

Aplicación del modelo de bosones interactuantes
a la estructura nuclear

Nancy Carolina Forero Martínez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá D. C.
2004

Aplicación del modelo de bosones interactuantes a la estructura nuclear

Trabajo de grado para optar el título de Física

Presentado por: Nancy Carolina Forero Martínez

Director: Dr. Ramiro Cardona Cardona

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Bogotá D.C.
2004

Dr. Ramiro Cardona Cardona
Director

Dr. Javier Cardona
Jurado

Dr. Rodolfo Díaz
Jurado

A mis padres Amparo y Laurentino,
a mis hermanos Heliana y Laurent,
a mi gordito Robin.

Agradecimientos

A mi familia, que son el soporte, la base y fundamento de lo que soy, a mis padres que sin su amor inagotable, su apoyo incondicional, paciencia y tolerancia esto no hubiera sucedido, a Heliana, por aguantarse el ruidaje mañanero, gracias por tu tranquilidad, a Laurent, quien nunca entenderá por qué escogí física, gracias por la compañía nocturna y MTV.

Al profesor Ramiro, por brindarme la oportunidad de trabajar con él y orientarme durante el proceso.

A mi gordito Robin, quien además de amarme y ser mi amigo, se convirtió en mi mejor crítico.

A Leonardo, quien me enseñó que la voluntad vence cualquier obstáculo y a ver en lo complejo de la física la mejor herramienta de trabajo.

A mis compañeros y amigos, Mauricio M., Ricardo, Oscar R., Shirley, Mauricio D., Germán, Carlos, Mónica, Carolina, Edana, Oscar M. y Gabriel, por compartir este período de aprendizaje y complementarlo con el regalo de la amistad.

A los integrantes del Grupo de Física Nuclear, por sus importantes preguntas y sugerencias a tiempo.

A todos aquellos que intervinieron en mi formación tanto académica como personal, profesores, compañeros y grupo δ .

Aplicación del modelo de bosones interactuantes a la estructura nuclear

Interacting boson model applied to the nuclear structure

Resumen

Se aplica el modelo algebraico de bosones interactuantes a la estructura nuclear a través del estudio de los niveles de energía de un núcleo, en cada uno de los casos límite, vibracional (U(5)), rotacional (SU(3)) y γ -soft (SO(6)) y en la transición correspondiente a U(5) \rightarrow SU(3). Los núcleos estudiados son ^{110}Cd , ^{156}Gd , ^{196}Pt y $^{146-156}\text{Sm}$ respectivamente.

Se comparan los espectros obtenidos analíticamente y los calculados con el paquete de programas PHINT con los espectros experimentales, excepto en el caso de la transición, donde se comparan los espectros calculados numéricamente con los experimentales.

Abstract

The interacting boson model (IBM) is applied to the nuclear structure determining the energy levels of a nucleus in each limit case, vibrational (U(5)), rotational (SU(3)) and γ -soft (SO(6)), and in the transitional region U(5) \rightarrow SU(3). The nuclei ^{110}Cd , ^{156}Gd , ^{196}Pt and $^{146-156}\text{Sm}$ are studied. Comparison between the empirical level scheme and predictions of the IBM its made in each case.

Palabras Clave: modelo bosones interactuanes estructura nuclear

Key Words: interacting boson model nuclear structure

Índice General

Introducción	vi
1 Modelos Nucleares	1
1.1 Modelo de la Gota Líquida (Método Semiempírico)	1
1.2 Modelo de Capas	3
1.3 Modelos Colectivos Geométricos	5
1.3.1 Modelo Vibracional	8
1.3.2 Modelo Rotacional	11
1.4 Modelo Algebraico de Bosones Interactuantes	17
1.4.1 Fundamento microscópico	17
1.4.2 Aspectos Generales del IBM	20
2 Límite Vibracional	27
2.1 Cadena I: Límite $U(5)$	27
2.2 Resultados	32
3 Límite Rotacional	38
3.1 Cadena II: Límite $SU(3)$	38
3.2 Resultados	41
4 Límite γ-soft	46
4.1 Cadena III: Límite $SO(6)$	46

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	ii
4.2 Resultados	49
5 Transición $U(5) \rightarrow SU(3)$	52
5.1 Resultados	53
6 Conclusiones	56
A Paquete de Programas PHINT	58
A.1 Fórmulas analíticas	59
B Equivalencia entre las constantes	61
B.1 Caso 1	61
B.2 Caso 2	61
B.3 Caso 3	62
B.4 Caso 4	63

Índice de Figuras

1.1	Energía de Enlace	2
1.2	Energía de separación	4
1.3	Espectro partícula independiente	6
1.4	Dependencia radial del potencial nuclear como función del número de nucleones por fuera de capa cerrada	7
1.5	Formas nucleares	9
1.6	Niveles energía vibracionales	11
1.7	Niveles de energía rotacionales	12
1.8	Relación entre el momentum angular \vec{J} y sus proyecciones M y K	13
1.9	Vibraciones β y γ	14
1.10	Plano (β, γ)	15
1.11	Formas de energía potencial	16
1.12	Niveles energía γ -soft	17
1.13	Correspondencia entre las parejas de nucleones S y D , y los bosones s y d .	19
1.14	Triángulo de simetrías	26
1.15	Regiones donde se encuentran las diferentes simetrías	26
2.1	Espectro límite vibracional	35
2.2	Comparación de espectros	36
3.1	Espectro límite rotacional	43
3.2	Comparación de espectros I	43

