilmente las variables involucradas en el proceso. El núcleo tiene una energía de excitación comprendida en un rango  $[U_l, U_h] = [9, 11]\text{MeV}$  que es una zona perteneciente al continuo nuclear. Trabajamos con un arreglo de detectores que tienen una función respuesta ideal. Los histogramas obtenidos mediante este procedimiento serán considerados como equivalentes a los experimentales, además los resultados de la simulación nos permiten ver los rasgos generales del decaimiento y manipular parámetros como el de densidad de niveles que sería imposible con los datos experimentales.

Recordamos que nuestro objetivo es aplicar la estadística de orden al continuo nuclear cuando el núcleo es descrito utilizando las fortalezas de emisión dadas por la resonancia dipolar gigante y la densidad de niveles es el gas de Fermi. Como ya vimos en la ecuación (3.9) y comentamos en la sección anterior, la aplicación no puede realizarse de manera directa. El problema principal a solucionar en el momento es encontrar una expresión para los coeficientes  $b_n$  que no son contemplados en la teoría de la estadística de orden. Para tal propósito debemos diseñar métodos numéricos que permitan su cálculo. Debido a la complejidad de las expresiones involucradas (2.9), (2.10), (2.12) y (2.13) empezamos nuestro análisis con los modelos más sencillos; pero antes realizamos unas breves consideraciones generales.

### 4.1. Significado del Mayor Estadístico Para $n$ Dado

En nuestro primer intento por comprender la distribución de los coeficientes  $b_n$  observamos que para un  $n$  dado, su coeficiente debe ser igual a cero en ciertas regiones tal como se mostrará a continuación. Este fenómeno ya había sido formulado en [3].

En la figura 4.1 tenemos dos ejemplos de un decaimiento que genera cascadas de multiplicidad  $n = 2$  y  $n = 3$ , cuando el núcleo tiene una energía de excitación de 11 MeV. En el caso de multiplicidad  $n = 2$  vemos que por ejemplo  $E_\gamma = 4$  MeV no puede ser la energía más

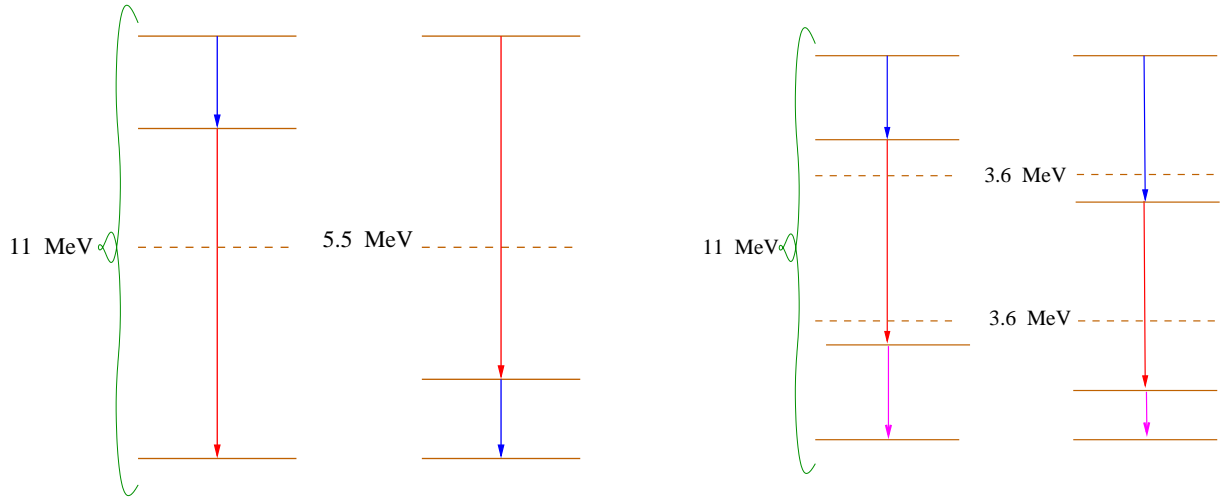


Figura 4.1: Posible decaimiento que genera cascadas de multiplicidad dos y tres, cuando el núcleo tiene una energía de excitación de 11 MeV [22].

$E_\gamma$ -rango	$n$ posible	$n_{min}$
$[U/2, U)$	2,3,4,...	2
$[U/3, U/2)$	3,4,5,...	3
$[U/4, U/3)$	4,5,6....	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 4.1: Valores mínimos de  $n$  para cada rango de energía [3].

grande sí sólo hay dos rayos. Concluimos que la mayor energía siempre debe ser mayor que 5,5 MeV, es decir mayor que  $U/2$ . Un resultado similar se obtiene en el caso de multiplicidad  $n = 3$ , en donde vemos que la mayor energía siempre debe ser mayor que 3,6 MeV, es decir mayor que  $U/3$ . Esto tiene una consecuencia en el histograma construido por los rayos más energéticos. En general para una cascada de multiplicidad  $n$  el rayo gamma más energético tendrá una energía superior a  $U/n$ .

Las consideraciones anteriores tienen una consecuencia sumamente importante en la distribución de los coeficientes  $b_n$  en el histograma construido por los rayos más energéticos, ya que esto implica que  $b_n = 0$  para  $E_\gamma \leq U/n$ . Otra forma de expresar este resultado es notar que en todas las regiones no actúan los mismos valores de  $n$ . En el cuadro 4.1 se muestran los posibles valores para cada región y el mínimo  $n$  de cada zona.

## 4.2. Primera Aproximación Para el Cálculo de los Coeficientes $b_n$

Cuando construyamos los espectros diremos que la aproximación de orden cero es aquella en la que solamente se consideran los mínimos valores de  $n$  para cierto rango de energías.

En [5] se mostró la utilidad de asumir que la distribución de los  $b_n$  es gaussiana y los pasos necesarios para realizar los cálculos. Estos pasos son enumerados a continuación. Definimos  $U_s$  como la máxima energía de excitación en este caso es 11 MeV.

1. Calcular la energía promedio de la transición

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{\int_0^{U_s} x f(x) dx}{\int_0^{U_s} f(x) dx} \quad (4.1)$$

2. Calcular la multiplicidad promedio dada por

$$\bar{n} = \frac{U_s}{\bar{x}} \quad (4.2)$$

3. Calcular la desviación estándar de  $x$  (dispersión)

$$\sigma^2(x) = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \frac{\int_0^{U_s} (x - \bar{x})^2 f(x) dx}{\int_0^{U_s} f(x) dx} \quad (4.3)$$

4. Relacionar la dispersión de  $x$  con la dispersión de  $n$ , esto es propagación de error

$$\sigma^2(n) = \left( \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} \right)^2 \sigma^2(x) \quad (4.4)$$

5. la distribución de  $b$  es

$$b_n = \frac{1}{\sigma(n)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{n} - n)^2}{2\sigma^2(n)}\right) \quad (4.5)$$

### 4.2.1. Temperatura Constante y Partícula Aislada

El caso más sencillo es cuando tomamos para la densidad de niveles el modelo de temperatura constante y para las fortalezas de emisión el modelo de partícula aislada. Con esta formulación la función densidad de probabilidad se puede escribir como

$$f(x) = I_\gamma(x) = Cx^m \exp\left(-\frac{x}{T}\right) \quad m = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (4.6)$$

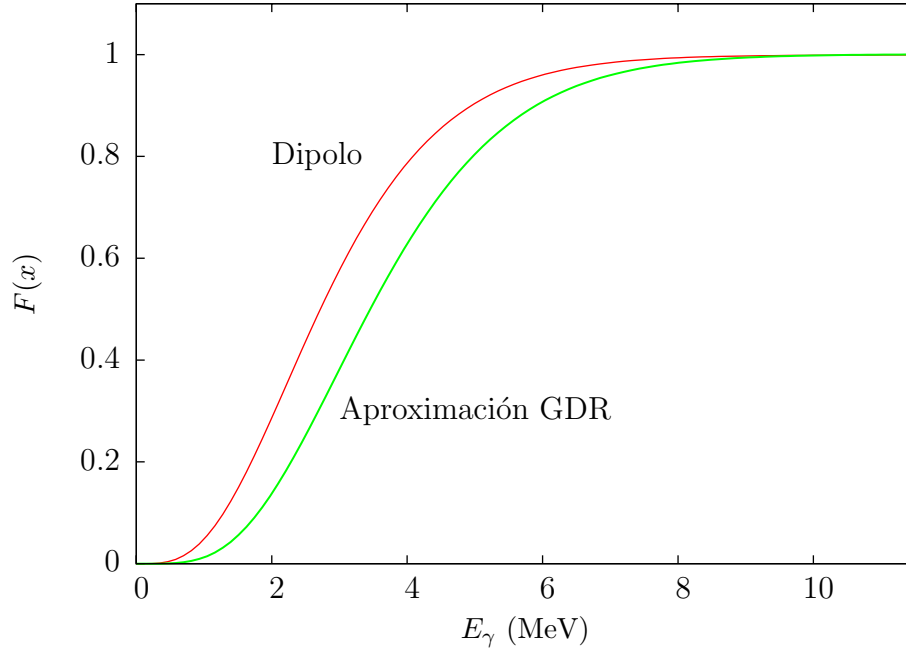


Figura 4.2: Función acumulativa,  $F(x)$ , con  $T = 0,74$  MeV, para  $m = 3$  (dipolo) y  $m = 4$  (aproximación para GDR).

donde  $C$  es una constante y hemos reemplazado por simplicidad en la escritura  $E_\gamma$  por  $x$ . La función acumulativa

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x')dx' = \int_0^x C_3 x'^m \exp\left(-\frac{x'}{T}\right) dx' \quad (4.7)$$

puede ser fácilmente calculada para cualquier valor de  $m$ .

