

Caracterización de la radiación gamma monoenergética

K. V. Díaz. H*

Grupo de Física Nuclear, *Departamento de Física*

Director: Fernando Cristancho

Universidad Nacional de Colombia

Bogotá

22/06/2015

1. Introducción

Un arreglo experimental en " V " fuente (de radiación gamma) – muestra (láminas metálicas) – detector (de radiación gamma) es empleado en la técnica de retrodispersión γ . Esta técnica es particularmente importante cuando solo es posible acceder a un solo lado de la muestra, por ejemplo el suelo. Investigaciones sobre esta técnica ya se han realizado como lo es el trabajo de [Singh et al.](2006), en el cual estudiaron el efecto del tamaño del colimador del detector y la energía de la radiación incidente en el espesor de saturación de la radiación de dispersión múltiple (*MS: multiple scattering*) de varias muestras. Junto con lo anterior [Arvind et al.](2009) se apoyaron de simulaciones Monte Carlo. Por su parte [Kiran et al.](2014) analizaron la dependencia del espesor de saturación de la radiación *MS* con la energía. [Singh et al.](2007) estudiaron la dependencia del espesor de saturación con el ángulo de dispersión de la muestra. En estos trabajos se ha explorado la relación de algún parámetro geométrico del montaje con la cantidad de radiación retrodispersada registrada por el detector. A su vez, trabajos de maestría se han realizado en los cuales se estudian los procesos de retrodispersión en el suelo [Cortés](2011) y el láminas metálicas [González](2011).

En el presente trabajo se pretende continuar con estos estudios en particular con la relación entre el tamaño del colimador y la radiación una sola vez dispersada (*SS: single scattering*) empleando una fuente de ^{22}Na . También se investigará la relación entre la intensidad de *SS* y el tiempo de adquisición.

2. Marco Conceptual

2.1. Interacción radiación-materia

Cuando la radiación gamma interactúa con un medio puede ocurrir dispersión elástica, inelástica o absorción completa de la radiación incidente. En el rango de energía entre 10 keV y 10 MeV ocurren principalmente tres procesos: efecto fotoeléctrico, dispersión Compton y producción de pares. En general, cada uno de los procesos significativos resultan en la transferencia de energía a los electrones del medio. Encontraremos procesos en los cuales hay absorción y atenuación representados en los coeficientes de absorción y atenuación. Este último está referido a la reducción de la intensidad a cierta energía por parte de un medio. El coeficiente de absorción hace referencia a la cantidad de energía que retiene el absorbedor cuando la radiación pasa a través de él.

*kvdiazh@unal.edu.co

La radiación gamma también puede interactuar por dispersión coherente o de Rayleigh y por reacciones fotonucleares. El primero está relacionado con la reemisión de un rayo gamma después de haberla absorbido, por lo tanto ninguna energía es transferida al detector y no genera alguna señal en este. La sección eficaz de las reacciones fotonucleares no es considerable para radiación de menos de 5 MeV [Gilmore, p. 26].

2.1.1. Absorción fotoeléctrica

La radiación γ no interacciona con electrones libres sino con electrones ligados a un átomo (por conservación del momento). El fotón es absorbido y el electrón sale eyectado del átomo con una energía que es la diferencia entre la energía de la radiación incidente y la energía de enlace del electrón ligado al átomo. El átomo queda con un exceso de energía igual a la energía de enlace del electrón. Para desexcitarse, el átomo puede redistribuir el exceso de energía entre los electrones del átomo resultando en una cascada de electrones Auger o bien puede llenar la vacancia dejada por el electrón con un electrón de una capa superior, dando como resultado una transición donde son emitidos rayos X característicos o fluorescentes.

La probabilidad de que un fotón sufra absorción fotoeléctrica se expresa como la sección eficaz σ_{ph} . Se incrementa con el incremento del número atómico Z del medio y con la disminución de la energía de la radiación incidente, esto se aproxima como

$$\sigma_{ph} \propto \frac{Z^n}{E_\gamma^m}, \quad (1)$$

siendo n y m exponentes que están entre 3 y 5, dependiendo de la energía de la radiación [Gilmore, p. 27]. El coeficiente de atenuación fotoeléctrica depende de su sección eficaz como

$$\mu_{ph} = \frac{\rho N_A}{A} \sigma_{ph}, \quad (2)$$

siendo ρ la densidad volumétrica del medio, A su masa atómica y N_A el número de Avogadro.

2.1.2. Producción de pares

En este proceso interacciona la radiación gamma con el átomo como un todo dentro del campo de Coulomb del núcleo dando como resultado la conversión de un rayo gamma en un par electrón-positrón. El rayo gamma debe tener una energía de al menos 2 veces la energía del electrón en reposo. Cuando la energía del positrón se reduce, encuentra un electrón y se aniquilan dejando dos fotones de 511 keV que se mueven en direcciones opuestas por conservación del momento. Entonces la energía total absorbida dentro del detector es $E_e = E_\gamma$.

La sección eficaz de producción de pares se aproxima como

$$\sigma_{pp} \propto Z^2 f(E_\gamma, Z), \quad (3)$$

siendo $f(E_\gamma, Z)$ una función que depende del número atómico del medio y de la energía de la radiación incidente. El coeficiente de atenuación es

$$\mu_{ph} = \frac{\rho N_A}{A} \sigma_{pp}. \quad (4)$$

2.1.3. Dispersión Compton

La dispersión Compton es una interacción directa de la radiación gamma con un electrón libre y estacionario del material. En este proceso el fotón cede parte de su energía y el electrón es eyectado con la energía cinética $E_e = E_\gamma - E'_\gamma$. Por conservación de la energía y momento obtenemos

$$E_e = E_\gamma \left[1 - \frac{1}{1 + \epsilon(1 - \cos \vartheta)} \right], \quad (5)$$

siendo ϑ el ángulo entre la dirección del haz incidente y el haz dispersado y ϵ la razón entre la energía del fotón incidente y la masa en reposo del electrón. La máxima energía trasferida al electrón es cuando $\vartheta = \pi$, es decir, cuando el electrón se dispersa en la dirección opuesta a la dirección de incidencia del haz (retrodispersión). La energía cinética que adquiere el electrón está acotada al rango

$$0 \leq E_e \leq \frac{2E_\gamma\epsilon}{1+2\epsilon}. \quad (6)$$

De la misma manera la energía del rayo gamma dispersado es

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \epsilon(1 - \cos \vartheta)}. \quad (7)$$

Esta energía está acotada al rango

$$\frac{E_\gamma}{1+2\epsilon} \Big|_{\vartheta=\pi} \leq E_{\gamma'} \leq E_\gamma \Big|_{\vartheta=0}. \quad (8)$$

En la Figura 1 esta graficada la ecuación ec. (5). En la parte de retrodispersión ($\vartheta=180^\circ$), se observa una distribución redondeada donde debería terminar en punta. La razón de este comportamiento es que en realidad los electrones están debilmente ligados al átomo no completamente libres como se supuso para modelar la ec. (5). Esta distribución es en la mayor parte del rango plana con un borde agudo donde $E_e = E_{e,max}$ llamado *borde Compton*.

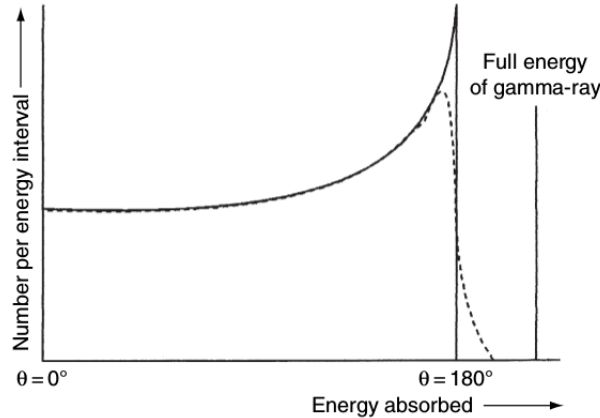


Figura 1: Proceso Compton en función del ángulo de dispersión del fotón [Gilmore, p.28].

La sección eficaz para la interacción entre un fotón y un electrón "libre" esta descrita por la sección eficaz diferencial de Klein-Nishina expresada como

$$\frac{d\sigma_{KN}}{d\Omega} = \frac{r_e}{2}(1 + \cos^2 \theta)F_{KN}, \quad (9)$$

siendo r_e es el radio clásico del electrón (2.82 fm) y F_{KN} ([Podgorsak, p. 200]) el factor de forma de Klein-Nishina con valor máximo de 1. El factor se forma esta se escribe como

$$F_{KN} = \frac{1}{[1 + \epsilon(1 - \cos \theta)]^2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon^2(1 - \cos \theta)^2}{[1 + \epsilon(1 - \cos \theta)](1 + \cos^2 \theta)} \right\}. \quad (10)$$

Una representación polar de la sección eficaz de Klein-Nishina la encontramos en la Figura 2. Se observa que para valores de ϵ bajos, la probabilidad de dispersión hacia adelante es similar a la probabilidad de sufrir una retrodispersión. Cuando la energía se incrementa la probabilidad de sufrir retrodispersión decrece manteniéndose en el mismo valor la probabilidad de dispersión hacia adelante.

El coeficiente de atenuación del proceso de dispersión Compton vendrá dado como

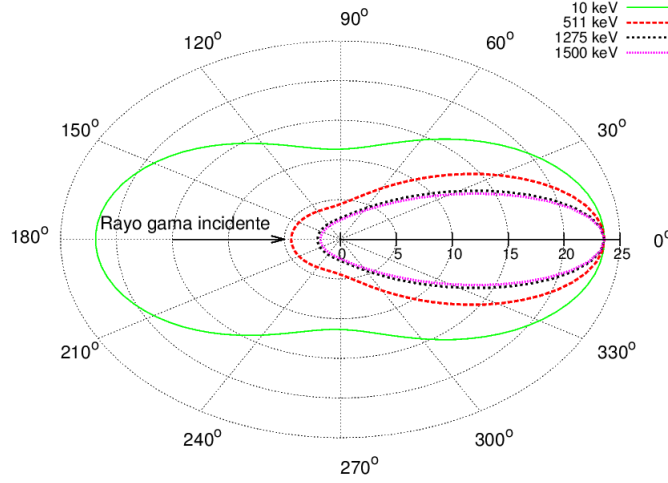


Figura 2: Representación polar de la dependencia angular de la sección eficaz de Klein-Nishina en la dispersión Compton

$$\mu_{CS} = \frac{N_A \rho}{A} \sigma_{CS}. \quad (11)$$

2.1.4. Dispersión de Rayleigh

En la dispersión de Rayleigh los fotones son dispersados por electrones ligados al átomo. El átomo como un todo absorbe el momento transferido resultando una muy baja energía de retroceso. Como consecuencia, el fotón dispersado en cierto ángulo tiene una energía final similar a la original. Los ángulos de dispersión son pequeños porque el átomo no es excitado ni ionizado.