3.3	Comparación de espectros II	44
4.1	Espectro límite γ -soft	51
4.2	Comparación de espectros	51
5.1	Ejemplo Transición $U(5) \rightarrow SU(3)$	53
5.2	Transición $^{146-156}\text{Sm}$	54

Índice de Tablas

1.1	Valores esperados operadores de Casimir	25
2.1	Esquema de clasificación para el límite vibracional	30
2.2	Constantes límite vibracional	32
2.3	Valores constantes caso vibracional	33
2.4	Porcentajes de error vibracional	34
3.1	Esquema de clasificación para el límite rotacional	40
3.2	Equivalencia constantes límite rotacional	41
3.3	Valores constantes caso rotacional	42
3.4	Porcentajes de error rotacional	42
4.1	Esquema de clasificación para el límite γ -soft	48
4.2	Constantes límite γ -soft	49
4.3	Valores constantes caso γ -soft	50

Introducción

Los modelos nucleares dan cuenta de los aspectos fenomenológicos del comportamiento de los núcleos, estos modelos difieren en sus suposiciones y aproximaciones, algunos son esencialmente macroscópicos, describen principalmente excitaciones colectivas en términos de formas nucleares, por ejemplo rotaciones de elipsoides deformados y vibraciones; mientras otros se centran en las órbitas específicas de los nucleones individuales y la interacción entre nucleones. Estos modelos no son contradictorios entre sí, por el contrario son aproximaciones complementarias que describen diferentes manifestaciones del comportamiento nuclear.

Además de los anteriores modelos, existe el estudio de las excitaciones colectivas del núcleo por medio de los llamados *modelos algebraicos*, término utilizado para distinguir estos modelos de los microscópicos (modelo de capas) y los geométricos (modelos vibracional y rotacional), éstos describen las excitaciones colectivas por medio de métodos de teoría de grupos y los conceptos de simetrías relacionados con ellos [1, 2]. Dentro de los modelos algebraicos existe el modelo de bosones interactuantes [3], (IBM por sus siglas en inglés), en el que las excitaciones colectivas de núcleos par-par están caracterizadas por un número fijo N de bosones de dos tipos s y d con números cuánticos $J^\pi = 0^+$ $J^\pi = 2^+$ respectivamente. Existen algunas extensiones del IBM, el IBM-1, en donde no se hace distinción entre bosones formados por neutrones o protones; IBM-2, se hace distinción entre bosones formados por neutrones o protones, además de introducirse el fundamento microscópico basado en el modelo de capas esférico en la descripción de los estados nucleares colectivos; el IBFM, para núcleos impares, interacción de fermiones con bosones, este modelo explica de forma adecuada las excitaciones colectivas de alta energía, otras extensiones consideran diferentes grados de libertad, por ejemplo introduciendo el isoespín T , se tiene IBM-k, donde k depende del valor de isoespín y su respectiva proyección. Para simplificar el problema se limita el número de bosones, lo que implica que el estudio se hace para bajo espín y baja energía de excitación.

Este trabajo se centra fundamentalmente en el cálculo de los niveles de energía usando IBM-1. Con este modelo también se pueden calcular las probabilidades de transición que están estrechamente relacionadas con los tiempos de vida, los cuales se pueden medir experimentalmente. Sin embargo el cálculo de las probabilidades de transición no será abordado en este trabajo.

El trabajo está dividido en seis capítulos, en el capítulo 1 se describen los principales modelos nucleares, los capítulos 2, 3 y 4 se refieren a la aplicación del IBM en los límites vibracional, rotacional y γ -soft respectivamente, en el capítulo 5 se encuentran aspectos generales de la transición $U(5) \rightarrow SU(3)$, y finalmente el capítulo 6 está dedicado a las conclusiones.

Capítulo 1

Modelos Nucleares

En el estudio de la estructura nuclear, se tienen modelos que describen diferentes aspectos del comportamiento nuclear, por ejemplo, en la descripción de las propiedades generales del núcleo el modelo de la gota líquida es adecuado, sin embargo, para entender los espines del núcleo y la existencia de los llamados números mágicos se requiere una descripción del movimiento de los nucleones individuales, este tipo de descripción está dada por el modelo de capas nuclear. La existencia de momentos cuadrupolares eléctricos nucleares grandes, indica que el núcleo es generalmente deformado y la generalización del modelo de capas se requiere para su descripción. Muchos de los esquemas de niveles se describen de acuerdo a este modelo, otros sin embargo, pueden explicarse por medio de los modelos colectivos geométricos rotacional y vibracional, lo que lleva a los modelos colectivos [4]. En el estudio del movimiento nuclear colectivo, además del estudio de las variaciones de la forma colectiva, existe la posibilidad de describir el movimiento coherente y ordenado de los nucleones por medio del concepto de simetrías relacionado con las descripciones algebraicas de un sistema nuclear de muchos cuerpos, a esta descripción se le conoce como modelos algebraicos.

A continuación se presenta una breve discusión sobre los modelos mencionados anteriormente haciendo énfasis en el modelo algebraico de bosones interactuantes.