En la figura 4.2 vemos la función acumulativa para  $m = 3$  que corresponde a la ley clásica del dipolo y para  $m = 4$  que corresponde a la aproximación para GDR. En ambos casos tomamos la temperatura  $T = 0,74$  MeV.

En la figura 4.3 tenemos la distribución de los coeficientes  $b_n$  para tres diferentes valores de temperatura. Allí podemos apreciar que al disminuir la temperatura la probabilidad de tener cascadas con mayor multiplicidad, es decir mayor  $n$  aumenta, ya que el máximo de la función se desplaza.

Antes de estudiar el ajuste de los espectros con la estadística de orden, queremos revisar el comportamiento mostrado por la simulación para los diferentes histogramas según la temperatura nuclear.

En la figura 4.4 tenemos una comparación de los tres espectros simulados que corresponden a la ley clásica del dipolo y al modelo de temperatura constante, hemos considerado  $T = 0,74$ ,  $0,64$  y  $0,54$  MeV. Podemos ver que el punto de corte a bajas energías depende de la temperatura del núcleo, a menor temperatura mas baja es la energía de corte.



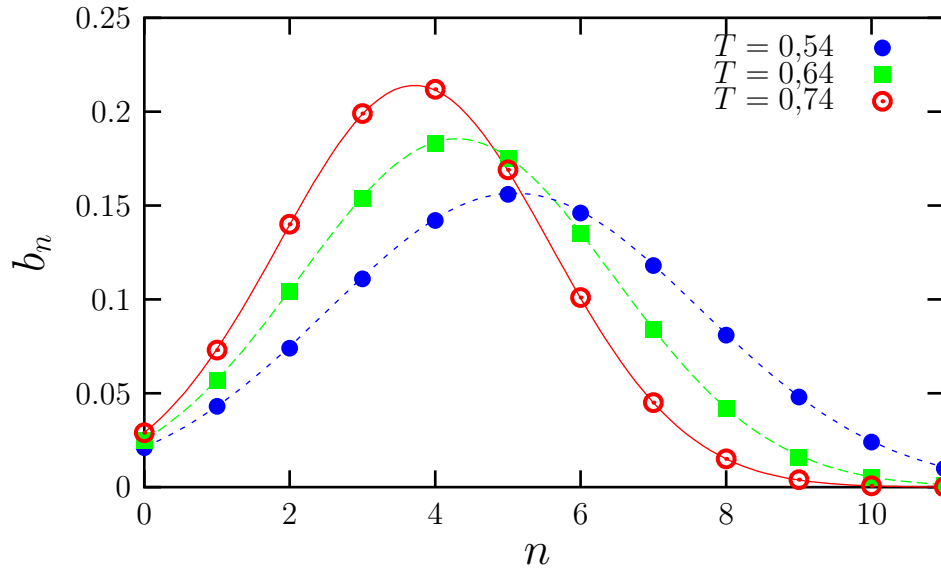


Figura 4.3: Distribución gaussiana de los  $b_n$  según el modelo de temperatura constante y dipolo, con  $T = 0,54, 0,64$  y  $0,74$  MeV.

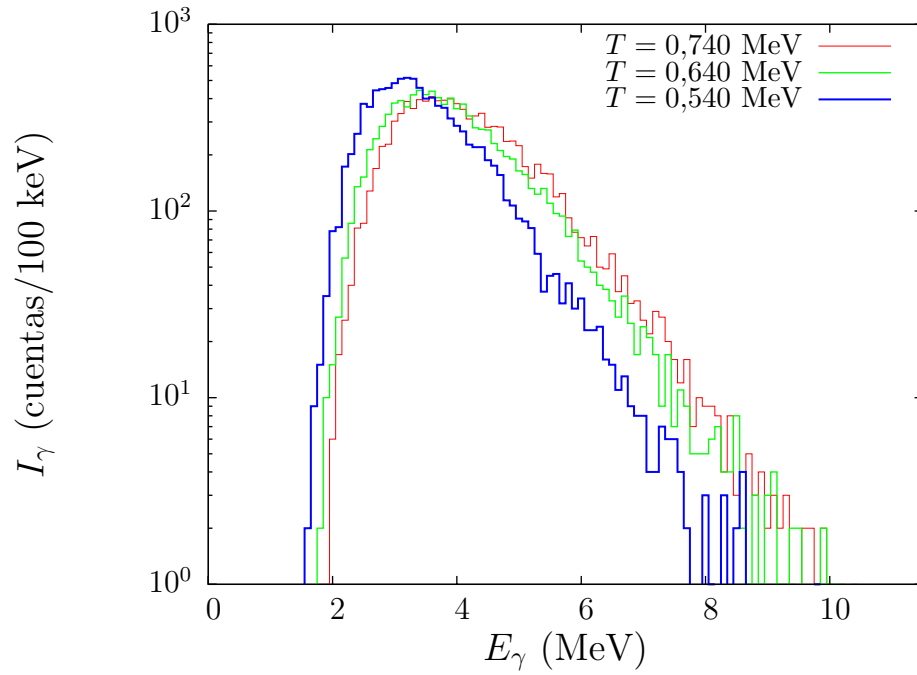


Figura 4.4: Comparación de los espectros simulados con Decae para ley del dipolo y temperatura constante, con  $T = 0,74, 0,64$  y  $0,54$  MeV.

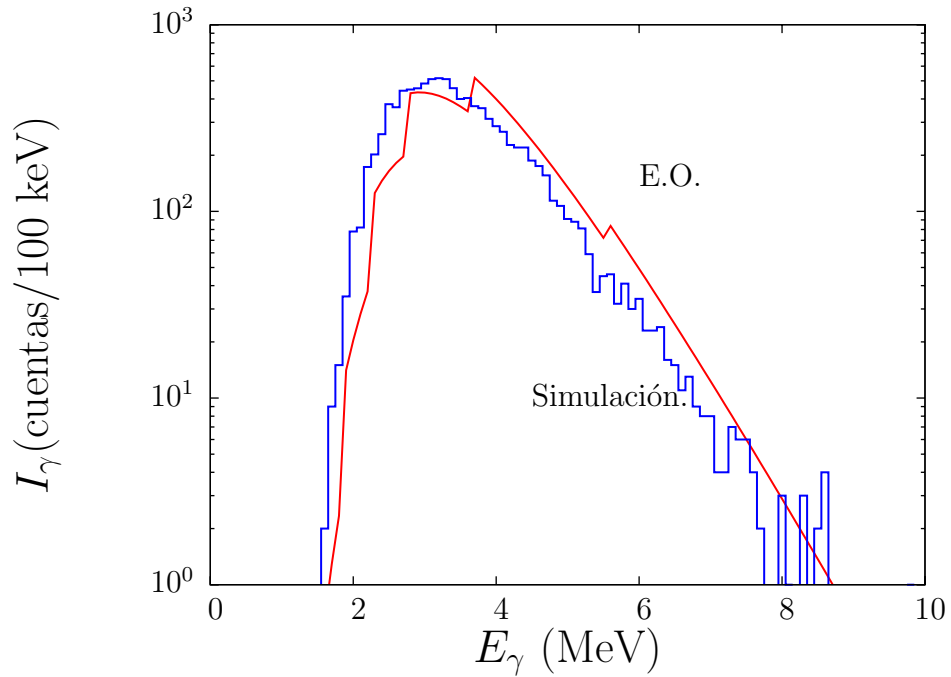


Figura 4.5: Comparación del espectro simulado con Decae y el dado por la estadística de orden (E.O.) aplicando la ley clásica del dipolo y temperatura constante con  $T = 0,54$  MeV.

En las figuras 4.5, 4.6 y 4.7 vemos la comparación de espectro simulado y el dado por estadística de orden (E.O.) aplicando la ley clásica del dipolo y temperatura constante con  $T = 0,54, 0,64$  y  $0,74$  MeV respectivamente. En este caso hemos aplicado la llamada aproximación de orden cero, que es aquella en la que solamente se consideran los  $n$  mínimos en cada región. Podemos ver que en los tres casos el ajuste es bueno, sin embargo la calidad del ajuste depende de la temperatura; para la temperatura de  $0,74$  MeV la pendiente a bajas energías se aleja de la del espectro simulado. En la curva dada por la estadística de orden apreciamos saltos bruscos en los tres casos, esto se debe a que solamente se consideran los  $n$  mínimos en cada región de energías y ello conlleva a la discontinuidad en el espectro.