2.1.5. Coeficiente de atenuación total

El coeficiente de atenuación total es la suma de los coeficientes de atenuación de los procesos significativos. Una cantidad más útil es el *coeficiente de atenuación másico*, que es el cociente del coeficiente de atenuación lineal y la densidad volumétrica del material. Se expresa como

$$\mu_T = \frac{N_A \rho}{A} * (\sigma_{CS} + \sigma_{ph} + \sigma_{pp} + \sigma_R). \quad (12)$$

En la Figura 3 encontramos el coeficiente de atenuación másico de dos materiales como función de la energía. Se observa el rango de contribución de cada proceso y la contribución total.

2.2. Detección de la radiación

Los detectores de radiación son materiales sensibles a la radiación de determinado rango de energía. En general, la señal de salida es un pulso de corriente. Dado que la forma de la señal no varía considerablemente de un evento a otro, la integral en el tiempo (que refleja cantidad de ionización producida) del pulso es proporcional a su altura. La señal de salida debe ser procesada electrónicamente para extraer información de ella. El detector más esta electrónica constituye el sistema de detección.

2.2.1. Características de los sistemas de detección

Resolución: cuando un rayo gamma es detectado, debido a que su energía es bien definida se esperaría idealmente observar una distribución delta con altura finita. Sin embargo, lo observado son distribuciones anchas generalmente gaussianas. La *resolución* es la capacidad que tiene el sistema de detección de distinguir dos rayos con energías muy cercanas. Se expresa en términos del ancho a la mitad de la altura FWHM (full width half maximum) como

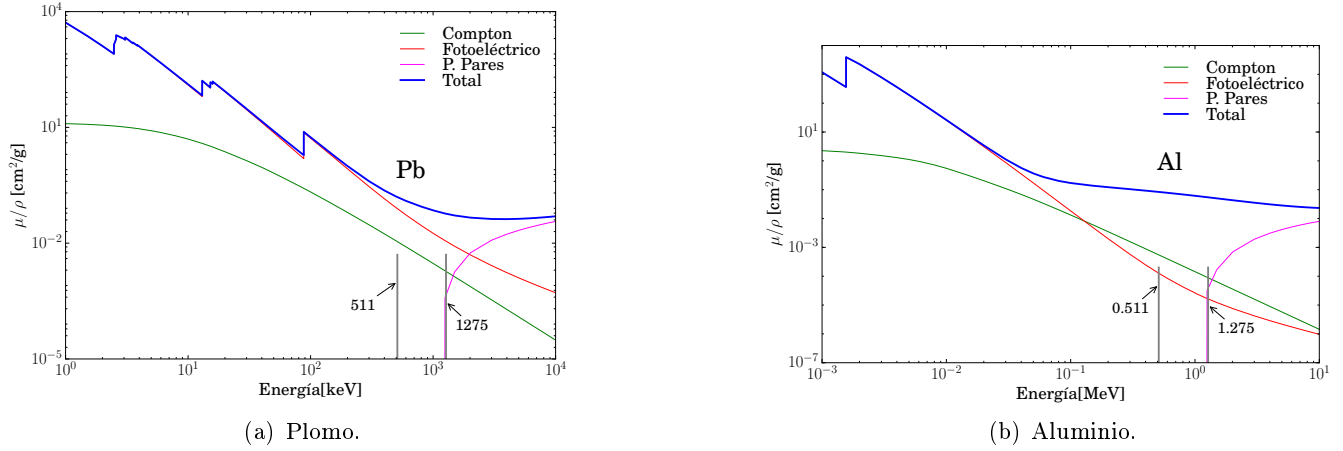


Figura 3: Coeficiente másico de atenuación dependiente de la energía de los materiales diferentes [NIST].

$$R = \frac{FWHM}{E} = \frac{\Delta E}{E}. \quad (13)$$

Tiempo de respuesta: Es el tiempo que tarda la radiación que llega al detector en convertirse en una señal útil. Depende del tamaño del detector, del proceso de recolección de cargas y del circuito electrónico usado para hacer la recolección.

Eficiencia: dos tipos de eficiencia se suele emplear para caracterizar los sistemas de detección: la *eficiencia absoluta o total* y la *eficiencia intrínseca*. La primera se define como el cociente entre el número de eventos registrados por el detector y los emitidos por la fuente, expresándose como

$$\epsilon_{tot} = \frac{\text{eventos registrados}}{\text{eventos emitidos por la fuente}}. \quad (14)$$

Esta eficiencia depende de la geometría del detector y la probabilidad de que interaccione en el volumen sensible del detector.

La eficiencia intrínseca es el cociente entre el número de eventos registrados y aquellos que inciden sobre el detector, se expresa como

$$\epsilon_{int}(E_\gamma) = \frac{I(E_\gamma)}{A(Z, N; t)b(E_\gamma)\Delta t\Delta\Omega/4\pi}. \quad (15)$$

Para una fuente puntual la eficiencia total se escribe en términos de la eficiencia intrínseca como

$$\epsilon_{tot}(E_\gamma) = \epsilon_{int} \frac{\Delta\Omega}{4\pi}. \quad (16)$$

2.2.2. Detectores de centelleo

Los detectores centelleadores son típicamente haluros alcalinos. Cuando hay interacción entre estos detectores y la radiación, los electrones del material son excitados y al relajarse emiten fotones (centelleo). Estos centelleos son convertidos a pulsos eléctricos gracias al acople del cristal a un fotomultiplicador que contiene un fotocátodo y un conjunto de dínodos (electrodo) y un ánodo, que colecta y multiplica los electrones producidos en el fotocátodo. Este proceso se ilustra en la Figura 4. La señal final es proporcional a la energía que pierde la radiación que interacciona en el detector.

Las ventajas de estos detectores es que tienen un tiempo de respuesta y una eficiencia relativamente alta respecto a otro detectores, aunque su resolución es baja.

2.2.3. Electrónica asociada

Las señales recibidas del fotomultiplicador en un detector de centelleo son inicialmente amplificadas por un preamplificador y posteriormente por un amplificador. En cada etapa de amplificación la señal toma una forma conveniente para el siguiente componente electrónico. La altura de los pulsos obtenidos en la segunda etapa de amplificación esta entre 0 y 10 V.

Una vez el pulso es amplificado y modificado es enviado al conversor análogo digital ADC. Este componente convierte la amplitud del pulso que es análogica en un valor digital. Luego, estos números son guardados en el analizador multicanal MCA en una memoria multicanal. El contenido de cada canal es mostrado en una pantalla de computador a través de un software. La Figura 4 resume el recorrido de la señal.

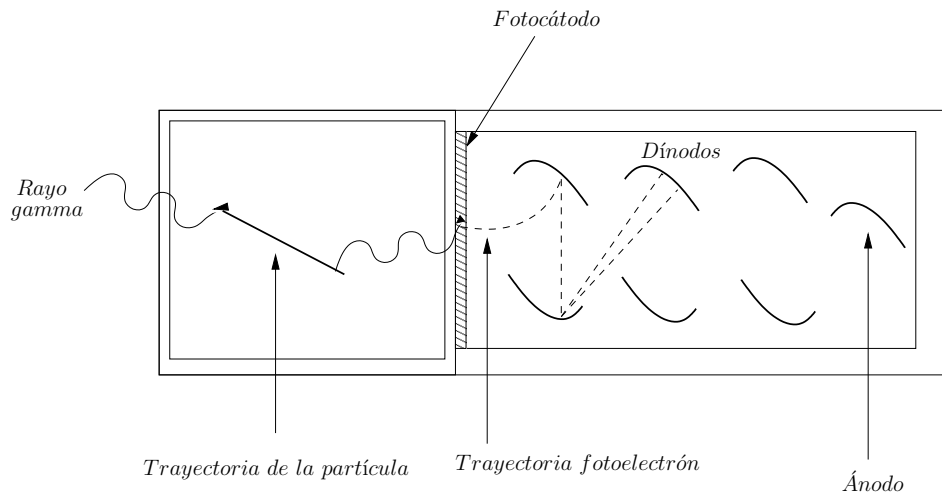


Figura 4: Diagrama de un detector centellador compuesto de un cristal ópticamente acoplado a un tubo fotomultiplicador.

3. Estudio de los parámetros geométricos

Área del haz colimado sobre la muestra

La Figura 5a es la vista de un corte lateral de un cono que es atravesado por un plano (línea azul). Esto corresponde a un esquema fuente (punto A)-muestra (línea azul) donde la radiación ha sido colimada y su región de acción es el cono circular de apertura 2α limitado por las líneas verdes. La línea AE es la línea central del cono. El ángulo θ es la inclinación del colimador respecto a la posición de la muestra y la altura h es la distancia perpendicular entre la muestra y la fuente. Las líneas punteadas son construcciones auxiliares.

La Figura 5b es la vista superior del cono de radiación desde un ángulo de depresión θ y su proyección sobre la muestra. La elipse sobre la muestra ha sido rodada un ángulo θ para que quede en el mismo plano de la proyección circular del cono.