1.1 Modelo de la Gota Líquida (Método Semiempírico)

El modelo de la gota líquida, fue el primer modelo en describir las propiedades del núcleo basándose en la observación de la saturación que exhibe la fuerza nuclear. El comportamiento de la energía de enlace por nucleón $BE(A, Z)/A$ (energía que se libera al unir o la necesaria para separar los nucleones) es un indicio de estas observaciones; una fuerza no saturada llevaría a una energía de enlace proporcional a la energía de interacción de dos cuerpos, es decir proporcional a $A(A - 1)/2$, en contradicción con las observaciones experimentales, en las que se observa saturación (figura 1.1), entonces el modelo en el que cada nucleón interactúa con los demás no es cierto, y se asume entonces que cada nucleón

está interactuando sólo con sus vecinos más cercanos y no con los demás, proceso similar a la saturación en líquidos.

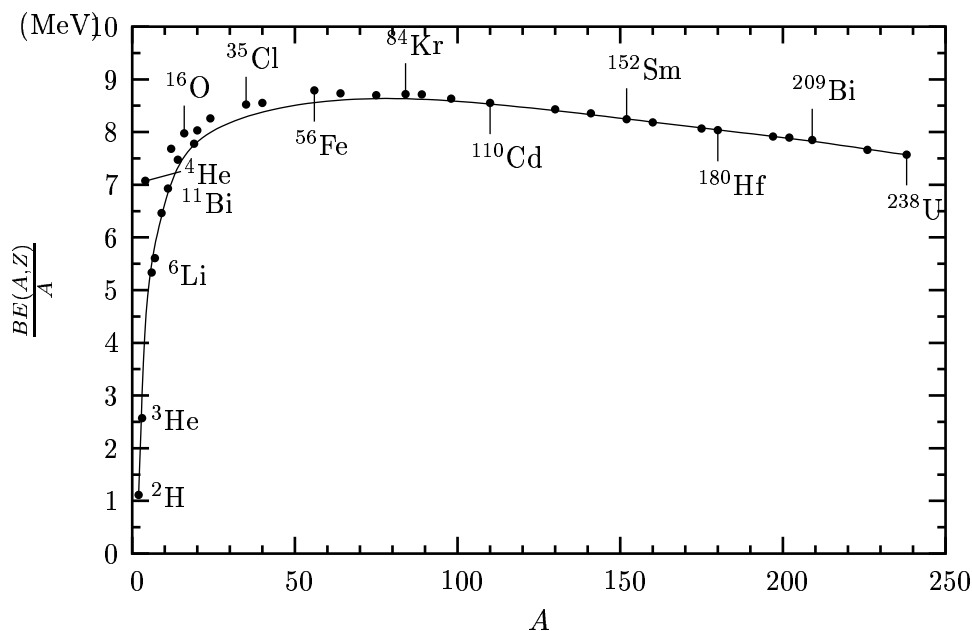


Figura 1.1: Energía de enlace por nucleón en función del número de nucleones

La energía de enlace muestra variaciones suaves con A y Z , este modelo es capaz de describir estas variaciones, sin embargo algunas correcciones deben hacerse de acuerdo al modelo de capas. Teniendo en cuenta esas correcciones, se tiene la siguientes expresión para la energía de enlace [5]:

$$BE(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} + a_a (A-2Z)^2 A^{-1} + \delta(p-p) - \delta(i-i), \quad (1.1)$$

donde el término de volumen $a_v A$, proviene del hecho que la fuerza nuclear se satura, dando una energía de enlace proporcional al número de nucleones; el segundo término, $-a_s A^{2/3}$, el término de superficie, indica que los nucleones en la superficie o cercanos a ella, tienen reducida su energía de enlace ya que no tienen tantos vecinos cercanos como los demás, la corrección es proporcional al área superficial ($4\pi R^2$), es decir a $A^{2/3}$; el término $-a_c Z(Z-1)A^{-1/3}$ representa la repulsión coulombiana entre los protones del núcleo.

Ahora teniendo en cuenta las correcciones del modelo de capas, se tienen los siguientes términos, corrección debido a la simetría, $a_a (A-2Z)^2 A^{-1}$, refleja la tendencia para núcleos

estables de tener aproximadamente igual número de protones (Z) y neutrones (N), y el término debido al apareamiento, δ para núcleos par-par¹ ($p-p$), 0 para núcleos impar-par ($i-p$) y $-\delta$ para núcleos impar-impar ($i-i$), donde se tiene en cuenta que los nucleones preferencialmente forman parejas (parejas de neutrones, parejas de protones) en el núcleo bajo la influencia de la fuerza atractiva de corto alcance entre nucleones.

1.2 Modelo de Capas

Como una buena aproximación se puede considerar al núcleo como compuesto de protones y neutrones que interactúan por medio de una fuerza nuclear atractiva de corto alcance, además se tiene en cuenta que los protones experimentan interacción coulombiana repulsiva. Estos nucleones (Z protones y N neutrones) orbitan en un campo medio que ellos crean, así el principio básico del modelo de capas consiste en aproximar la interacción de un nucleón con el resto por un potencial promedio de partícula independiente, por ejemplo un potencial de oscilador armónico esférico, potencial de Wood-Saxon o un pozo cuadrado de potencial [5].

Las órbitas de partículas individuales están cuantizadas y se caracterizan por los números cuánticos principal n , orbital l y el de momentum angular total j , así como por la proyección de momentum angular m ; notando una órbita como nl_j .

Como consecuencia del movimiento en un campo central, una estructura de capas se desarrolla, esto significa que las energías dependen de n y l , de esta forma un incremento en algunos de estos dos números cuánticos implica un incremento en la energía cinética.