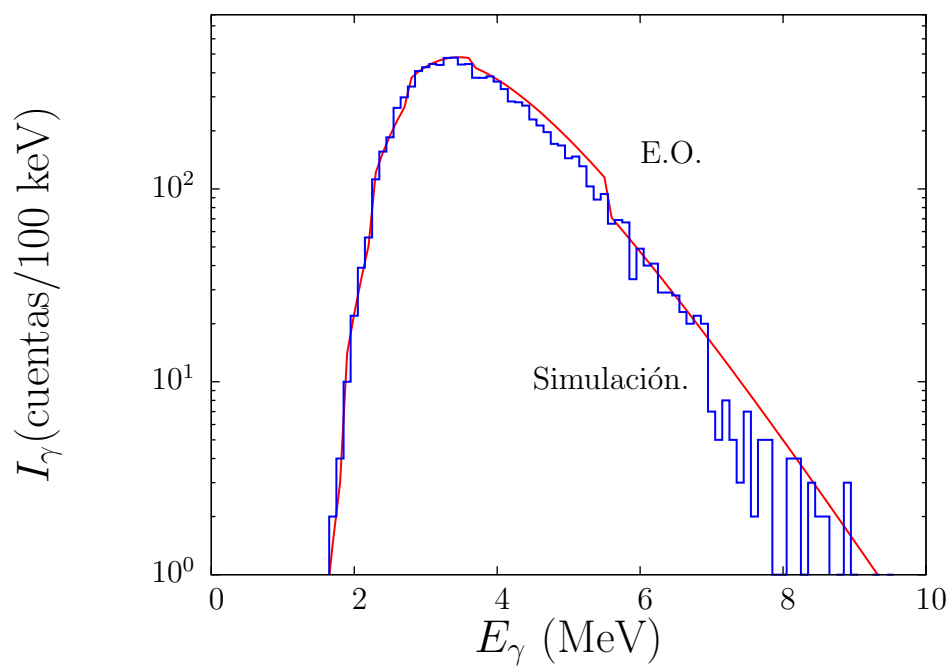


Figura 4.6: Comparación del espectro simulado con Decae y el dado por la estadística de orden (E.O.) aplicando la ley clásica del dipolo y temperatura constante con  $T = 0,64$  MeV.

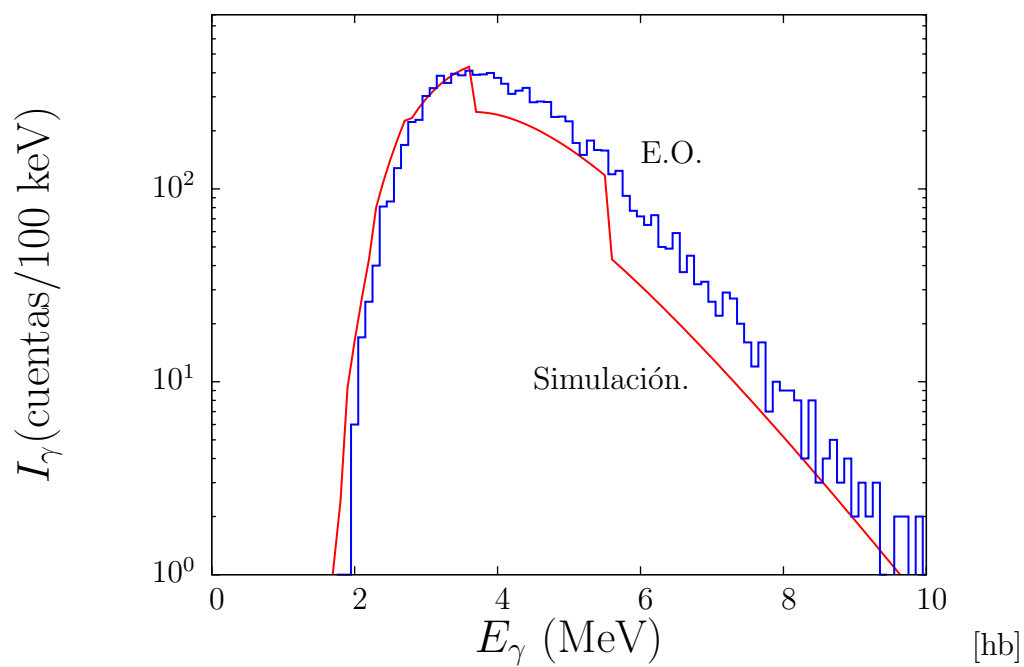


Figura 4.7: Comparación del espectro simulado con Decae y el dado por la estadística de orden (E.O.) aplicando la ley clásica del dipolo y temperatura constante con  $T = 0,74$  MeV.

# Capítulo 5

## Gas de Fermi y GDR

Para iniciar nuestro estudio del núcleo cuando se utiliza el gas de Fermi para la densidad de niveles y la resonancia dipolar gigante para las fortalezas de emisión, aplicaremos el procedimiento de la sección 3.2 para calcular los coeficientes  $b_n$ .

Nuevamente escribiremos estas expresiones para que sea más fácil su análisis. La densidad de niveles es

$$\rho_{FG}(U, I) = \sqrt{a} \left( \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} \right)^{3/2} (2I + 1) \frac{e^{2\sqrt{a}U}}{\left( U + \frac{3}{2}T \right)^2} \quad \text{donde} \quad T = \sqrt{\frac{U}{a} + \left( \frac{3}{4a} \right)^2} + \frac{3}{4a} \quad (5.1)$$

y las fortalezas de emisión

$$\Gamma_{\text{GDR}} = \frac{\sigma}{3(\pi\hbar c)^2} E_\gamma^4 \sum_{k=1}^{k_{\text{def}}} \frac{\omega_k \Gamma_{Gk}}{(E_\gamma^2 - E_{Gk}^2)^2 + \Gamma_{Gk}^2 E_\gamma^2}. \quad (5.2)$$

en el cuadro 5.1 tenemos estos valores para el  $^{170}\text{Hf}$ . En la figura 5.1 tenemos esta función normalizada. Podemos ver los dos picos de la resonancia en

Reuniendo todas las constantes en una sola que llamaremos  $C$ , tenemos la densidad de probabilidad expresada como

$$f(E_\gamma) = C \frac{e^{2\sqrt{a}(U_s - E_\gamma)}}{(U_s - E_\gamma + \frac{3}{2}T)^2} E_\gamma^4 \sum_{k=1}^{k_{\text{def}}} \frac{\omega_k \Gamma_{Gk}}{(E_\gamma^2 - E_{Gk}^2)^2 + \Gamma_{Gk}^2 E_\gamma^2} \quad (5.3)$$

Parámetro	$k_{\text{def}} = 1$	$k_{\text{def}} = 2$
$w$	0,4	0,6
$E_G$ (MeV)	11.9	15.2
$\Gamma_G$ (MeV)	2.8	4.7

Cuadro 5.1: Parámetros de GDR [3].

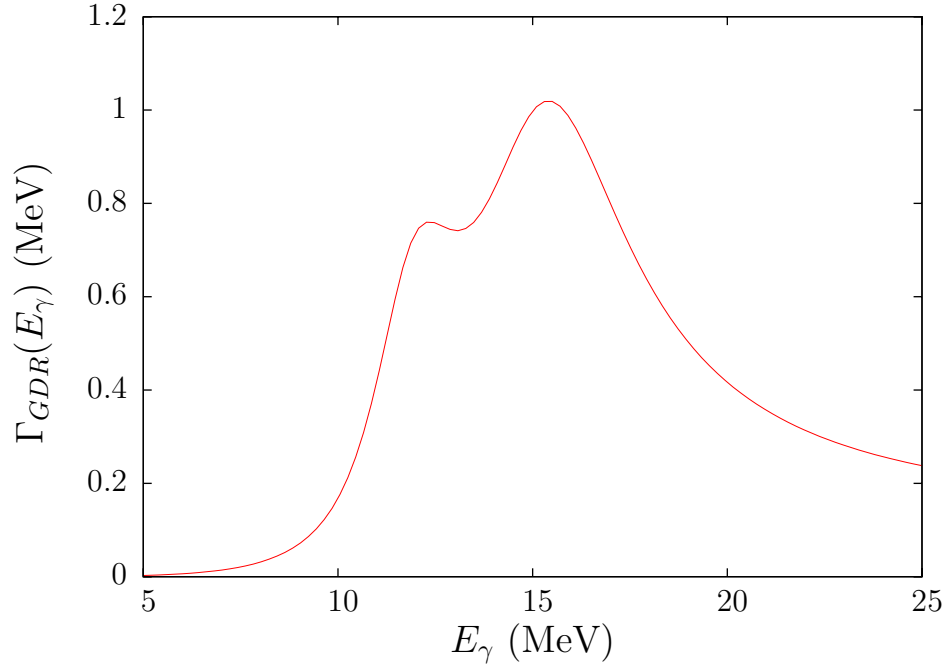


Figura 5.1: GDR para el  $^{170}\text{Hf}$ .

$\bar{E}_\gamma$	$\bar{n}$	$\sigma(E_\gamma)$	$\sigma(n)$
3.68 (MeV)	2.99	1.5(MeV)	1.22

Cuadro 5.2: Parámetros de la distribución de  $b_n$ .

en la figura 5.2 vemos la dependencia como función de la energía de la transición. La gráfica tiene un máximo cerca a la energía  $E_\gamma = 3$  MeV, esto quiere decir que el rayo gamma más energético tendrá energías cercanas a este valor.