A partir de estas construcciones el eje mayor de la elipse se expresa como

$$a = \frac{h \sin 2\alpha}{2(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)}. \quad (17)$$

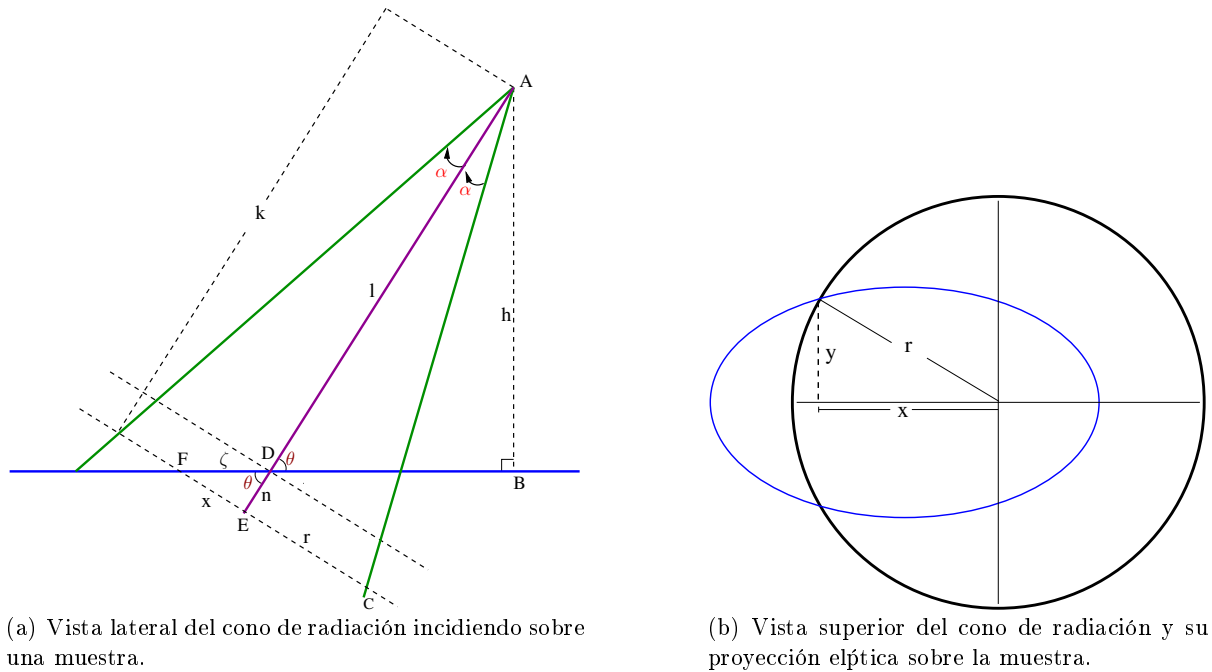


Figura 5: Esquema de la fuente (punto A) colimada y la muestra (línea FB).

y el eje menor es

$$b = \frac{h \sin \alpha}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{1/2}}. \quad (18)$$

La demostración de estas expresiones se muestra en el apéndice A.

El área de la elipse esta dada por

$$A = \pi ab = \frac{\pi h^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{3/2}}, \quad (19)$$

despejando h tenemos

$$h = \left[\frac{ab(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{3/2}}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \right]^{1/2} \quad 0 \leq \alpha \leq \theta \leq \pi/2. \quad (20)$$

3.1. Ángulo ϕ : posicionamiento del detector

En la *Fig.(6)*, encontramos el esquema del experimento sin el dectector. Al interior del colimador de Pb (sólido en U) encontramos el punto B que hace de fuente de radiación gamma que incide sobre la muestra (línea azul) principalmente en la región limitada por los rayos verdes. Obtendremos el ángulo ϕ como función de los parámetros geométricos conocidos (en rojo). Este ángulo nos permitirá determinar la región en la que debe ser ubicado el detector de tal manera que todo el volumen del detector no debe sobrepasar el semiespacio determinado por la línea que pasa por el segmento \overline{FE} .

Definiremos las siguientes distancias $\overline{BK} \equiv L$, $\overline{YH} \equiv n$, $\overline{KY} \equiv m$, $\overline{MC} \equiv q$, $\overline{RV} \equiv f$, $\overline{ER} \equiv r$, $\overline{KC} \equiv R$, $\overline{CE} \equiv \xi_1$, $\overline{SA} \equiv \xi_2$, $\overline{BG} \equiv h$, $\overline{FG} \equiv a$, $\overline{FV} \equiv d$, $\overline{LK} \equiv p$, $\overline{AT} \equiv h_e$, $\overline{BM} \equiv h_1$, $\overline{CJ} \equiv h_2$, $\overline{BC} \equiv b$ y $\overline{CR} \equiv e$.

Con ayuda de las construcciones auxiliares presentes en la *Figura 6* obtenemos la expresión para obtener el ángulo ϕ , que es

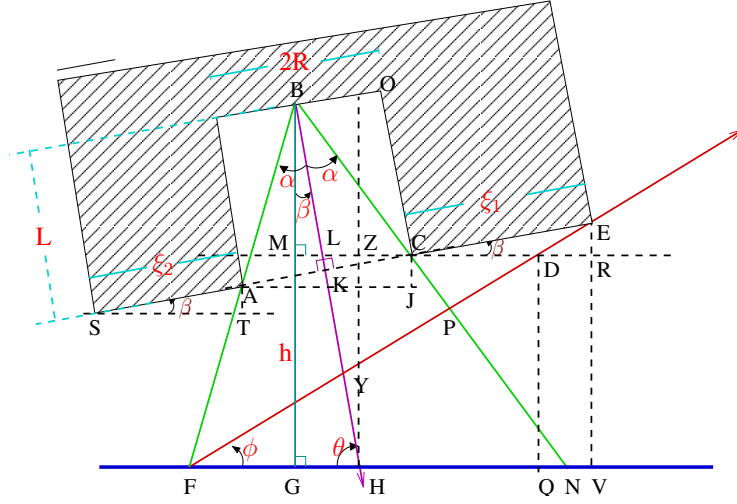


Figura 6: Parámetros geométricos conocidos (en rojo) del arreglo colimador (sólido en U)-fuente (punto B)-muestra (línea azul).

$$\tan \phi = \frac{\xi_1 \sin \beta + \sin \theta * (\frac{h}{\cos \beta} - L + R \tan \beta)}{h \tan(\alpha - \beta) + \frac{L}{\cos \alpha} \sin(\alpha + \beta) + \xi_1 \cos \beta}. \quad (21)$$

A su vez, de la misma figura las expresión para determinar las distancias d y R son

$$d = h \tan(\alpha - \beta) + \frac{L}{\cos \alpha} \sin(\alpha + \beta) + \xi_1 \cos \beta \quad (22)$$

y

$$R = L \tan \alpha. \quad (23)$$

Estas expresiones se han obtenido del desarrollo geométrico mostrado en el apéndice B.

3.2. Ángulos ϑ_{max} y ϑ_{min}

En la Figura 7 encontramos un esquema del montaje incluyendo el detector. Se han esquematizado dos casos, el caso A (Figura 7a) se presenta cuando los rayos límite (verdes) pasan por los puntos R y Z del cristal del detector. En el caso B (Figura 7b) estos rayos pasan por los puntos D y G.

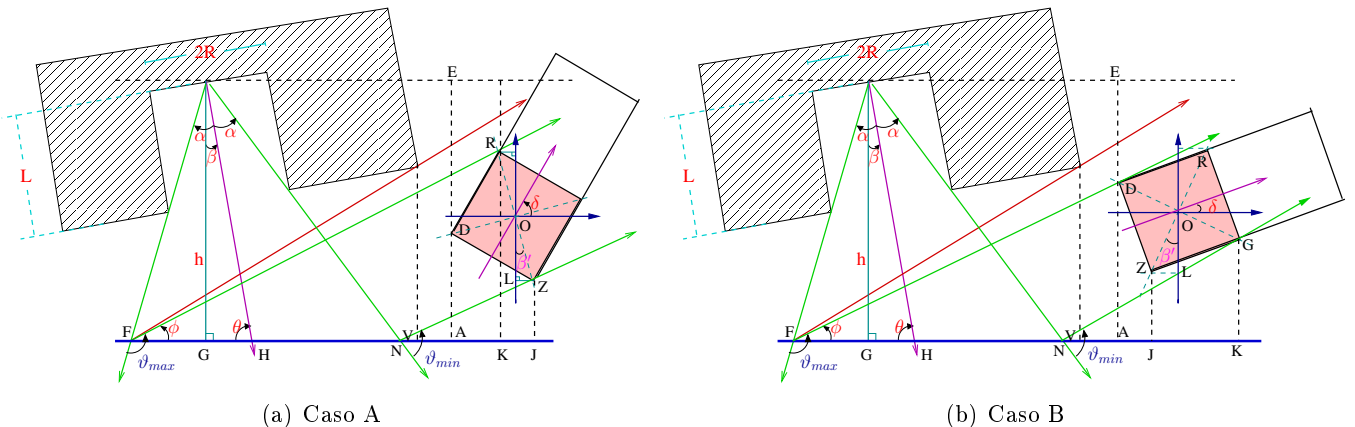


Figura 7: Esquema de la fuente colimada, muestra (línea FB) y detector para dos configuraciones angulares del detector.

El detector presenta una geometría cilíndrica en cuyo interior se encuentra un cristal también cilíndrico, como volumen sensible, con una arista de igual longitud a su diámetro. El detector ha sido rotado un ángulo δ respecto de la horizontal paralela a la dirección de descanso de las placas. Los rayos verdes indican las direcciones extremas de la región de radiación colimada que incide sobre las láminas y que llega al detector. Estas direcciones permiten definir los ángulos límite, ϑ_{max} y ϑ_{min} , para los cuales hay dispersión simple. Los demás parámetros se ilustraron en la sección 3.1. Comenzaremos definiendo los segmentos $\overline{DR} = l_d$, $\overline{ZJ} = h_d$, $\overline{ED} = h_u$, $\overline{VJ} = h_s$, $\overline{LO} = l_e$, $\overline{FV} = d$; y los ángulos: $\angle DFG \equiv \gamma_1$ y $\angle JNG \equiv \gamma_2$. De la Figura 7b (se aplica a ambos casos), obtenemos

$$\vartheta_{max} = \gamma_1 + \frac{\pi}{2} + \alpha \quad (24)$$

y

$$\vartheta_{min} = \gamma_2 + \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta). \quad (25)$$

De acuerdo a los desarrollos geométricos mostrados en el apéndice C, se obtiene para el caso B

$$\tan \gamma_1 = \frac{l_d \cos \delta + h_d}{d + (h_s - l_d \sin \delta)} \quad (26)$$

y

$$\tan \gamma_2 = \frac{h_d + l_d \sin \delta}{\overline{NV} + h_s + l_d \cos \delta} = \frac{h_d + l_d \sin \delta}{d - 2a + h_s + l_d \cos \delta}. \quad (27)$$

3.3. Evaluación de los parámetros geométricos

La intensidad que incide sobre las muestras de radiación colimada esta dada por

$$I_o = A * \frac{\Omega}{4\pi}, \quad (28)$$

siendo A la actividad de la fuente y Ω el ángulo sólido desde el punto B subtendido por el cono de amplitud 2α (ver Figura 7). El ángulo sólido de un cono de amplitud 2α esta dado por la expresión

$$\Omega = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha). \quad (29)$$

La actividad requerida para un $\alpha_1=14.7^\circ$ y una intensidad $I_{SS}=55259$ cuentas de dispersión simple en 10 minutos fue de $A_1=2$ MBq. Asumiendo una relación lineal entre el número de cuentas obtenidas y el tiempo requerido en su adquisición, obtenemos

$$A_2 = \frac{10min \cdot A_1 \cdot (1 - \cos \alpha_1)}{t \cdot (1 - \cos \alpha_2)}, \quad (30)$$

siendo A_2 la actividad requerida para obtener en el tiempo t un número de cuentas I_{SS} con un ángulo de apertura α_2 .