Al estudiar experimentalmente los valores para las energías de separación² de los neutrones (S_n) y protones (S_p),

$$\begin{aligned} S_n &= BE(A, Z) - BE(A - 1, Z) \\ S_p &= BE(A, Z) - BE(A - 1, Z - 1), \end{aligned} \tag{1.2}$$

en función del número de partículas, se observan discontinuidades en los números de protones y neutrones 2, 8, 20, 28, 50, 82 y 126, éstos representan configuraciones nucleares especialmente estables y se les llama, *números mágicos* (figura 1.2). Estas discontinuidades en el comportamiento de las energías de separación del protón y del neutrón sugiere una interpretación en términos de capas nucleares cerradas.

Para lograr reproducir los números mágicos con un potencial de oscilador armónico se debe incluir un término de interacción espín-órbita ($\hat{l} \cdot \hat{s}$) en el potencial, de esta forma se tiene

¹Número de protones y neutrones par

²Energía necesaria para arrancar un nucleón (neutrón, protón) del núcleo

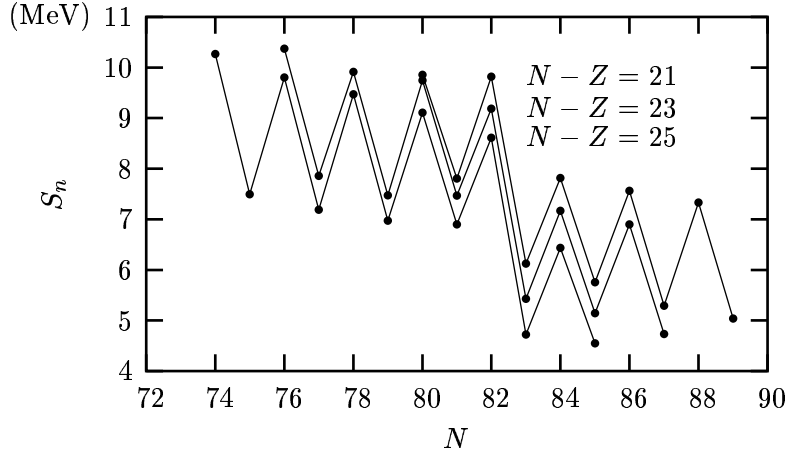


Figura 1.2: Energía de separación de los neutrones.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r), \quad (1.3)$$

con

$$U(r) = -U_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{2}{\hbar^2}\alpha\hat{l} \cdot \hat{s}. \quad (1.4)$$

El término de interacción espín-órbita se puede reescribir teniendo en cuenta que $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$,

$$\hat{l} \cdot \hat{s} = \frac{1}{2}(\hat{j}^2 - \hat{l}^2 + \hat{s}^2). \quad (1.5)$$

Los operadores de momentum angular forman un conjunto de operadores que conmutan, por lo tanto tienen en común un conjunto de funciones de onda, $\psi(\vec{r}, nlsjm)$, estas funciones se caracterizan por los números cuánticos correspondientes a \hat{l}^2 , \hat{s}^2 , \hat{j}^2 , \hat{j}_z y se denotan como

$$\psi(\vec{r}, nlsjm) \equiv R_{nl}(r) \sum_{m_1 m_s} \langle lm_1, sm_s | jm \rangle Y_l^{m_1}(\theta, \varphi) \chi_{1/2}^{m_s}(\sigma), \quad (1.6)$$

Con $R_{nl}(r)$ la función de onda radial, $Y_l^{m_1}(\theta, \varphi)$ la función de onda orbital, $\chi_{1/2}^{m_s}(\sigma)$ la función de onda de espín, $s = \frac{1}{2}$ y $m = m_1 + m_s$ y $\langle lm_1, sm_s | jm \rangle$ coeficientes de Clebsh-Gordan [6].

De esta forma se tiene:

$$\begin{aligned}\hat{l} \cdot \hat{s} \psi(\vec{r}, n(l\frac{1}{2})jm) &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)] \\ &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}],\end{aligned}\quad (1.7)$$

y teniendo en cuenta las dos orientaciones de espín, $j = l \pm \frac{1}{2}$, se encuentra que el potencial $U(r)$ es ligeramente diferente para las dos configuraciones

$$U(r) = -U_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \alpha \begin{cases} -l, & \text{si } j = l + \frac{1}{2} \\ (l+1), & \text{si } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}\quad (1.8)$$

El valor propio de la energía es por lo tanto

$$En(l\frac{1}{2})j = \hbar\omega [2(n-1) + l + \frac{3}{2}] - U_0 + \alpha \begin{cases} -l, & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ (l+1), & \text{para } j = l - \frac{1}{2}, \end{cases}\quad (1.9)$$

rompiéndose de esta forma el degeneramiento. El espectro final se muestra en la figura 1.3.

Es importante anotar que el modelo de capas proporciona formas explícitas para las funciones de onda, permitiendo la descripción de los observables en el núcleo, además se debe tener en cuenta que el potencial promedio proviene de las interacciones entre los nucleones y por lo tanto depende del número de neutrones y protones, así los niveles de energía para el sistema de partícula independiente cambian con Z y N .

Núcleos con un nucleón por fuera de capa cerrada (partícula o hueco) se describen de manera adecuada con el modelo de capas ya que es el caso donde el modelo trabaja mejor; para un número mayor de nucleones por fuera de capa cerrada se hace necesario la introducción de términos de interacción residual, de esta forma para un sistema de muchos cuerpos el hamiltoniano se descompone en dos partes: un hamiltoniano de partícula independiente más una interacción residual entre los nucleones que toma en cuenta efectos que no fueron introducidos en el campo promedio. Una vez se ha escogido la interacción residual, el problema se reduce a construir y diagonalizar la matriz de energía con funciones de onda de muchos cuerpos.