## 5.1. Primera Aproximación del Cálculo de los Coeficientes $b_n$

Ahora calculamos los coeficientes  $b_n$  suponiendo que están dados por una distribución gaussiana. Seguimos los cinco pasos que ya fueron mostrados en la sección 3.2 para el caso del núcleo descrito por la ley del dipolo y el modelo de temperatura constante. Hacemos la observación que en este caso las integrales deben ser calculadas numéricamente. Con éste procedimiento obtenemos los resultados mostrados en el cuadro 5.2. En la figura 5.3 dibujamos la distribución de los coeficientes  $b_n$  como función de  $n$  para gas de Fermi y resonancia dipolar gigante.

La máxima probabilidad corresponde al coeficiente  $b_n$  con  $n = 3$ , esto significa que es más

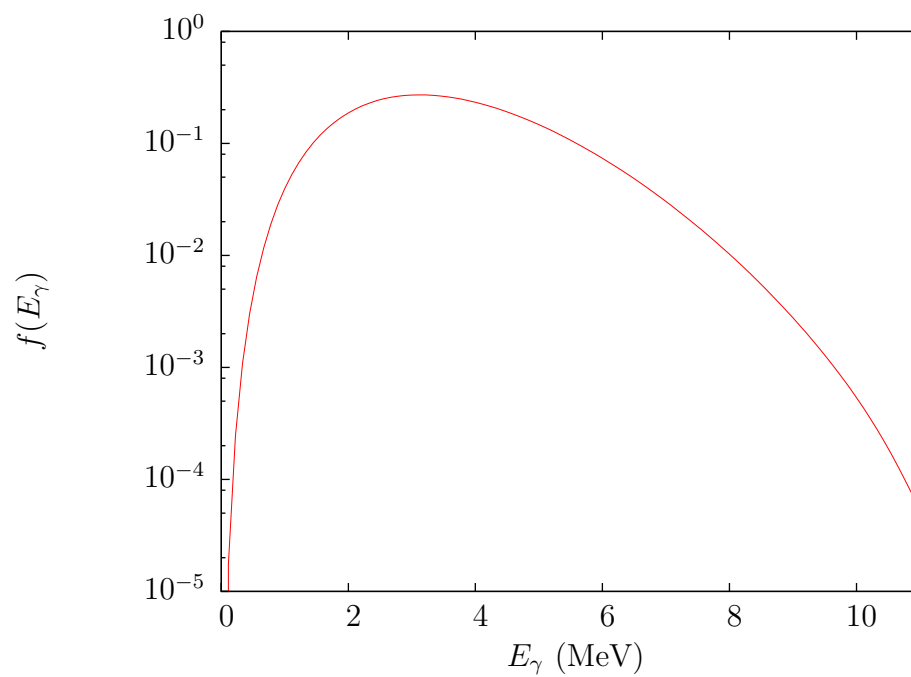


Figura 5.2: Densidad de probabilidad para gas de Fermi y resonancia dipolar gigante.

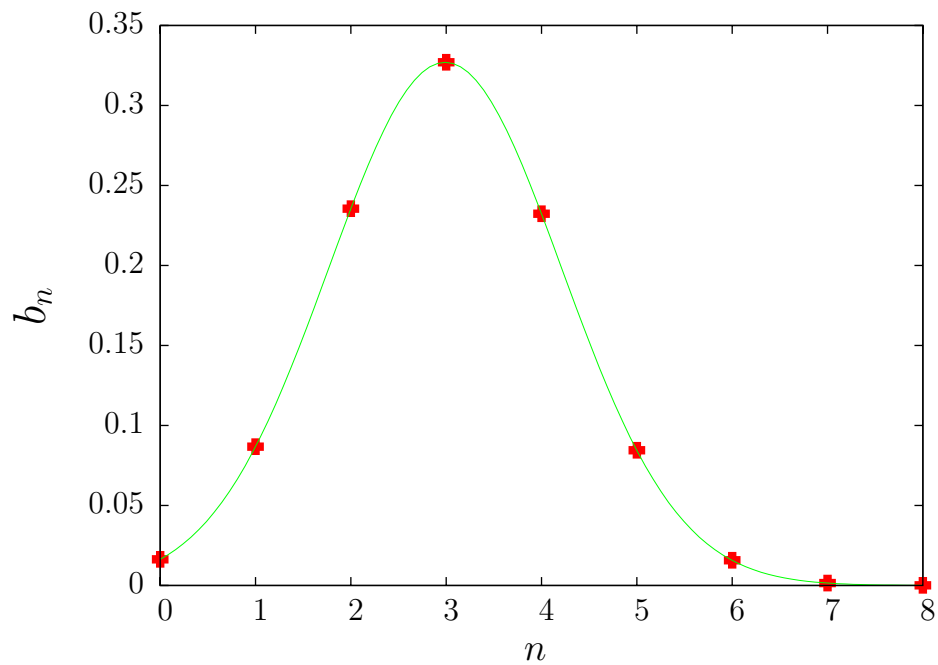


Figura 5.3: Distribución de los coeficientes  $b_n$  para gas de Fermi y resonancia dipolar gigante (la línea se utiliza como ayuda para la lectura).

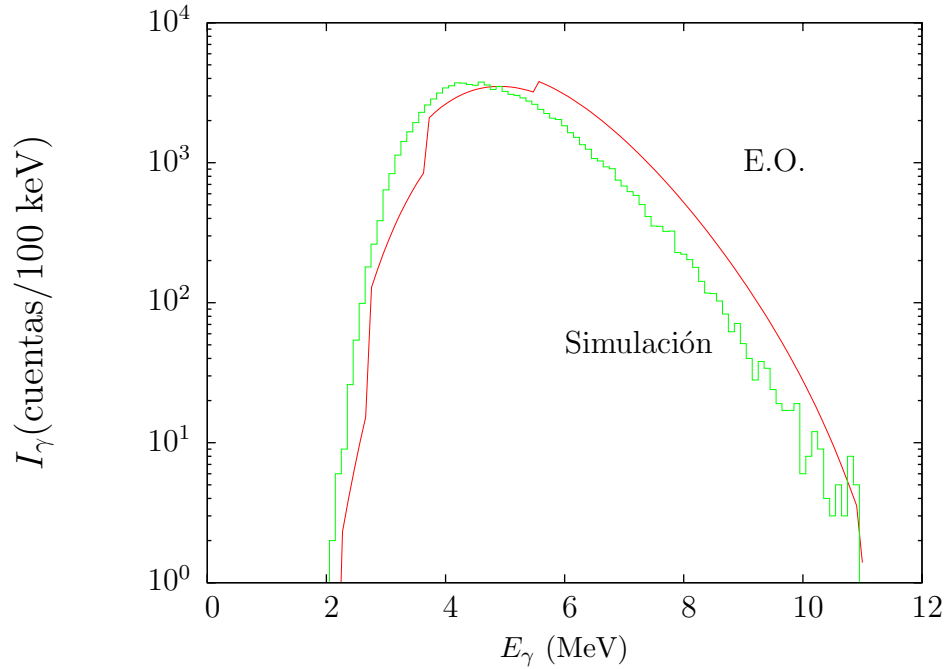


Figura 5.4: Ajuste del espectro generado por Decae usando gas de Fermi y resonancia dipolar gigante, para  $b_n$  aplicamos la distribución gaussiana con los parámetros dados en el cuadro 5.2. E.O. es el resultado mediante estadísticos de orden. Se ha tomado  $2 < n < 6$ .

probable que ocurra una cascada con multiplicidad 3. Podemos ver que la probabilidad de que ocurran cascadas con multiplicidad 6 y 7 es muy pequeña y es prácticamente inexistente para valores superiores a 8, por ello la sumatoria sobre los  $n$  de la ecuación (3.9) que corre desde un  $n$  mínimo hasta infinito puede ser truncada en  $n = 7$  o  $n = 8$  sin pérdida de generalidad e iniciada en uno o dos.

En la figura 5.4 mostramos el ajuste obtenido con las consideraciones indicadas. Podemos ver que a tanto en bajas como en altas energías el punto de corte está desplazado hacia la derecha, las pendientes son similares a las generadas por la simulación pero se encuentran desplazadas hacia la derecha.

## 5.2. Evaluación Numérica de los Coeficientes $b_n$

La suposición de que los coeficientes  $b_n$  tienen una distribución gaussiana es apropiada cuando se utiliza la ley clásica del dipolo para las fortalezas de emisión y el gas de Fermi a temperatura constante para la densidad de niveles [5]. Como acabamos de ver, para el caso más complejo, en el que la densidad de niveles es dada por el gas de Fermi y las fortalezas de emisión es GDR, el modelo no es apropiado. Por ésta implementamos otro método.