En la Figura 8a se ha graficado la superficie dada por la ec. (60). Para ángulos α pequeños y valores θ cercanos a 90° obtenemos los valores más grandes de la altura.

En la Figura 8b se han tomado secciones de la superficie de la Figura 8a a α constantes, obteniéndose los valores más altos de h para $\theta=90^\circ$.

En la Tabla 1 se han obtenido algunos valores típicos de los parámetros geométricos. Con el α dado se obtiene R asumiendo un valor de L y empleando la ec. (78). Una vez establecidos los valores de α y θ se ha obtenido h empleando la ec. (60), tal que $h_{min} \leq h$ usando la ec. (77) y los valores ya definidos de α , θ , R , L y el espesor ξ_2 . Dando un valor al espesor ξ_1 y usando los parámetros ya especificados obtenemos ϕ de la ec. (72) y d de la ec. (70). Por último, la actividad requerida se halla con la ec. (30), asumiendo un tiempo de adquisición $t= 10$

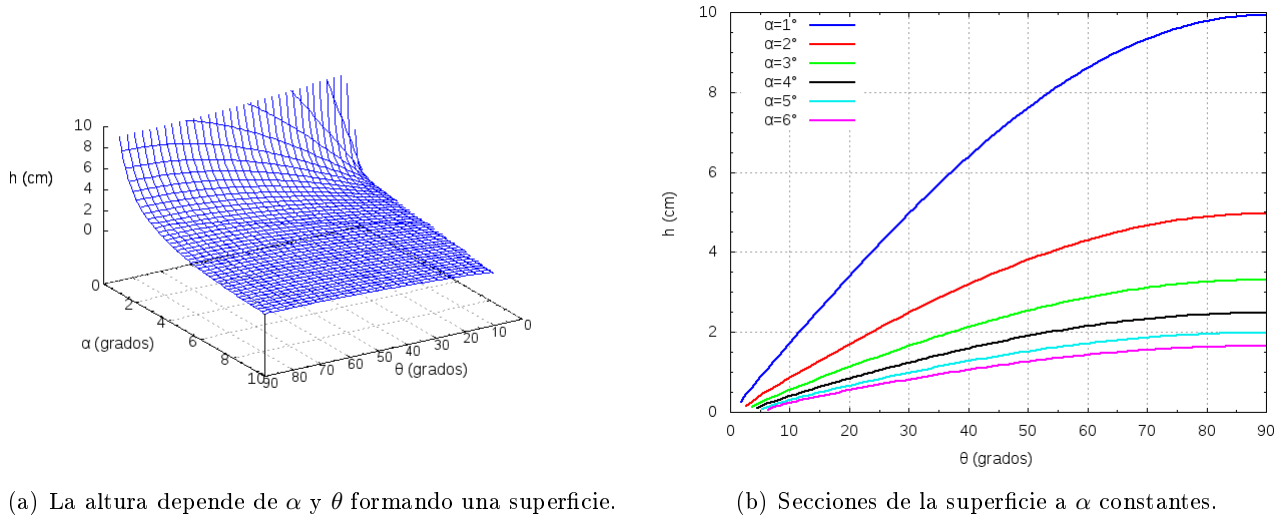


Figura 8: Distancia h fuente-muestra para distintos valores del ángulo de apertura del colimador α y su inclinación θ .

minutos y el α como α_2 .

Tabla 1: Parámetros geométricos del arreglo fuente-colimador-muestra para distintas áreas de radiación colimada con $\theta = 60^\circ$, tiempo de adquisición $t=10$ minutos y espesor $\xi_1 = 4.6$ cm.

A (cm ²)	α (°)	h (cm)	h_{min}	A (MBq)	R (cm)	L (cm)	ϕ (°)	ξ_2 (cm)	d (cm)
0.1	3	2.9	2.8	47.8	0.13	2.5	68.5	1.2	3.9
1	3	9.3	7.3	47.8	0.3	6	75.9	4	2.5
5	6	10.4	7.5	11.9	0.6	6	76.6	4	2.9
10	8	11	7.57	6.8	0.8	6	76.6	4	3.3

4. Experimento y resultados

En la Figura 9 se encuentra un esquema del montaje empleado. Placas de Al de dimensiones (33.3×20.4×1.0) cm son sostenidas por un soporte de hierro. Sobre la base del soporte descansa un bloque de plomo de dimensiones (9.8×9.9×4.8)cm con un canal de profundidad 0.7 cm que sirve para alojar la fuente radiactiva y extraerla del montaje con facilidad. Sobre la base de plomo se han dispuesto 12 bloques del mismo material de dimensiones (2×3×5) cm como colimador de la radiación de la fuente alcanzando una altura de 6 cm. Se usó una fuente de ²²Na con una actividad de 1.019 MBq (01/02/2014) y un detector centellador cilíndrico de (5.1×5.1) cm (dimensiones del cristal) de CsI a una inclinación $\delta = 0^\circ$. Las líneas azules de esta figura señalan los bordes de las láminas que están sobre un soporte encima del blindaje.

La radiación emitida por la fuente de ²²Na es colimada por el blindaje de plomo alcanzando las láminas metálicas de Al. Las energías de los rayos γ retrodispersados por las láminas son registradas por el detector y transformados en una señal de voltaje o corriente. Finalmente la señal es amplificada y llevada a un sistema de adquisición de datos. La configuración electrónica usada se presenta en la Tabla 2.

En la Figura 10 encontramos los espectros de algunas fuentes empleadas para la calibración. En la fuente de ⁶⁰Co (Figura 10a) se distinguen dos picos, uno a 1173 keV y el otro a 1332 keV producto del decaimiento β y desexcitación gamma del ⁶⁰Ni. En el ¹³⁷Cs (Figura 10b) se observa un pico a 662 keV debido al decaimiento β de esta fuente y la desexcitación gamma del ¹³⁷Ba. En el espectro de ²²Na (Figura 10c) hay un pico de 511 keV

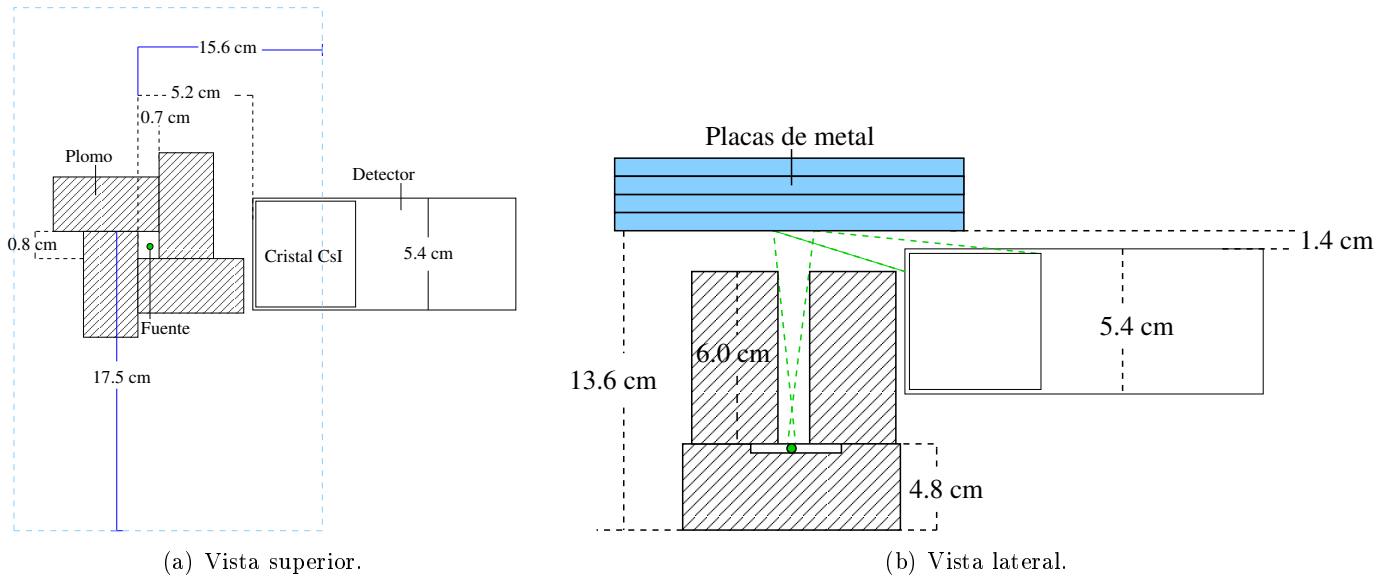


Figura 9: Montaje de retrodispersión- γ

originado por la aniquilación positrónica y uno a 1274 keV como consecuencia de desexcitación gamma del ^{22}Ne .