Una descripción más simple para nucleones por fuera de capa cerrada está dada por los modelos colectivos descritos en la siguiente sección.

1.3 Modelos Colectivos Geométricos

En su forma más simple el modelo de capas nuclear describe el movimiento de los nucleones como partículas independientes en un campo promedio, aún cuando se tienen en

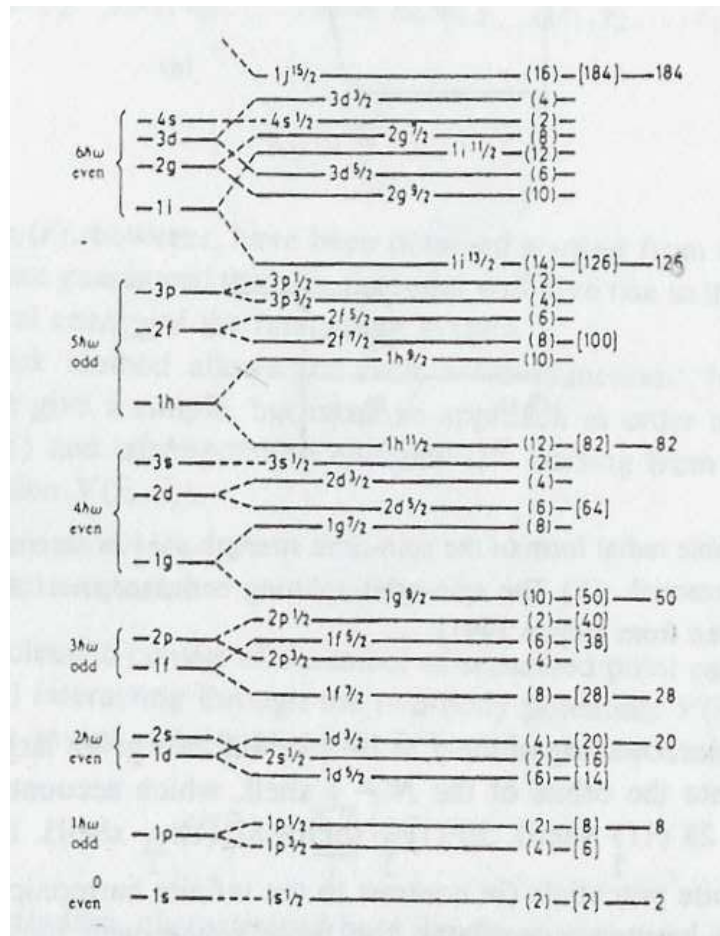


Figura 1.3: Espectro de partícula independientes con $N = 6$, las contribuciones de oscilador armónico y del término espín-órbita se presentan.

cuenta interacciones residuales y un campo promedio esférico [5], éste no es apropiado para describir el movimiento coherente de muchos nucleones de valencia, sin embargo el modelo de capas proporciona una buena descripción cuando se estudian núcleos cercanos a configuraciones de capa cerrada.

El problema de muchos nucleones por fuera de capa cerrada, puede ser estudiado desde otro punto de vista, pensando qué sucede cuando más y más nucleones se suman fuera de capa cerrada. La capa cerrada es muy estable, el sumar partículas, ésta tiende a reducir su estabilidad. Si se grafica la energía potencial de los nucleones contra la deformación se espera una serie de curvas como la que se muestra en la figura 1.4 [7]. A medida que la curva de potencial llega a ser más plana, el núcleo no es tan estable, hasta que finalmente alcanza un punto donde una forma deformada es más estable que la esférica.

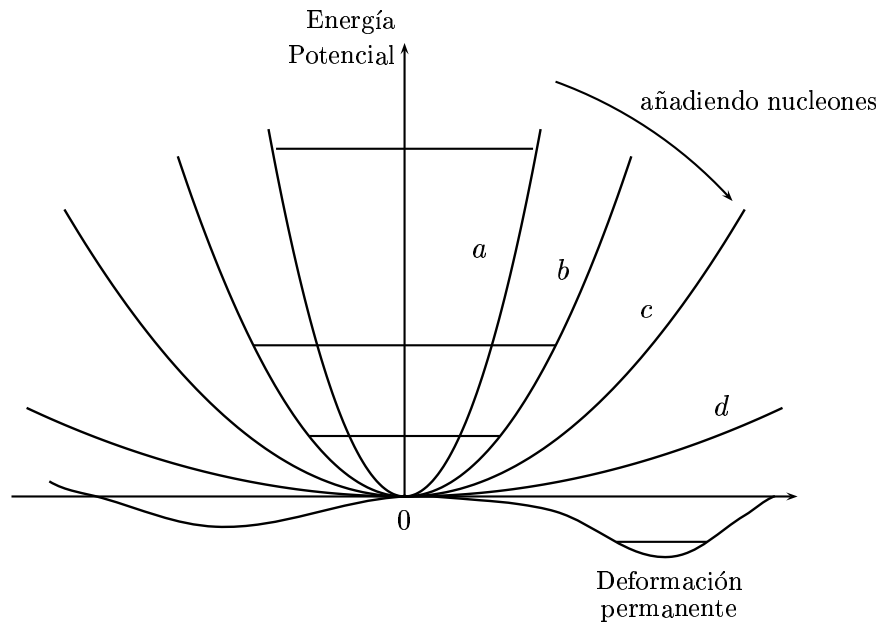


Figura 1.4: Dependencia radial del potencial nuclear como función del número de nucleones por fuera de capa cerrada

De esta forma al alejarse de capas cerradas se espera que el núcleo muestre primero algunos rasgos característicos vibratoriales del movimiento de núcleos suavemente deformados y más lejos, rasgos característicos rotacionales del movimiento de núcleos permanentemente deformados.