Evaluamos numéricamente los coeficientes  $b_n$  con el método desarrollado en [12] para dos



$n$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$\langle f \rangle$	$b_n$
1	0	0	2	1	0	0,6	0,0001
2	141	124	150	130	124	133,8	0,0133
3	1546	1563	1573	1577	1536	1559	0,1559
4	3955	3981	4013	4076	3982	4001,4	0,4001
5	3217	3214	3167	3150	3278	3207	0,3207
6	1003	982	974	918	1009	977,2	0,0977
7	133	130	110	141	117	126,2	0,0126
8	5	6	10	6	8	7	0,0007
9	0	0	1	1	0	0,4	0,0001
10	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 5.3: Evaluación numérica de los coeficientes  $b_n$ ,  $n$  es la multiplicidad,  $f_i$  la frecuencia obtenida en el proceso número  $i$ ,  $\langle f \rangle$  es la frecuencia promedio de los 5 procedimientos.

descripciones del núcleo que corresponden a la densidad de niveles dadas por el modelo de temperatura constante y el modelo de gas de Fermi y las fortalezas en ambos casos corresponden a la ley clásica del dipolo.

El método consiste en contar el número de cascadas que ocurren con determinada multiplicidad  $n$  y normalizar este valor para obtener los pesos relativos para cada  $b_n$ . Debido al carácter estocástico del decaimiento decidimos realizar cinco veces el proceso y promediar las frecuencias para obtener valores de  $b_n$  que no sean propios de una secuencia en particular.

En el cuadro 5.3 tenemos un resumen de los valores de los coeficientes  $b_n$  calculados con este procedimiento. En cada proceso se consideraron  $10^4$  cascadas y las frecuencias de cada caso también son incuidas. En la figura 5.5 tenemos la distribución de estos coeficientes. Con estos resultados podemos apreciar que es muy poco probable que ocurran cascadas con multiplicidades superiores a 7, igualmente la probabilidad de que ocurran cascadas con multiplicidad  $n = 1$  es relativamente baja.

Para verificar la eficiencia del método en la figura 5.6 comparamos el espectro obtenido de esta forma con el simulado y con el ajuste obtenido mediante la estadística de orden considerando todos los coeficientes  $b_n = 1$ . En ambos casos vemos que los ajustes teóricos con el espectro simulado no es bueno, pero entre ellos el resultado es muy similar. En la zona de altas energías, la coincidencia de los dos métodos es muy significativa. A pesar que a bajas energías el método numérico mejora el ajuste aún no es una descripción suficientemente buena.

### 5.3. Coeficientes $b_n$ en Función de la Energía

Un procedimiento un poco más refinado que el anterior es considerar la posibilidad de que los coeficientes  $b_n$  dependan de la energía y contar las veces que ocurre cada cascada de multiplicidad  $n$  pero discriminando estas frecuencias de acuerdo a la energía. Matemáticamente

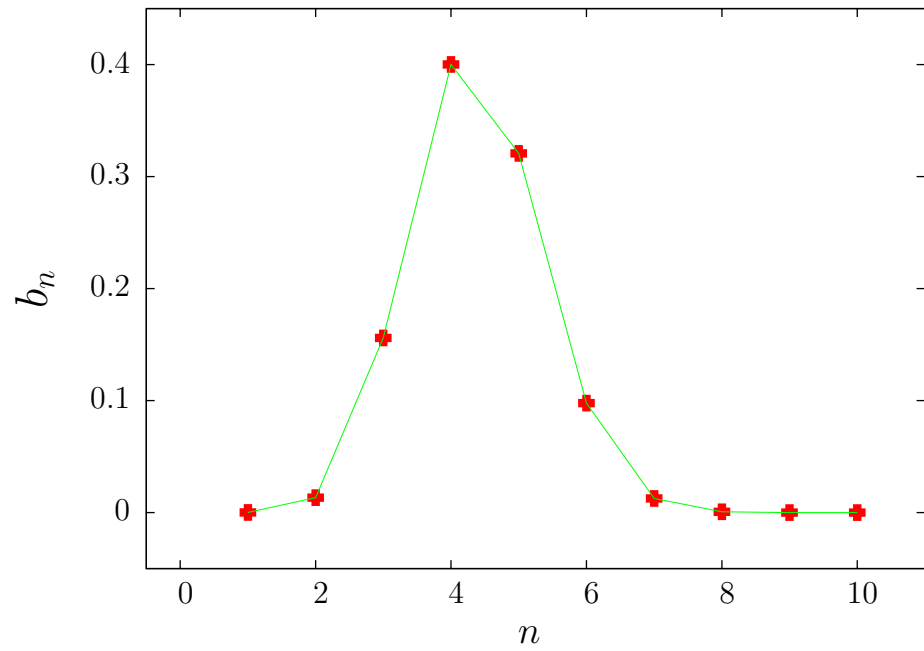


Figura 5.5: Coeficientes  $b_n$  en función de la multiplicidad  $n$ . Los coeficientes son obtenidos numéricamente, los valores corresponden al cuadro 5.3. (La línea sólo sirve como guía para el lector).

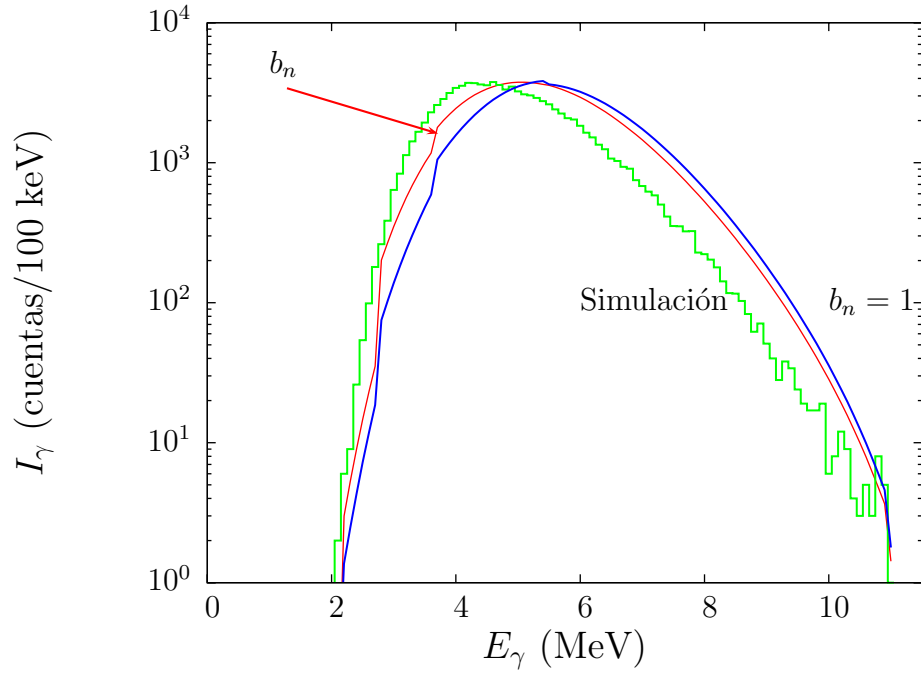


Figura 5.6: Comparación del espectro simulado con Decae y los espectros calculados usando la distribución de los  $b_n$  dados por el cuadro 5.3 y todos los  $b_n = 1$ .

el procedimiento puede ser expresado como [23, 24]

$$b_n(E_\gamma) = \frac{I_n(E_\gamma)}{\sum_{n_{\min}}^{n_{\max}} I_n(E_\gamma)} \quad (5.4)$$

en donde  $n_{\min}$  corresponde al mínimo valor de  $n$  que se puede considerar, en este caso  $n = 1$  y  $n_{\max}$  corresponde al máximo valor de  $n$ , en este caso  $n = 10$ .  $I_n(E_\gamma)$  es el valor de la intensidad para cierto valor de energía  $E_\gamma$  y un determinado  $n$ .

La distribución de los  $b_n$  dados por la ecuación (5.4) están representados en la figura 5.7 para  $n = 2, 3, 4$ . Para  $n = 5, 6, 7, 8$  están en la figura 5.8. Ninguna de estas distribuciones es suave, vemos que tiene un comportamiento “oscilatorio” pero es debido al tamaño del bin que se toma en la construcción del histograma. El valor mínimo que toma cada coeficiente es congruente con el análisis preliminar que se realizó en la sección 3.1. Por ejemplo vemos en la figura 5.7 que para  $n = 2$  no hay ningún coeficiente con energía inferior a  $U/2 = 5,5$  MeV.