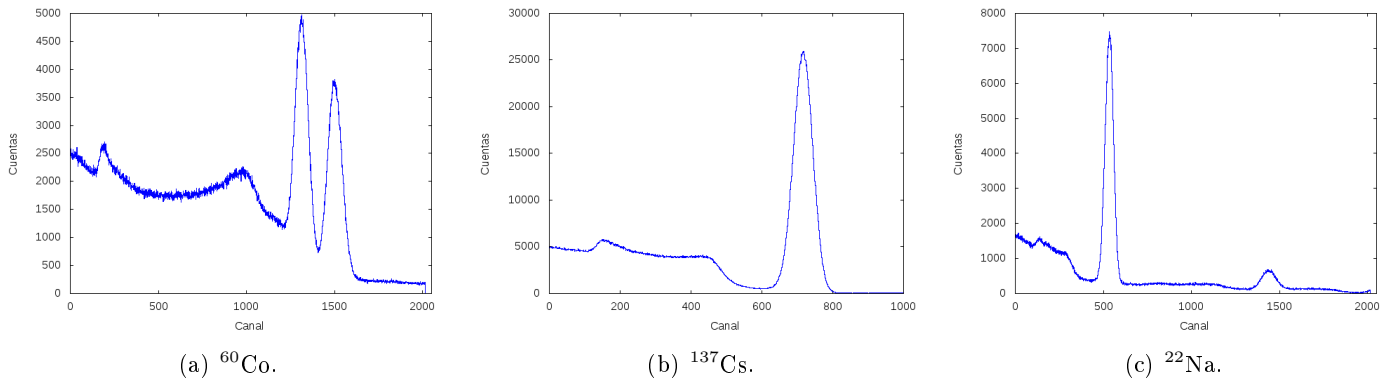


Figura 10: Espectros de algunas fuentes de calibración tomados durante 10 minutos.

Asociando la media de cada fotopico en canales a la energía, conocida de los esquemas de decaimiento de las fuentes, obtenemos la curva de calibración canal-energía. De esta manera los espectros con su abscisa en canales es transformada a energía.

En la primera parte del experimento se buscó encontrar la dependencia del número de cuentas SS con el tiempo. Para ello se tomaron espectros con 4 placas de Al y sin ellas (fondo) durante 30 minutos, 1 hora, 2 horas, 3 horas y 4 horas de tiempo vivo, con los parámetros electrónicos optimizados [Proyecto caracterización] y registrados en la Tabla 2. El colimador tenía una base rectangular de área $D_1=(0.8 \times 0.7) \text{ cm}^2$. En la segunda parte de la sesión, se tomaron espectros de 2 horas con su respectivo fondo variando el área del colimador. Estas áreas presentan las dimensiones: $D_2=(2.0 \times 0.6) \text{ cm}^2$ y $D_3=(1.7 \times 1.5) \text{ cm}^2$ y se mantuvo constante el número de placas a 4. Antes de tomar cada uno de estos espectros se realizó una calibración canal-energía registrando los espectros de las fuentes calibradas de ^{22}Na , ^{137}Cs , ^{109}Cd , ^{57}Co y ^{60}Co ubicadas sobre la cara lateral del detector sobre el lado inferior del cuadrado del cristal según la Figura 9, durante 5 minutos. Sus actividades se muestran en la Tabla 3.

También se hallaron calibraciones canal-energía usando los fotopicos de transmisión de 511 y 1274 keV de cada espectro de fondo y retrodispersión. Esta última calibración se empleó en los espectros (con 4 placas y sin ellas) para garantizar que estuvieran alineados y se llevaron a que tuvieran 1 bin de ancho 1 keV mediante una redistribución de las cuentas usando el método de Monte Carlo.

Tabla 2: Parámetros de los dispositivos electrónicos usados.

Dispositivo	Parámetro	Valor
Amplificador	Polaridad	+
	Ganancia	100
	Shaping time (μs)	2
Fuente	Voltaje (V)	802
ADC	Rango	2K

Tabla 3: Fuentes de radiación gamma empleadas. A_f es la actividad de las fuentes en la fecha del experimento y A_0 es la actividad de las fuentes en la fecha t_0 .

Fuente	$T_{1/2}$ (años)	A_0 (kBq)	t_0	A_f (kBq)
^{60}Co	5.2714	34.8	08/06/2006	10.7
^{137}Cs	30.07	35.1	18/05/2006	28.5
^{22}Na	2.6019	31.9	06/07/2006	3.0
^{22}Na	2.6019	1019	01/02/2014	724.7

Tabla 4: Parámetro geométricos para distintas áreas del diafragma D del colimador.

Parámetro	D_1	D_2	D_3
2R (± 0.1 cm)	0.7 y 0.8	0.6 y 1.9	1.5 y 1.7
h_s (± 0.1 cm)	1.2	0.2	1.2

El caso B es el adecuado para $\delta = 0^\circ$ (ver Figura 7). Por lo tanto las ecuaciones a usar son ec. (24), ec. (25), ec. (84) y ec. (27). Antes obtendremos d y $d - 2a$ para $\delta = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$ y $\theta = \pi/2$ con las ec. (22) y ec. (17). Así la expresión de d es

$$d = (h + L) \tan \alpha + \varepsilon_1 = (h + L) \frac{R}{L} + \varepsilon_1, \quad (31)$$

se ha empleado la ec. (23). El valor de $2a$ resulta

$$2a = 2h \tan \alpha = 2h \frac{R}{L}, \quad (32)$$

combinado la ec. (31) y la ec. (32), tenemos

$$d - 2a = \frac{R}{L}(L - h) + \varepsilon_1. \quad (33)$$

Ahora, la expresión de $\tan \gamma_1$ es

$$\tan \gamma_1 = \frac{l_d + h_d}{d + h_s} = \frac{l_d + h_d}{(h + L) \frac{R}{L} + \varepsilon_1 + h_s}. \quad (34)$$

Sin embargo, por la geometría usada $\gamma_1 = \phi$, que de acuerdo a la ec. (21) es

$$\tan \gamma_1 = \tan \phi = \frac{h - L}{\frac{R}{L}(h + L) + \varepsilon_1}. \quad (35)$$

La expresión de $\tan \gamma_2$ reemplazando la ec. (33) es

$$\tan \gamma_2 = \frac{h_d}{d - 2a + h_s + l_d} = \frac{h_d}{\frac{R}{L}(L - h) + \xi_1 + h_s + l_d}. \quad (36)$$

El ángulo γ_1 esta relacionada con el ángulo ϑ_{max} y el ángulo γ_1 con ϑ_{min} . Por lo tanto, usaremos el R más pequeño y el h de 0 placas, para obtener el valor más alto de γ_2 . Por su parte, para obtener el valor más alto de $\gamma_1 = \phi$ usaremos $h=13.1$ cm que es la altura desde la fuente a la placa 4 y el R menor.

Los resultados de los cálculos de ϑ_{min} y ϑ_{max} se registran en la Tabla 5 junto con la energía máxima y mínima obtenida de la ec. (7). Realizando el mismo procedimiento con la enegía de 1274 keV encontramos los rangos de energía de SS registrados por el detector para distintas áreas del colimador. Los demás no se modificaron y son: $h = 9.1$ cm, $L = 6.0$ cm, $l_d = 5.2$ cm, $h_d = 1.4$ cm y $\varepsilon_1 = 3.1$ cm.

Tabla 5: ϑ_{min} y ϑ_{max} junto con las energías máxima y mínima para distintas áreas del diafragma considerando SS de 511 keV y 1274 keV. En la izquierda encontramos el rango de energía empleando γ_1 en ϑ_{max} . En la derecha encontramos el rango de energía usando ϕ en ϑ_{max}

Áreas	$\vartheta_{min} - \vartheta_{max}$ (grados)	E_{511} (keV)	E_{1275} (keV)	$\vartheta_{min} - \vartheta_{max}$ (grados)	E_{511} (keV)	E_{1275} (keV)
D ₁	100-139	182-245	230-344	87.0-99.5	236-262	326-379
D ₂	102-146	182-252	227-358	87.5-102.2	231-262	317-376
D ₃	96-131	178-253	231-359	83.5-96.3	242-271	338-397

Tomaremos los rangos de energía más anchos ya que si bien el colimador restringe la cantidad de radiación que llega al extremo inferior del detector, parte de ella es transmitida a través del éste.

4.0.1. Dependencia de la fracción SS con el tiempo

En la Figura 11 encontramos los espectros tomados empleando 4 placas de Al y sus correspondientes fondos, durante un tiempo vivo variable y usando el área del colimador D_1 . Llamaremos a los espectros donde se han usado 4 placas, espectros de dispersión y donde se han usado 0 placas fondo. En esta gráfica podemos distinguir dos regiones: la de dispersión y la de transmisión (Figura 11b). En la región de dispersión se ha acotado la franja de SS con rectas verticales rojas debida a la radiación de 511 keV. Con dos rectas verticales verdes se ha acotado la franja de SS debida la radiación de 1274 keV. Ambas franjas se superponen. Si asumimos que la distribución de las SS con la energía es gaussiana [Singh et al.](2006), esta situación llevaría a hacer indistinguibles individualmente a simple vista la distribución SS de 511 y 1274 keV. En la región de dispersión también encontramos a una energía de alrededor 82 keV un pico intenso como consecuencia del proceso de fluorescencia del Pb, que es usado como blindaje.

El fotopico a energía más alta de 1200 keV en la Figura 11 corresponde al pico de 1274 keV del ^{22}Na y el pico con media alrededor de 511 keV corresponde a la radiación producto de la aniquilación positrónica; ambos atraviesan el blindaje de plomo y llegan al detector. Con un blindaje de 3 cm se transmite el 0.6 % de la radiación de 511 keV y un 14.3 % de la radiación de 1274 keV.