Usando reacciones nucleares específicas, ciertos modos de excitación han sido observados en muchos núcleos cuyo número de protones y neutrones está lejos de configuraciones de capa cerrada, se ha encontrado un estado 2^+ con energía igual o menor a la mitad de la energía necesaria para romper una pareja de nucleones con $L = 0$ y paridad positiva³; ésta es una propiedad general de los núcleos par-par y hace parte de un conjunto de propiedades que se denominan *colectivas*, ya que se pueden identificar con la contribución de los nucleones moviéndose de forma conjunta [8].

En esta sección se discuten brevemente los modelos colectivos geométricos vibracional y rotacional, ampliamente estudiados en [9].

³La energía de enlace para un par de nucleones $\sim 2-3$ MeV

1.3.1 Modelo Vibracional

Asumiendo el núcleo como una gota líquida vibrando a alta frecuencia, se tendría la noción de las vibraciones nucleares, éstas ocurren cuando un núcleo tiene muchas partículas por fuera de capa cerrada. Los estados de baja energía de excitación se deben a las excitaciones de esos nucleones en el interior de sus capas.

Aunque la forma promedio de la superficie es esférica, la forma instantánea no lo es, entonces la superficie del núcleo vibrante se puede representar por una función $R(\theta, \varphi)$, en término de armónicos esféricos, $Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi)$, donde cada componente tiene una amplitud $\alpha_{\lambda\mu}$ dependiente del tiempo que garantiza que el volumen del núcleo permanezca constante debido a que los núcleos son incompresibles, la expresión para la superficie toma la forma

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right), \quad (1.10)$$

donde λ describe la multipolaridad de la forma (figura 1.5), así considerando primeros términos se tiene:

- Monopolo, $Y_{00} = \text{cte}$, no se considera, porque no está afectando la forma
- Vibración Dipolar, $Y_{10} \sim \cos(\theta)$, este término da un desplazamiento del centro de masa (CM) y no una variación de la forma, por lo tanto no se tiene en cuenta
- Vibración cuadrupolar, $Y_{20} \sim \cos(\theta) \sin^2 \theta$, introduce variaciones en la forma de la superficie del núcleo.

De forma análoga al electromagnetismo, en donde una unidad de energía electromagnética se llama fotón, un cuanto o unidad de energía vibracional se llama *fonón*. Siempre que se producen vibraciones mecánicas se puede decir de forma equivalente que se están produciendo fonones vibracionales. Una unidad de vibración nuclear con $\lambda = 2$ se llama *fonón cuadrupolar*.

En el límite de oscilaciones armónicas de pequeña amplitud alrededor de una forma de equilibrio en las coordenadas $\alpha_{\lambda\mu}(r)$, el hamiltoniano nuclear se escribe como

$$H = \sum_{\lambda, \mu} \frac{B_\lambda}{2} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + \sum_{\lambda, \mu} \frac{C_\lambda}{2} |\alpha_{\lambda\mu}|^2, \quad (1.11)$$

donde B y C , representan la inercia y la intensidad del potencial de restauración respectivamente.

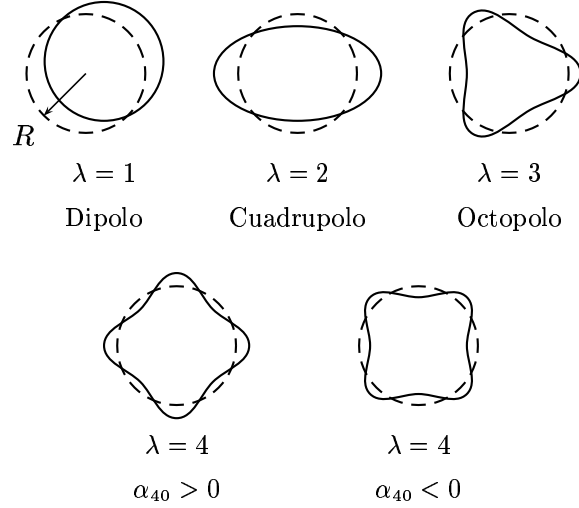


Figura 1.5: Formas nucleares correspondientes a deformaciones cuadrupolares ($\lambda = 2$), octopolares ($\lambda = 3$) y hexadecapolares ($\lambda = 4$)

Para la cuantización del hamiltoniano es más conveniente el uso de operadores de creación y aniquilación

$$\begin{aligned}
 b_{\lambda\mu}^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda B_\lambda}{2\hbar}} \left(\alpha_{\lambda\mu} - \frac{i}{\omega_\lambda B_\lambda} (-1)^\mu \pi_{\lambda-\mu} \right) \\
 b_{\lambda\mu} &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}} \left((-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu} + \frac{i}{\omega_\lambda B_\lambda} \pi_{\lambda\mu} \right),
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde se ha definido el momentum $\pi_{\lambda\mu} = B_\lambda \alpha_{\lambda\mu}^*$ [5]. Teniendo en cuenta las relaciones de conmutación bosónicas

$$[b_{\lambda'\mu'}, b_{\lambda\mu}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \tag{1.13}$$

el hamiltoniano se puede escribir de forma compacta como

$$H = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \sum_\mu \left(b_{\lambda\mu}^\dagger b_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right), \tag{1.14}$$

con la frecuencia dada por $\omega_\lambda = \sqrt{C_\lambda/B_\lambda}$. El estado base no tiene fonones, esto es