Finalmente aumentamos la estadística y con estos coeficientes comparamos el histograma simulado con el dado por la estadística de orden, el resultado es mostrado en la figura 5.9. En esta figura vemos que en líneas generales la forma del espectro es bien descrita, no tiene las discontinuidades que muestra el ajuste de orden cero y el punto de corte con el eje de la energía en bajos valores de ésta, concuerda perfectamente. Las pendientes tanto en altas como en bajas energías son similares, a pesar de que la descripción no es exacta. Esta aproximación

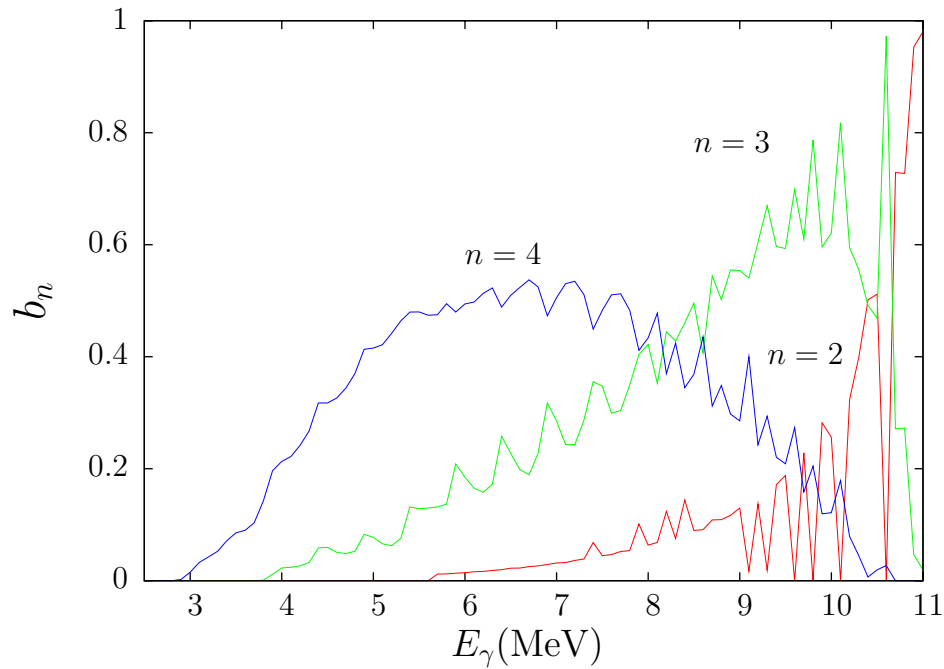


Figura 5.7: Distribución de los coeficientes  $b_n$  en función de la energía. Gráfica para  $n = 2, 3, 4$ .

es la que hasta el momento ha presentado los mejores resultados.

## 5.4. Los programas Gamble y Gamana

Gamble es un programa escrito en lenguaje Fortran por G.A. Leander [25]. Simula el decaimiento de un núcleo residual proveniente de una reacción de fusión evaporación aplicando el método de Monte Carlo.

Con este programa es posible obtener el espectro del decaimiento gamma del continuo nuclear. Su importancia radica en que permite controlar una gran cantidad de parámetros de entrada, tales como la densidad de niveles, las energías y el ancho de los picos de la resonancia dipolar gigante. Se deben incluir en los cálculos los estados de la línea yrast del núcleo en cuestión, para tales estados se debe especificar la energía, espín y paridad. También se deben especificar los modos de decaimiento de cada uno de estos estados incluyendo el branching correspondiente en caso de que un estado pueda decaer por más de un camino. Es necesario también especificar los estados de entrada en una región del espacio de fase de energía y espín.

El programa controla la entrada de datos con la proposición NAMELIST. Esta sentencia permite definir una lista de variables y organizarlas en grupos. Este procedimiento facilita la etapa de entrada de datos. Los grupos son REPS, JOBC, NUCL, LEVD, YRAL, STAT, ENTI,

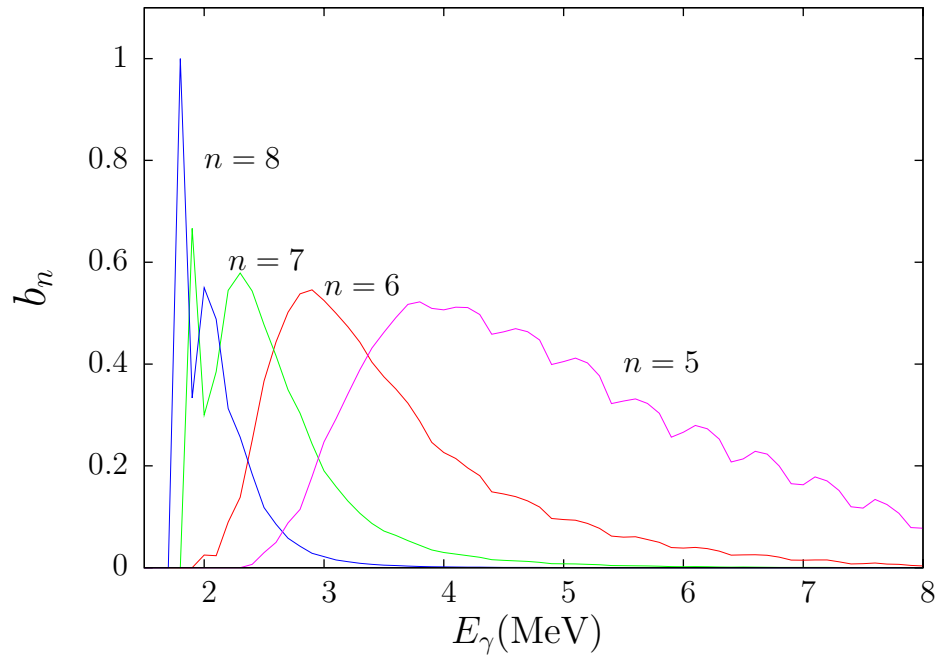


Figura 5.8: Distribución de los coeficientes  $b_n$  en función de la energía. Gráfica para  $n = 5, 6, 7, 8$ .

ENTE y CROT.

### REPS

Este grupo define algunas variables de control y parámetros técnicos de la simulación.

Variable	Significado y/o acción
MMREP	Número de iteraciones.
ISEED	Semilla del generador de números aleatorios.
NNREP	Número de iteraciones sobre la generación de cascadas.
NCASC	Número de cascadas generadas en cada ciclo.

### JOBC

Define las unidades de almacenamiento de datos y permite discriminar la información que será guardada.

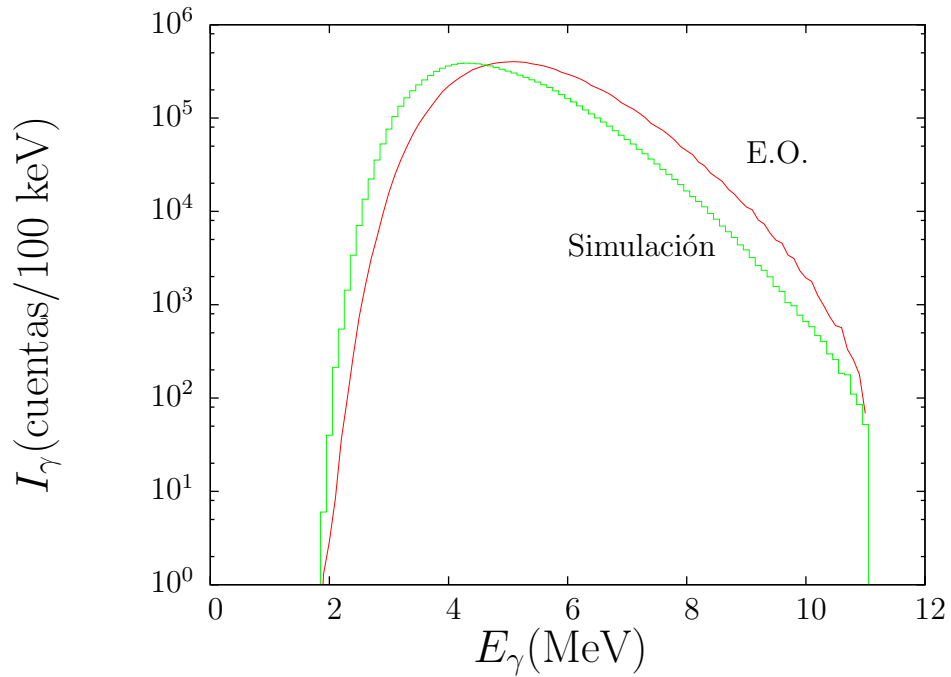


Figura 5.9: Ajuste usando la distribución de los coeficientes  $b_n$  en función de la energía dados por la simulación realizada con Decae.

Variable	Significado y/o acción
ICHECK	Controla la información que es impresa en la pantalla, puede ser 0 o 1.
IOUT	Unidad de almacenamiento de la información de las cascadas.
MOUT	Unidad de almacenamiento de la energía total y la multiplicidad de cada cascada.
IFGCB	Unidad de almacenamiento de información sobre la cascada.
EMAX	Energía de excitación máxima desde donde decaen los núcleos.
NEMAX	Número de puntos de la red en el espacio virtual energía-espín.
JMAX	Valor máximo de espín desde donde decaen los núcleos.

### NUCL

Controla el número de nucleones del núcleo en estudio.

Variable	Significado y/o acción
IA	Número de nucleones del núcleo en estudio.
IZ	Número atómico del núcleo en estudio.

### LEV D

La densidad de niveles es obtenida de una formula para el gas de Fermi cuya línea yrast es dada por el modelo de gota líquida rotante (RLDM) más un parámetro DELTA. El codigo puede ajustar DELTA de forma que la curva DELTA+RLDM coincida con la línea yrast en altos espines.

Variable	Significado y/o acción
JDEL T1	Controla el valor de DELTA. Si $JDEL T > 0$ DELTA es ajustado de forma que los niveles de la línea yrast en espines $JDEL T-1$ o $JDEL T-1/2$ coincidan con el modelo de gota líquida más DELTA/ Si $JDEL T1=0$ el parámetro DELTA es tomado de datos experimentales. Si $JDL TEL1 < 0$ Delta es dado por una variable de entrada llamada DELTIN.
JDEL T2	Reescala la curva predicha por el modelo de gota líquida.
AGC	Controla el parámetro de densidad de niveles.
DEL TIN	Valor del parámetro DELTA.