Es claro que el número de dispersiones aumentan con el tiempo de adquisición del espectro así como el fondo. Mas allá de alrededor de 400 keV, se esperaría que en esa región los espectros del fondo y los espectros de dispersión se superpusieran, pero se encuentran diferencias en todos ellos a excepción del espectro tomado durante

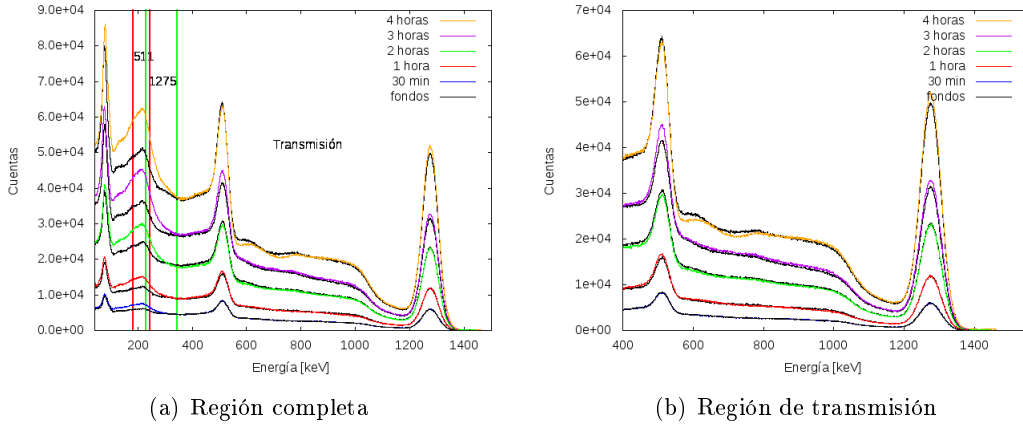


Figura 11: Espectros de dispersión y fondo de 4 láminas de Al medidos con distinto tiempo de adquisición

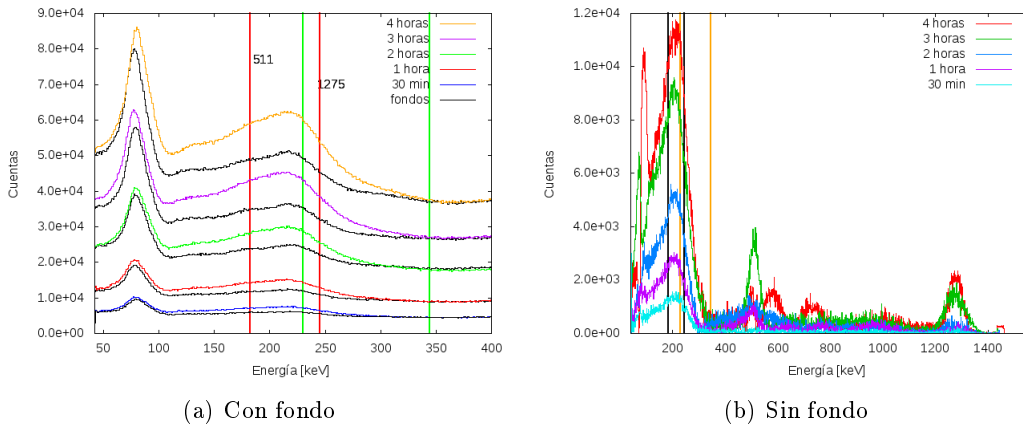


Figura 12: Espectros de dispersión de 4 placas de Al, con distintos tiempos de adquisición.

media hora (ver Figura 11b). Antes de la toma de los espectros de dispersión o de fondo, se hacen calibraciones canal-energía y las fuentes de calibración son adheridas al detector. Al efectuarse estas calibraciones, se mueve ligeramente (alrededor de 0.3 cm) variando su inclinación, debido a que no esta completamente fijo. En los espectros de dispersión y fondo tomados durante media hora, no se tomó una calibración para cada uno de ellos y por lo tanto el detector no se movió. Esta dificultad experimental es la razón por la cual se observan las diferencias entre los espectros de dispersión y fondo en la región de transmisión.

Tabla 6: Parámetros del ajuste lineal a los coeficientes SS hallados para radiación de 511 y 1274 keV.

Energía (keV)	$C_0 \times 10^{-5} \left(\frac{\text{hora}^{-1}}{\text{kBq}\cdot\text{sr}} \right)$	$C_1 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{\text{kBq}\cdot\text{sr}} \right)$
511	3.311(10)	-1.26(13)
1274	2.060(8)	-1.68(12)

Si restamos al espectro de dispersión el de fondo, obtenemos lo que se muestra en la Figura (12b). En la región de dispersión encontramos un pico debido a SS y MS . En la región de transmisión encontramos contribuciones producto la dificultad experimental no superada que ya se mencionó.

Todos los espectros se han modificado de tal manera que su bin es de 1 keV. Por lo tanto sumaremos las cuentas de dispersión simple producto de la radiación de 511 y 1274 keV dentro de los rangos especificados para D_1 en la Tabla 5. Esta suma la normalizaremos al valor más alto de la intensidad, la actividad de la fuente (724.7 kBq)

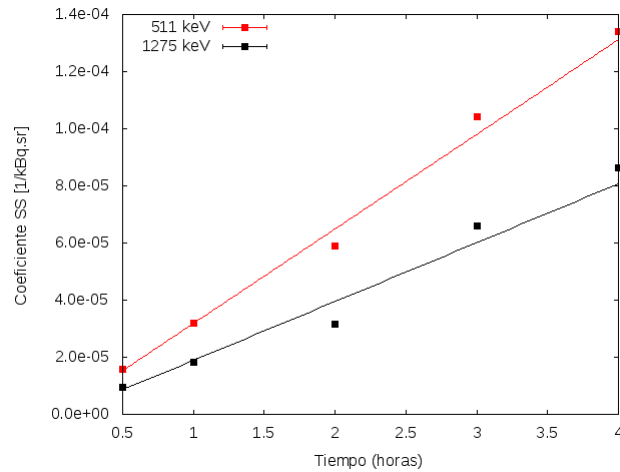


Figura 13: Coeficiente SS de los energías gamma como función del tiempo. Se ha mantenido constante el tamaño del diafragma a $D_1=0.56(11)$ cm^2 .

y el ángulo sólido (4π). A esta cantidad la llamaremos *coeficiente SS*. Al normalizar a un valor de cuentas se descarta la contribución de MS en la región SS . Los resultados de estos cálculos se muestran en la Figura 13. Se han ajustado funciones lineales del tipo $C_0t + C_1$ a los datos de la Figura 13. Los parámetros de ajuste se muestran en la Tabla 6. Estos parámetros son un factor de escala (la pendiente) que permiten obtener el tiempo requerido para registrar cierta cantidad de radiación que ha sufrido SS por unidad de kBq y ángulo sólido.

4.0.2. Dependencia de la fracción SS con el diafragma del colimador

Teniendo en cuenta la geometría del montaje, se determinaron los ángulos máximo y mínimo de dispersión de la radiación y con ellos las correspondientes energías del fotón dispersado empleando la ec. (7). En la Figura 14 se encuentra el rango en energía de SS de radiación de 511 y 1274 keV para distintos tamaños del diafragma (área transversal del colimador de base rectangular). Los parámetros que se mantuvieron constantes son $L=6.5$ cm, $l_d=5.2$ cm, $h_d=1.4$ cm, $h_s=1.2$ cm para D_1 y D_3 , y $h_s=0.2$ cm para D_2 . En esta figura se observa que para las tres áreas los rangos de energía de 511 y 1274 keV se superponen incluso para alturas h de 20 cm. Esto sugiere que para las geometrías de los montajes usados ninguna altura entre la fuente y las placas menor o igual a 20 cm, podría hacer distinguibles individualmente las distribuciones de dispersión simple de las radiaciones incidentes de 511 y 1274 keV.

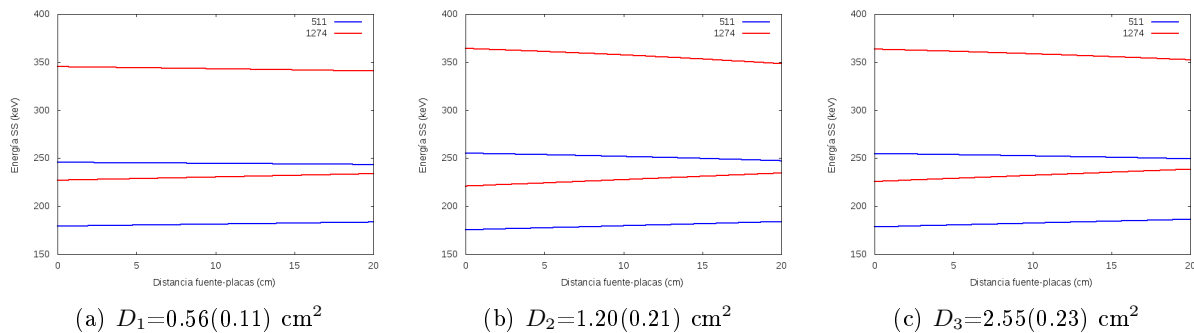


Figura 14: Rangos de energía de SS calculados variando la distancia h entre la fuente y las placas para distintas áreas del diafragma. Las líneas rojas y azules son los límites de energía de la SS cuando incide radiación de 1274 keV y 511 keV respectivamente.

En la Figura 15 se encuentran los rangos de energía de SS para distintos valores de la distancia entre el

blindaje y el detector h_s (ver Figura 7). De esta figura se observa que para los tres tamaños de diafragma se obtiene una distancia mínima blindaje-detector a partir de la cual los rangos de energía se comienzan a separar. Para el diafragma D_1 esta distancia mínima es alrededor de 4.7 cm, para el diafragma D_2 es de cerca de 10 cm y para el diafragma D_3 es de 8.3 cm. Se esperaría que entre mayor (su área) sea el diafragma la distancia mínima de separación de los 2 rangos de energía de SS sea mayor. Sin embargo, con D_2 y D_3 se encuentra el comportamiento contrario y esto se debe a que los cálculos de las energía SS límites se realizan tomando la dimensión más grande del diafragma que para D_2 era de 1.9 cm y para D_3 de 1.7, pese a que el área de D_2 sea menor que la de D_3 . Esto nos indica que si quiere minimizar la distancia blindaje-detector de tal manera que ambos rangos de energía no se superpongan, las dimensiones del diafragma deben ser lo más pequeñas posible conservando su área.