$b_{\lambda\mu}|0\rangle = 0$ y los estados de muchos fonones se obtienen poniendo a actuar los operadores $b_{\lambda\mu}^\dagger$ sobre el estado base. Un estado multifonónico normalizado se puede obtener como

$$\prod_{\lambda,\mu} \frac{(b_{\lambda\mu}^\dagger)^{n_{\lambda\mu}}}{\sqrt{n_{\lambda\mu}!}} |0\rangle, \quad (1.15)$$

donde $n_{\lambda\mu}$ es el número de fonones.

Teniendo en cuenta que cada fonón lleva un momentum angular λ (haciendo un análogo entre $Y_{\lambda\mu}$ y Y_{lm}), para fonones cuadrupolares ($\lambda = 2$), si se adiciona una unidad de energía vibracional al estado base 0^+ de un núcleo par-par, donde el fonón lleva dos unidades de momentum angular y paridad positiva, se obtiene un sólo estado 2^+ , de acuerdo a las observaciones hechas para un núcleo esférico par-par. Adicionando un segundo fonón, para cada fonón se tienen 5 valores posibles de μ y por lo tanto 25 combinaciones posibles, sin embargo teniendo en cuenta que las funciones de onda de los fonones son simétricas sólo aparecen 15 combinaciones posibles que se pueden agrupar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} l=4 & \quad \mu = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0 \\ l=2 & \quad \mu = \pm 2, \pm 1, 0 \\ l=0 & \quad \mu = 0. \end{aligned}$$

Como la energía de los fonones es la misma, al adicionar un segundo fonón, de acuerdo a lo anterior, se encuentra que al doble de la energía del estado 2^+ hay un estado triplete con espines $0^+, 2^+, 4^+$, ya que dos fonones idénticos llevan dos veces más energía que uno. Estos tres estados no están a la misma energía debido a efectos adicionales que no considera el modelo vibracional, de la misma forma para 3 fonones cuadrupolares se obtiene un estado con momentos angulares $J^\pi = 0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 6^+$.

Entonces para fonones cuadrupolares, el estado de dos fonones, con momentum angular $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$ se construye de la siguiente manera (figura 1.6)

$$|n_2 = 2; JM\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle 2\mu_1, 2\mu_2 | JM \rangle b_{2\mu_1}^\dagger b_{2\mu_2}^\dagger |0\rangle. \quad (1.16)$$

Estados cuadrupolares de muchos fonones ($n_2 = 2, 3, 4, \dots$) pueden ser construidos usando adición de momentum angular.

El hecho que aparezca el triplete al doble de la energía del primer estado excitado 2^+ , es un hecho común en los núcleos vibratoriales y da un gran soporte a este modelo.

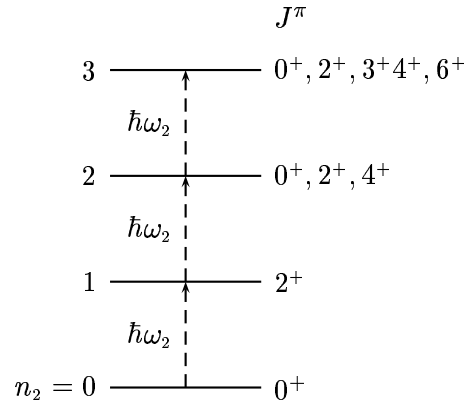


Figura 1.6: Espectro multifonónico cuadrupolar. Al lado izquierdo el número de fonones cuadrupolares n_2 , al lado derechos los posibles valores de momentum angular (J^π)

1.3.2 Modelo Rotacional

El movimiento rotacional se observa en núcleos cuya forma en equilibrio no es esférica, estos se llaman comunmente *núcleos deformados* y se encuentran en la región de $150 < A < 90$ y $A > 220$, región de tierras raras y actínidos.

Momentos cuadrupolares grandes del núcleo, significa que su centro puede estar deformado por la acción de nucleones por fuera de capa cerrada, en muchos casos esta deformación es permanente y el tipo más simple y común de deformación es la elipsoidal; si dos ejes del elipsoide son iguales el radio nuclear está dado por

$$R(\theta) = R_{av}(1 + \beta P_2(\cos \theta)), \quad (1.17)$$

el cual es independiente de φ y proporciona un núcleo axialmente simétrico. R_{av} es el radio promedio del núcleo, es usual tomarlo como $r_0 A^{1/3}$, pero esta aproximación no es exacta ya que el volumen del núcleo descrito por (1.17) no es $\frac{4}{3}\pi R_{av}^3$; β es el parámetro de deformación definido por

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_{av}}, \quad (1.18)$$

donde ΔR es la diferencia entre los ejes de la elipse.

Definiendo el eje de simetría como el eje relativo al cual está definido θ , se tienen dos tipos de deformaciones elipsoidales, cuando $\beta > 0$, el núcleo es prolato y cuando $\beta < 0$ el núcleo es oblató.