### YRAL

Controla los estados de la línea yrast. Define energías, paridad, y modos de decaimiento. Otros estados pueden ser extrapolados usando el modelo de gota líquida.

Variable	Significado y/o acción
JYRA	Controla las energías de los estados yrast. Si $JYRA > 0$ la menor energía yrast es incluida. Si $JYRA = 0$ la línea yrast sigue el modelo de gota líquida. Si $JYRA < 0$ se reescalan los resultados del modelo de gota líquida.
JPAR	Controla las paridades de los estados yrast.
JMODEY	Número de estados yrast que se incluyen.
EYRA	Energías de los estados yrast.
IPYRA	Paridad de los estados yrast.
MODEY1	Especifica un posible modo de decaimiento de un estado yrast a otro.
MODEY2	Especifica otro modo de decaimiento de un estado yrast al otro.
YRATIO	Fracción de la población en estado yrast que decae por el modo MODEY1.
YGAM	Dependiendo de los valores de MODEY1 y MODEY2 puede ser necesario incluir energías de transición extras.

## STAT

Reúne la información relacionada con las fortalezas de emisión.

Variable	Significado y/o acción
CHSI	Constantes para las fortalezas en las transiciones no colectivas. Calculadas según los estimados de Weisskopf.
LS	Exponente en el cálculo de las fortalezas de emisión estadísticas.
NGDR	Habilita la posibilidad de las fortalezas de emisión según la resonancia dipolar gigante (GDR).
IKMF	Permite escoger la mejor parametrización de GDR.
WGDR	Contribución relativa de cada una de las deformaciones de GDR.
EGDR,GGDR	Energía y ancho de cada pico de GDR

## ENTI

Controla la distribución inicial de los estados de entrada en el espacio de fase de energía y momento angular. La distribución de espín puede ser triangular, gaussiana o arbitraria. La distribución en energía sigue una parametrización diferente.



Variable	Significado y/o acción
J1,J2,J3	Controlan la distribución de entrada del espín en una distribución triangular.
IFGROG	Controla el lugar en que deben ser ingresados J1, J2 y J3.
WJ	Pesos para la distribución en espín.
AVJ,SIGMAI	Centroide y ancho de la distribución gaussiana.

### ENTE

Cumple una función similar a ENTI pero en este caso se definen los valores para la energía.

Variable	Significado y/o acción
HL,HU	Controlan el rango de valores posibles para los estados de entrada.
ENTR0,ENTR1	Controlan el pico de la distribución de la energía.
EPAS0,EPAS1	Controlan el el pico la distribución de la energía para estados que aún pueden emitir partículas.
ALPHA E,ALPHA P	Parámetros de la distribución de energías.

### CROT

Las transiciones colectivas en las bandas compiten con las transiciones estadísticas. Deben ser definidos un conjunto de parámetros para calcular la energía y las razones en que pueda ocurrir uno u otro decaimiento. Las bandas del casi-continuo pueden ser calculadas con un generador de números aleatorios para que en cada caso sean ligeramente diferentes. También es posible obtener cruce de bandas controlando su probabilidad de ocurrencia.

Variable	Significado y/o acción
KCOLL	Número de regiones de espín con diferentes descripciones de los modos colectivos.
JCOL	Índice asociado con el conteo de las diferentes regiones de espín.
Q0	Momento cuadrupolar eléctrico.
DQ0	Dispersión del momento cuadrupolar eléctrico.
CCO1	Coefficiente asociado a la contribución del espín a la fortaleza de emisión.
CCO2	Coefficiente asociado a la contribución de la energía de excitación a la fortaleza de emisión.
SIGMAG	Controla la distribución de probabilidad del factor giromagnético.
RKM0 , RKM1	Coefficientes asociados con las probabilidades de transiciones colectivas.
ACOL	Controla las bandas rotacionales, estas pueden ser paralelas a la línea yrast, paralelas a la curva del modelo de gota líquida o puede ser un parámetro inercial.
ACO1-2, ALIC	Deben definirse si ACOL es un parámetro inercial.
CRLD	Factor de reescalamiento para las energías de transición del modelo de gota líquida.
DA0, DA1	Son usados en una expresión para calcular números aleatorios.
JRAN	Controla la dispersión energética en las transiciones. Esta dispersión es dada por la suma de dos Gaussianas.
S0,S1,S2,S3	Parámetros de una de las Gaussianas.
SIG0-9	Parámetros necesarios para la suma de las Gaussianas.
JCROSS	Puede incluirse la posibilidad de transiciones entre bandas colectivas. Debe calcularse el número promedio de bandas que se cruzan. JCROSS define el número de términos para incluir en este cálculo.
PCROSS,SCROSS,ECROSS	Parámetros necesarios para el cálculo del número promedio de bandas que se cruzan.

#### Archivo de entrada

Los siguientes son los valores utilizados como entrada de Gamble.

#### REPS

MMREP=1, ISEED=235865, NNREP=1, NCASC=10

**JOBC**

ICHECK=0, IOUT=10, MOUT=30, IFGCB=0, EMAX=15, NEMAX=16, JMAX=71

**NUCL**

IA=170, IZ=72

**LEVD**

JDELT1=27, JDELT2=0, AGC=20.CTFG=1.TE1=0.74

**YRAL**

JYRA=27, JPAR=27, JMODEY=27,

EYRA= 0,000 1,000 0,101 1,088 0,322 1,322 0,643 1,642,  
1,043 2,043 1,505 2,483 2,016 2,932 2,567 3,430,  
3,151 3,965 3,766 4,529 4,421 5,126 5,130 5,770,  
5,903 6,476 6,739

IPYRA= 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1  
1 -1 1 -1 1 -1 1 -1  
1 -1 1 -1 1 -1 1 -1  
1 -1 1

MODEY1= 0 14 20 14 20 14 20 14  
20 14 20 14 20 20 20 20  
20 20 20 20 20 20 20 20  
20 20 20

MODEY2= 0 0 0 0 0 0 0 0  
0 0 0 0 0 14 0 14  
0 14 0 0 0 0 0 0  
0 0 0

YRATIO= 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1  
1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 0,4 1,1 0,5  
1,1 0,7 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1 1,1  
1,1 1,1 1,1

**CROT**

KCOLL=1, JCOL=1, Q0=6, DQ0=2, CCO1=0, CCO2=0, SIGMAG=0,4, RKM0=6, RKM1=0,  
ACOL=0,071, ACO1=0, ACO2=0, ALIC=10, DA0=0, DA1=0,2, JRAN=1, S0-3=0, SIG0=0,250,  
SIG1-9=0, JCROSS=0

**STAT**

CHSI(1,1)= 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, ,1, ,1, ,1, ,1,

CHSI(14,1)= 1, 1, 1, 3, 3, 3, ,1, ,1, ,1, ,1, ,1

LS=0, NGDR=2, IKMF=1, WGDR= 0,4, 0,6, EGDR= 11,9, 15,2, GGDR= 2,8, 4,7,

**ENTI**

J1=42, J2=56, J3=64, IFGROG=0, HL=0, HU=1000

### ENTE

ENTR0=8, ENTR1=0,2, EPASO=2,2, EPAS1=0,14, APLHAE=6, APHAP=1

Debido a la complejidad del programa Gamble y al volumen de información que entrega, los datos de salida deben ser procesados por el programa Gamana [25]. Este código lee los archivos de salida de Gamble y puede generar entre otros resultados los siguientes:

- Una tabla con los valores de la distribución de la multiplicidad para la población en cada estado yrast.
- Una tabla de la intensidad total de cada modo de transición electromagnético.
- Una tabla con la alimentación que reciben los estados yrast proveniente de estados en el casi-continuo.
- Espectros discriminados según el modo de transición.
- Gráficas de la distribución de entrada en función de la multiplicidad, espín o energía.
- Usamos una modificación de Gamana que nos permite obtener los espectros energéticamente ordenados.

Información adicional sobre estos programas y los parámetros de entrada que han sido utilizados para esta simulación pueden ser consultados en [13].

#### 5.4.1. Resultados

En la figura 5.10 vemos la contribución de los modos E1, E2 y M1 al espectro energéticamente ordenado para la radiación primaria ( $N = 1$ ). Notamos que la radiación dipolar eléctrica es la dominante, ya que ella contribuye casi a la totalidad del espectro.

En la figura 5.11 mostramos el espectro obtenido con el programa Gamble (simulación) y el ajuste obtenido aplicando la estadística de orden (E.O.) con los coeficientes  $b_n$  dados por la ecuación 5.4. Podemos ver que el punto de corte a bajas energías y el máximo de la curva no corresponden con los dados por el histograma de la simulación. Los puntos mencionados se encuentran desplazados hacia la derecha, es decir corresponden a valores de la energía mayores. La pendiente a bajas energías es una buena aproximación.