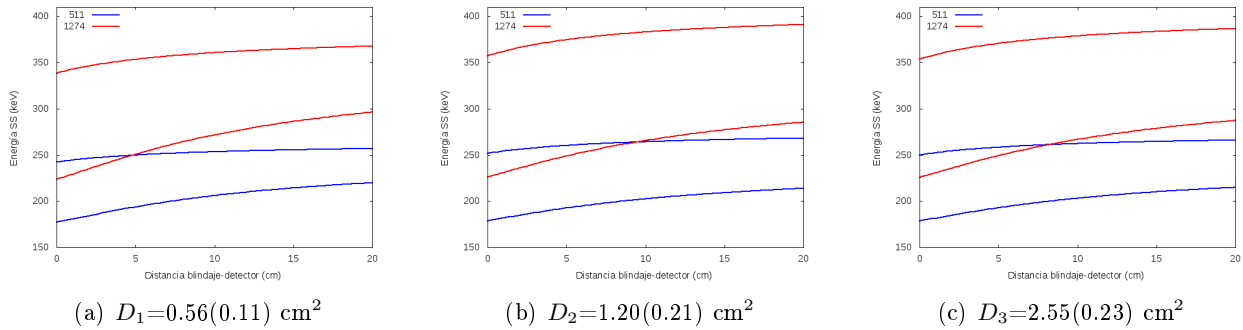


Figura 15: Rangos de energía de SS calculados variando la distancia h_s entre el detector y el blindaje para distintas áreas del diafragma. Las líneas rojas y azules son los límites de energía de la SS cuando incide radiación de 1274 keV y 511 keV respectivamente.

Se registraron espectros de dispersión variando el área del colimador, estos se muestran en la Figura 16. En esta figura también se distinguen las regiones de transmisión y dispersión. Entre la toma del espectro del fondo y del espectro de dispersión no se tomaron datos de calibración, razón por la cual no hay marcadas diferencias entre ellos en la región de transmisión. El espesor de los blindajes varió con cada área del colimador, ya que son bloques que se deben redistribuir, por este motivo los espectros de las distintas áreas no se superponen en la región de transmisión.

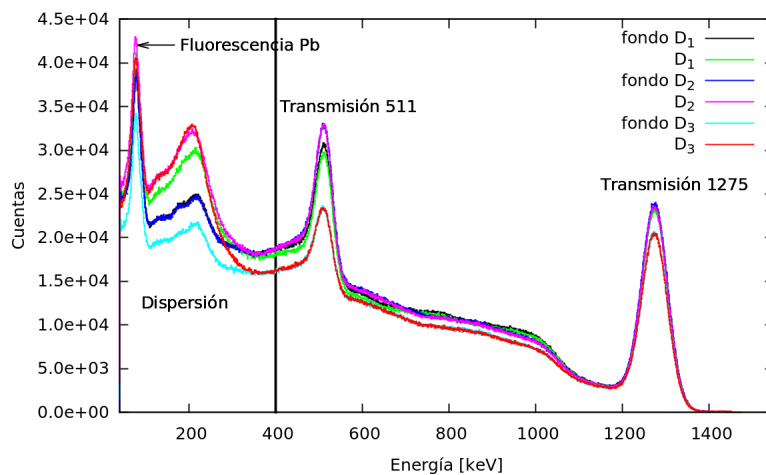


Figura 16: Espectros en la región de dispersión y transmisión de la radiación dispersada y enfocada con colimadores de áreas $D_1=0.56(11)$ cm², $D_2=1.20(21)$ cm² y $D_3=2.55(23)$ cm². Se ha mantenido constante el número de placas (4).

Aplicamos el mismo procedimiento de normalización de las intensidades usado con los espectros para distintos tiempos teniendo en cuenta los respectivos rangos de energía de la SS de cada área. En la Figura 17 encontramos los espectros de dispersión con y sin fondo. El incremento del área no contribuye a distinguir los picos SS de 511 y 1274 keV.

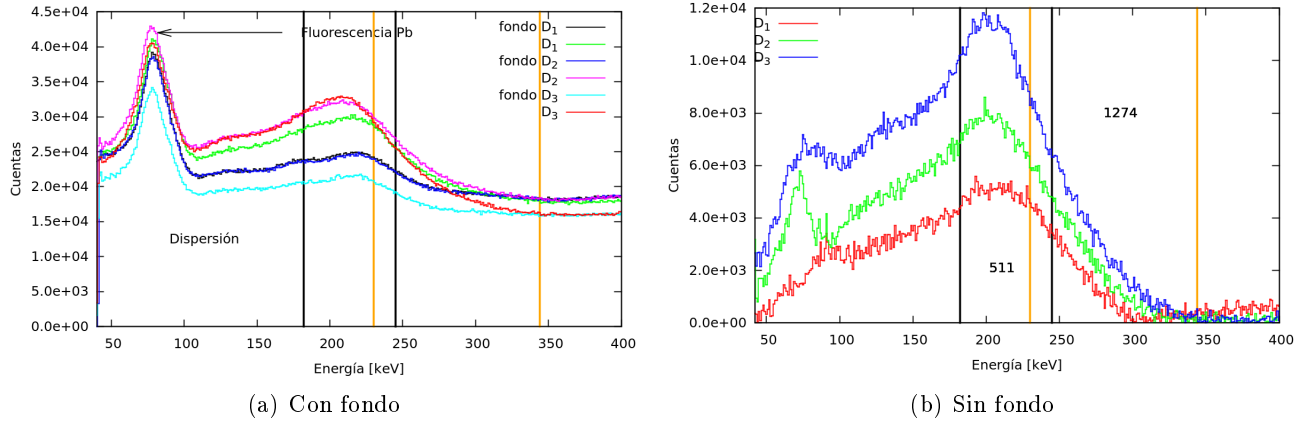


Figura 17: Espectro de dispersión sin el fondo de 4 placas de Al donde se ha usado colimadores en forma de prisma rectangular de distinta área de base o diafragma.

Los coeficientes SS como función del área se muestran en la Figura 18. A primera vista la dependencia no es lineal, sin embargo para ambas energías, el coeficiente SS se incrementa con tamaño del diafragma. En ambas se necesitarían mas mediciones para establecer la existencia de alguna tendencia.

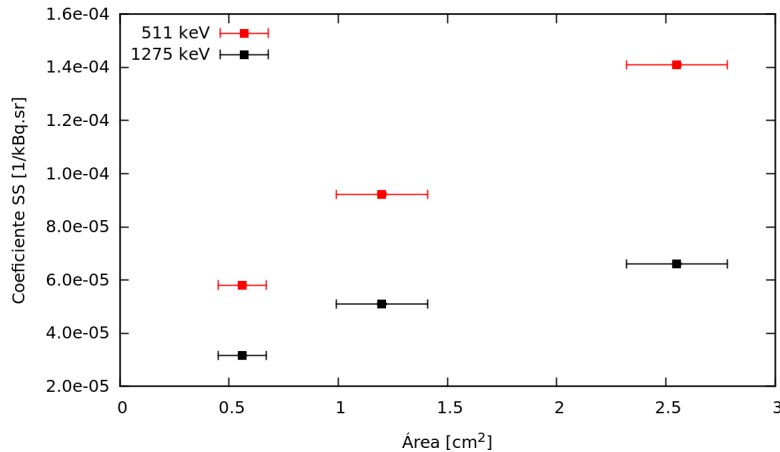


Figura 18: Coeficiente SS como función del área del colimador para dos energías de la radiación gamma incidente.

5. Conclusiones

- ✓ Se estudió la dependencia de SS con el tiempo de adquisición y se obtuvo una tendencia lineal de los coeficientes SS con el tiempo para la radiación incidente de energías 511 y 1274 keV. Los parámetros de ajuste pueden emplearse para determinar el tiempo requerido en la obtención de cuentas de SS por unidad de kBq y ángulo sólido.
- ✓ Los coeficientes SS se incrementan con tamaño del diafragma. Se necesitan mas mediciones de estas variables para establecer si existe una tendencia.

- ✓ Se encontró que los incrementos realizados al tamaño del diafragma y al tiempo de adquisición impiden distinguir individualmente las distribuciones con la energía de SS de 511 y 1275 keV.
- ✓ El análisis de los parámetros geométricos sugiere que la distinción individual de las distribuciones con la energía de SS de 511 y 1275 keV, es particularmente sensible a las dimensiones del diafragma más que a su área, y a la distancia entre el detector y la fuente.
- ✓ Se recomienda mejorar el montaje ajustando mecánicamente el detector.

Apéndice A

De acuerdo con la Figura 5a, del triángulo $\triangle DEF$ obtenemos las siguientes relaciones

$$\zeta = \frac{x}{\sin \theta} \quad (37)$$

y

$$n = \zeta \cos \theta \quad (38)$$

Del triángulo $\triangle ABD$ obtenemos

$$l = \frac{h}{\sin \theta} \quad (39)$$

y del triángulo $\triangle AEC$

$$r = k \tan \alpha. \quad (40)$$

Reemplazando la ec. (38) y la ec. (39) en k , tenemos

$$k = l + n = \frac{h}{\sin \theta} + \zeta \cos \theta. \quad (41)$$

Empleando la ec. (37), queda

$$k = \frac{h}{\sin \theta} + \frac{x}{\tan \theta}. \quad (42)$$

De la Figura 5b, se observa que se cumple con

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (43)$$

Reemplazando k en r resulta

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{h}{\sin \theta} + \frac{x}{\tan \theta} \right)^2 \tan^2 \alpha. \quad (44)$$

Expandiendo y reorganizando obtenemos

$$y^2 + x^2 \left(1 - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta} \right) - 2 \frac{h \tan^2 \alpha}{\tan \theta \sin \theta} x = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha. \quad (45)$$

Definimos k_1 como

$$k_1 \equiv 1 - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta} \quad (46)$$

y k_2 como

$$k_2 \equiv \frac{h \tan^2 \alpha}{\tan \theta \sin \theta}, \quad (47)$$

completando el cuadrado de la variable x resulta

$$y^2 + k_1 \left(x^2 - 2 \frac{k_2}{k_1} x \right) = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha, \quad (48)$$

que es igual a

$$y^2 + k_1 \left(x - \frac{k_2}{k_1} \right)^2 = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha + \frac{k_2^2}{k_1}. \quad (49)$$

Definimos $R^2 \equiv \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha + \frac{k_2^2}{k_1}$, la ecuación de la elipse queda

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{k_1}{R^2} \left(x - \frac{k_2}{k_1} \right)^2 = 1, \quad (50)$$

siendo $b^2 = R^2$ y $a^2 = \frac{1}{k_1 \sin^2 \theta} R^2$.

Reemplazando las definiciones de k_1 y k_2 , resulta

$$b^2 = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha + \frac{k_2^2}{k_1} = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha + \frac{\left(\frac{h \tan^2 \alpha}{\tan \theta \sin \theta} \right)^2}{1 - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta}}$$

que es igual a

$$b^2 = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha \left(1 + \frac{\frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta}}{1 - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta}} \right).$$

Simplificando, resulta

$$b^2 = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha \left(1 + \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta - \tan^2 \alpha} \right)$$

$$b^2 = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha \left(1 + \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta - \tan^2 \alpha} \right)$$

$$b^2 = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha \left(\frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta - \tan^2 \alpha} \right) = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha \left(\frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \right).$$

Reorganizando, queda

$$b^2 = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha \left(\frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta - \tan^2 \alpha} \right) = \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \tan^2 \alpha \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \theta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta} \right).$$

Si empleamos la propiedad $\sin^2 \theta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta = \sin^2 \theta - \sin^2 \alpha$, tenemos

$$b = \frac{h}{\sin \theta} \tan \alpha \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha} \right)^{1/2}$$

que es igual a

$$b = \frac{h \sin \alpha}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{1/2}}. \quad (51)$$

Para obtener el semieje mayor, empleamos la ec. (37) (la elipse descansa sobre la coordenada ζ) y la definición de k_1 (ec. (46)). Se había encontrado que $b = R$ y $a^2 = \frac{1}{k_1 \sin^2 \theta} R^2$, por lo tanto el valor del semieje mayor es

$$a = \frac{1}{\sin \theta \sqrt{k_1}} \frac{h \sin \alpha}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{1/2}} \quad (52)$$

$$a = \frac{1}{\sin \theta \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta}}} \frac{h \sin \alpha}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta}}} \frac{b}{\sin \theta}. \quad (53)$$

Reordenando, resulta

$$a = \left(\frac{\tan^2 \theta - \tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta} \right)^{-1/2} \frac{b}{\sin \theta}, \quad (54)$$

$$a = \left(\frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \right)^{-1/2} \frac{b}{\sin \theta}, \quad (55)$$

$$a = \left(\frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \cos^2 \alpha}} \right)^{1/2} \frac{b}{\sin \theta}, \quad (56)$$

y finalmente queda

$$a = \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \alpha}{\cos^2 \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta)} \right)^{1/2} \frac{b}{\sin \theta} \quad (57)$$

Reemplazando b de la ec. 51, queda

$$a = \frac{h \sin 2\alpha}{2(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)}. \quad (58)$$

El área de la elipse esta dada por

$$A = \pi ab = \frac{\pi h^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{3/2}}, \quad (59)$$

despejando h tenemos

$$h = \left[\frac{ab(\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha)^{3/2}}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \right]^{1/2} \quad 0 \leq \alpha \leq \theta \leq \pi/2. \quad (60)$$

Apéndice B

Del triángulo $\triangle BGH$ en la *Fig.(6)* obtenemos la expresión

$$L + m + n = \frac{h}{\cos \beta} \rightarrow m + n = \frac{h}{\cos \beta} - L. \quad (61)$$

Del triángulo $\triangle LCK$

$$p = R \tan \beta. \quad (62)$$

Del triángulo $\triangle LZH$ y reemplazando p de la ec.(26), resulta

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{f}{m + n + p} \rightarrow f = \sin \theta * (m + n + p) \rightarrow f = \sin \theta * \left(\frac{h}{\cos \beta} - L + R \tan \beta\right). \quad (63)$$

De los triángulos $\triangle BFG$, $\triangle CER$, $\triangle BCO$ y $\triangle BCM$, obtenemos respectivamente

$$a = h \tan(\alpha - \beta), \quad (64)$$

$$e = \xi_1 \cos \beta, \quad (65)$$

y

$$r = \xi_1 \sin \beta, \quad (66)$$

$$b = \frac{L}{\cos \alpha}, \quad (67)$$

y

$$q = b \sin(\alpha + \beta) = \frac{L}{\cos \alpha} \sin(\alpha + \beta). \quad (68)$$

La longitud d es

$$d = \overline{FG} + \overline{MC} + \overline{CR} = a + q + e. \quad (69)$$

Reemplazando la ec. (64), la ec. (68) y la ec. (65) en la ec. (69), tenemos

$$d = h \tan(\alpha - \beta) + \frac{L}{\cos \alpha} \sin(\alpha + \beta) + \xi_1 \cos \beta. \quad (70)$$

La $\tan \phi$ del triángulo $\triangle EFV$ es

$$\tan \phi = \frac{r + f}{d}. \quad (71)$$

Reemplazando r , f y d de la ec. (66), la ec. (63) y la ec. (70), queda

$$\tan \phi = \frac{\xi_1 \sin \beta + \sin \theta * (\frac{h}{\cos \beta} - L + R \tan \beta)}{h \tan(\alpha - \beta) + \frac{L}{\cos \alpha} \sin(\alpha + \beta) + \xi_1 \cos \beta}. \quad (72)$$

Con el mismo esquema determinaremos la altura h mínima que puede tener la fuente en el colimador propuesto para un espesor ξ_2 dado.De los triángulos $\triangle BCM$, $\triangle ACJ$ y $\triangle AST$ obtenemos respectivamente

$$h_1 = b \cos(\alpha + \beta) = \frac{L}{\cos \alpha} \cos(\alpha + \beta), \quad (73)$$

$$h_2 = 2R \sin \beta, \quad (74)$$

y

$$h_e = \xi_2 \sin \beta. \quad (75)$$

La altura mínima es

$$h_{min} = h_1 + h_2 + h_e = \frac{L}{\cos \alpha} \cos(\alpha + \beta) + (2R + \xi_2) \sin \beta. \quad (76)$$

Por lo tanto, para $\xi_2 \geq 0$ se debe cumplir la condición

$$h_{min} \geq \frac{L}{\cos \alpha} \cos(\alpha + \beta) + 2R \sin \beta. \quad (77)$$

Por último del triángulo $\triangle BKC$ obtenemos

$$R = L \tan \alpha. \quad (78)$$

Apéndice C

Empleamos la misma definición de los segmentos mostrada en la sección 3.2, junto con las definiciones de los ángulos $\angle DFG \equiv \gamma_1$ y $\angle JNG \equiv \gamma_2$.

De la Figura 7a obtenemos $\beta' + (\frac{\pi}{2} - \delta) = \frac{\pi}{4}$, reordenando resulta $\beta' = \delta - \frac{\pi}{4}$. El segmento \overline{OZ} es la semidiagonal de un cuadrado de lado l_d , por lo tanto, esta dado por $\overline{OZ} = \frac{\sqrt{2}}{2}l_d$.

El segmento \overline{AK} es

$$\overline{AK} = \overline{OL} - \overline{LZ} = \overline{OZ}(\cos \beta' - \sin \beta') = \frac{\sqrt{2}}{2}l_d \left[\cos \left(\delta - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\delta - \frac{\pi}{4} \right) \right] = l_d \cos \delta. \quad (79)$$

Del triángulo $\triangle OLZ$, obtenemos

$$\cos \beta' = \frac{l_e}{\overline{OZ}} \rightarrow l_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\delta - \frac{\pi}{4})l_d = \frac{l_d}{2}(\cos \delta + \sin \delta) \quad (80)$$

habiéndose reemplazado \overline{OZ} y β' .

Del triángulo $\triangle RFK$ y reemplazando l_e de la ec. (80), queda

$$\tan \gamma_1 = \frac{h_d + 2l_e}{d + (h_s - 2l_d \sin \beta')} = \frac{h_d + 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\delta - \frac{\pi}{4})l_d}{d + [h_s - 2l_d \sin(\delta - \frac{\pi}{4})]} = \frac{h_d + l_d(\cos \delta + \sin \delta)}{d + [h_s - l_d(\sin \delta - \cos \delta)]}. \quad (81)$$

De la Figura 7 para ambos casos, obtenemos

$$\vartheta_{min} = \gamma_2 + \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta). \quad (82)$$

Por otro lado, \overline{FN} es el doble del semieje mayor a (ec. (58)), por lo tanto $\overline{NV} = d - 2a$. Además, obtenemos $\overline{AJ} = l_d \cos(\frac{\pi}{2} - \delta) = l_d \sin \delta$.

Del triángulo $\triangle ZNJ$, resulta

$$\tan \gamma_2 = \frac{h_d}{d - 2a + h_s}. \quad (83)$$

De la Figura 7b correspondiente al caso B y empleando las mismas definiciones que en la sección 3.2, encontramos

$$\tan \gamma_1 = \frac{l_d \cos \delta + h_d}{d + (h_s - l_d \sin \delta)} \quad (84)$$

y

$$\tan \gamma_2 = \frac{h_d + l_d \sin \delta}{\overline{NV} + h_s + l_d \cos \delta} = \frac{h_d + l_d \sin \delta}{d - 2a + h_s + l_d \cos \delta}. \quad (85)$$

Referencias

- [1] M. Singh, G. Singh, B.S Sandhu, B. Singh. *Effect of detector collimator and sample thickness on 0.662 MeV multiply Compton-scattered rays*. Applied Radiations and Isotopes 64 (2006) 373-378.
- [2] A.D. Sabharwal, B.S. Sandhu, B. Singh. *Investigation of effect of target thickness and detector collimation on 662 keV multiply backscattered gamma photons*. Radiation measurements 44 (2009) 411-414.
- [3] K.U.Kiran, K. Ravindraswami, K.M. Eshwarappa, H.M. Somashekarappa. *An investigation of energy dependence on saturation thickness for 59.54, 123,279, 360, 511, 662, 1115 and 1250 keV gamma photons in carbon and aluminium*. Radiations Physics and Chemistry 97 (2014) 107-112.

- [4] M. Singh, G.Singh, B.S. Sandhu, B. Singh. *Angular distribuction of 662 keV multiply-Compton scattered gamma rays in copper*. Radiations measurement 42 (2007) 420-427.
- [5] Martha Liliana Cortés. *Energy and time characterization of the response of the soil to γ rays*. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2011.
- [6] Luisa Natalia González. *Formación de imágenes en un dispositivo de retrodispersión Compton de rayos γ* . Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2014.
- [7] G.Gilmore. *Practical gamma-ray spectrometry*. 2da. edición, John Wiley & Sons 2008.
- [8] E.B. Podgorsak. *Radiation Physics for Medical Physicists*. Springer, 2006.
- [9] <http://www.physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>