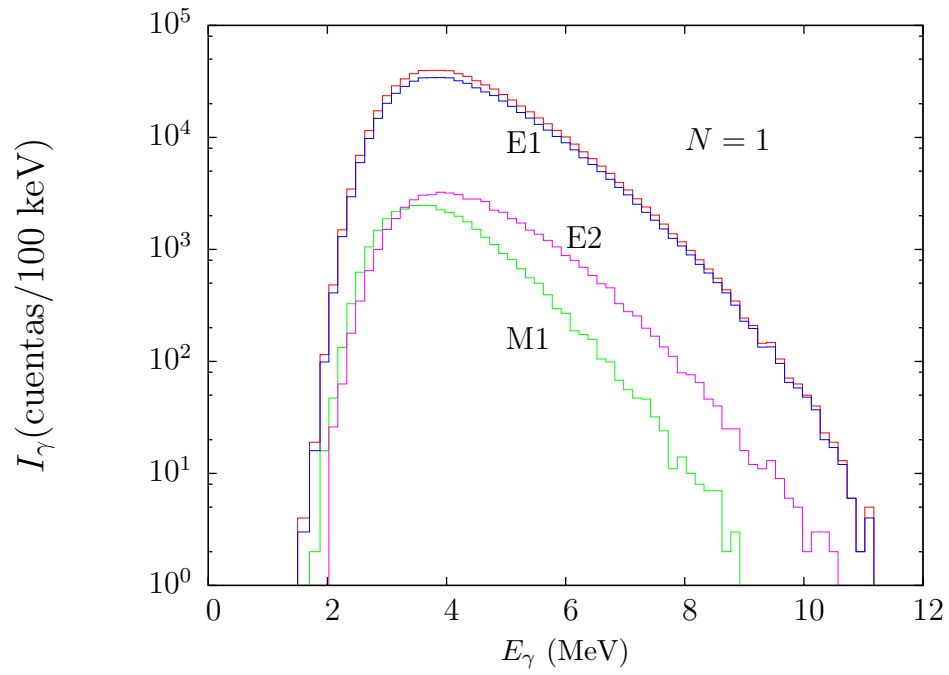


Figura 5.10: Contribución de diferentes modos de radiación al espectro energéticamente ordenado para la radiación primaria ( $N = 1$ ). Realizado con Gamble.

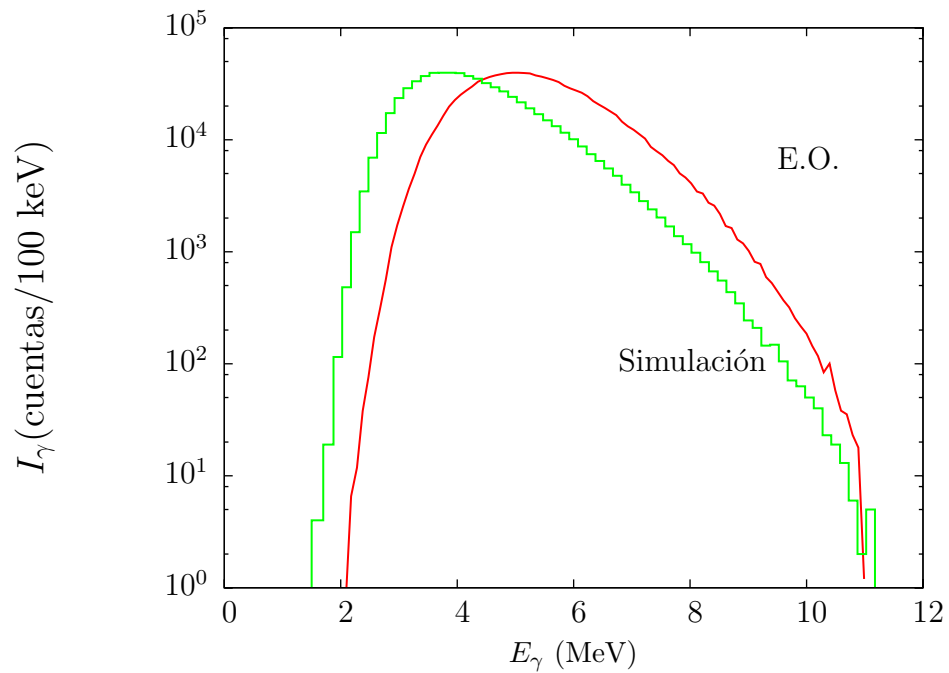


Figura 5.11: Ajuste del espectro generado por Gamble.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Aplicamos la estadística de orden al decaimiento gamma de un núcleo compuesto cuando su densidad de niveles es dada por el gas de Fermi y las fortalezas de emisión son descritas por la resonancia dipolar gigante. De manera general exploramos las limitaciones que deben ser consideradas para que ésta teoría matemática sea coherente con la fenomenología del continuo nuclear.

Estudiamos las posibilidades propuestas para describir los coeficientes  $b_n$  que no son dados por la teoría y que son incluidos para suplir las limitaciones antes mencionadas.

Mostramos que cuando los coeficientes  $b_n$  son descritos por una distribución gaussiana no es lo suficientemente apropiada para el gas de Fermi y la resonancia dipolar gigante, aunque esta misma aproximación es válida para la descripción más sencilla que corresponde a la ley clásica del dipolo y el modelo de temperatura constante.

Exploramos la posibilidad de hallar numéricamente los coeficientes  $b_n$  pero encontramos que los resultados encontrados por este método son similares a formulaciones mucho más sencillas.

Finalmente encontramos que los coeficientes  $b_n$  son una función de la energía. Aunque se tenía una idea intuitiva de esta relación no se había considerado a fondo un mecanismo eficaz para aplicar esta dependencia. Partiendo de esta relación propusimos un nuevo método para calcular tales coeficientes. La ecuación 5.4 sintetiza este procedimiento.

Aplicamos la relación de los coeficientes  $b_n$  sugerida en este trabajo a los espectros generados por la simulación simple realizada con el programa Decae. Encontramos un buen acuerdo entre el espectro simulado y el formulado por la estadística de orden, coincidiendo los puntos de corte en altas y bajas energías, aunque el máximo este desplazado hacia la derecha.

Cuando el método propuesto fué aplicado a la simulación avanzada (programa Gamble), encontramos una buena descripción para estos espectros, sin embargo hay un corrimiento en los valores de la energía que no es justificado aún.

# Bibliografía

- [1] S. Shlomo y M. Kolomietz, *Rep. Prog. Phys.* **68**, 1, (2005).
- [2] B. Arnold, N. Balakrishnan, H.N. Nagaraja, *A First Course in Order Statistics*, John Wiley and Sons, Inc, (1992).
- [3] F. Cristancho, *Heavy Ion Physics* **2**, 299, (1995).
- [4] J. Cardona , F. Cristancho, *Heavy Ion Physics* **7**, 305 (1998).
- [5] F. Cristancho, J.P. Urrego, *Heavy Ion Physics* **16**, 75, (2002).
- [6] H. Ejiri and M.J.A. de Voigt, *Gamma-ray and Electron Spectroscopy in Nuclear Physics.*, Clarendon Press, Oxford, (1989).
- [7] E. Gadioli y P.E. Hodgson, *Pre-Equilibrium Nuclear Reactions.*, Clarendon Press, Oxford, (1992).
- [8] J.M. Blatt y V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics.*, Dover Publications Inc., (1979).
- [9] P.E. Hodgson, E. Gadioli y E. Gadioli Erba, *Introductory Nuclear Physics.*, Clarendon Press-Oxford, (1997).
- [10] P. Fröbrichand, R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions.*, Oxford Science Publications, (1996).
- [11] G.A. Leander. *Statistical E1 and M1 gamma strenght functions from heavy-ion,  $xn\gamma$  data.*, *Phys Rev.C.* **38**, 728, (1988).
- [12] J. Cardona, *Aplicación de los Estadísticos de Orden al Análisis de Espectros Energéticamente Ordenados.*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, (1997).
- [13] J. Urrego, *Análisis del Continuo Nuclear Mediante el Uso de Espectros Energéticamente Ordenados.*, Trabajo de Grado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, (2001).
- [14] S. Mukherjee y Y. Waghmare, *Physics of Rotating Nuclei.*, John Wiley and Sons, (1995).

- [15] G.C. Baldwin, G.S. Klaiber, Phys. Rev. **71**, 3, (1947).
- [16] G.C. Baldwin, G.S. Klaiber, Phys. Rev. **73**, 1156, (1948).
- [17] H. Morigana and T. Yamazaky, *In-Beam Gamma-ray Spectroscopy*, North-Holland publishing company, (1976).
- [18] M. Goldhaber, E Teller, Phys. Rev. **74**, 1046, (1948).
- [19] H. Steinwedel, J.H.D. Jensen, Z. Naturforsch, A. **5**, 431, (1950).
- [20] D. Santonocito y Y. Blumeneld, Eur. Phys. J. A. **30**, 183-202, (2006).
- [21] C. Baktash, M.L. Halbert, D.C. Hensley, B.R. Johnson, I.Y. Lee, J.W. McConnell and F.K. McGowan, Nucl. Phys. A. 520:555c, (1990).
- [22] F. Cristancho, comunicación privada.
- [23] J.J. Sandoval, F. Cristancho, AIP Conf. Proc. **947**, 487-488, (2007).
- [24] J.J. Sandoval, F. Cristancho, *VII Latin American Symposium on Nuclear Physics and Applications*, Cusco-Perú, (2007).
- [25] G.A. Leander, Comp. Phys. Comm. **38**, 311, (1987).