La energía cinética de un objeto rotando alrededor de sus ejes principales es $\frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$, donde

\mathcal{J} es el momento de inercia y $\omega = \frac{J}{\mathcal{J}}$, de esta forma la energía es

$$E = \frac{J^2}{2\mathcal{J}}, \quad (1.19)$$

tomando el valor mecánico cuántico de J^2 , se tiene

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}J(J+1), \quad (1.20)$$

que es justamente la expresión que se obtiene al calcular las energías de un rotor cuántico con momento de inercia \mathcal{J} (figura 1.7).

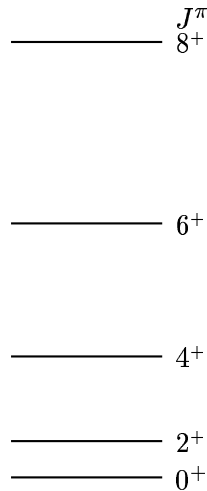


Figura 1.7: Espectro rotacional típico mostrando una secuencia de estados con energías proporcionales a $J(J+1)$

Al incrementar el número cuántico J se está aumentando la energía rotacional del núcleo, formando así los estados excitados una secuencia de bandas conocidas como *bandas rotacionales*.

Los núcleos deformados también presentan vibraciones de dos tipos, vibraciones β y γ , dependiendo de la proyección K del momentum angular del fonón a lo largo del eje de simetría fijo en el cuerpo, (figura 1.8) Las vibraciones β tienen $K = 0$, por lo tanto conservan la simetría alrededor del eje, mientras que las vibraciones γ con $K = 2$ no lo preservan. En la figura 1.9 se muestran estos tipos de vibraciones, donde el eje de simetría coincide con los ejes fijos en el cuerpo.

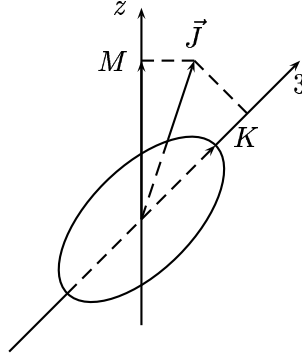


Figura 1.8: Relación entre el momentum angular \vec{J} y sus proyecciones M y K en el sistema de laboratorio y en el sistema intrínseco

Plano (β, γ)

El modo fundamental de deformación de un sistema esférico es el cuadrupoloar, ($\lambda = 2$), y puede ser caracterizado por un conjunto de 5 amplitudes $\alpha_{2\mu}$. Una deformación de este tipo produce una forma elipsoidal para valores pequeños de $\alpha_{2\mu}$. Los ejes principales del elipsoide definen un sistema coordenado intrínseco cuyos ángulos de orientación $\omega = (\phi, \theta, \psi)$ están dados por las relaciones [9]:

$$\alpha_{2\mu} = \sum_{\nu} a_{2\mu} \mathcal{D}_{\mu\nu}^2(\omega)$$

$$a_{12} = a_{2-1} = 0 \quad a_{22} = a_{2-2}, \quad (1.21)$$

donde $\mathcal{D}_{\mu\nu}^2(R)$ es la matriz que representa el operador de rotación $U_R = e^{(-i\hbar)\hat{\alpha}\cdot\hat{j}}$, asociado a momentum angular $j = 2$.

Las variables intrínsecas de deformación a_{20} y a_{22} , se expresan en términos de los parámetros β y γ de la siguiente forma

$$a_{20} = \beta \cos \gamma$$

$$a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \quad (1.22)$$

Haciendo uso de los armónicos esféricos Y_{20} y $Y_{2\pm 2}$, en el sistema intrínseco, la ecuación (1.10) se reescribe como:

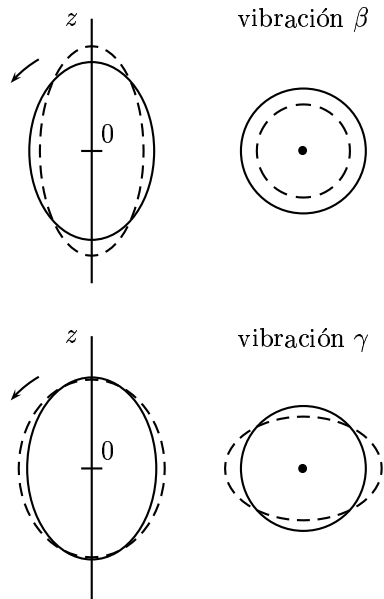


Figura 1.9: Vibraciones β y γ en un núcleo deformado. El eje de simetría es el eje Oz , al lado derecho se muestra el plano ecuatorial. La línea completa representa la forma en equilibrio, la línea a trazos la forma en la vibración.

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left\{ 1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (\cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2 \theta \cos 2\varphi) \right\}. \quad (1.23)$$

En la figura 1.10, se presentan las formas nucleares para $\lambda = 2$ usando ángulos polares.

- Con $\gamma = 0^\circ, 120^\circ$ y 240° , se obtienen esferoides prolatos, con ejes 3, 1 y 2 como ejes de simetría.
- Con $\gamma = 180^\circ, 300^\circ$ y 60° , se obtienen esferoides oblatos.
- Con γ no múltiplo de 60° , se obtienen formas triaxiales.
- El intervalo $0^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ es suficiente para describir todas las posibles formas del núcleo deformado.

Los incrementos a lo largo de los semiejes fijos en el cuerpo se obtienen como

$$\begin{aligned}
 \delta R_1 &= R\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - R_0 = R_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 \delta R_2 &= R\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - R_0 = R_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\
 \delta R_3 &= R(0, 0) - R_0 = R_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \gamma
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

o de forma conjunta,

$$\delta R_k = R_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right) \tag{1.25}$$

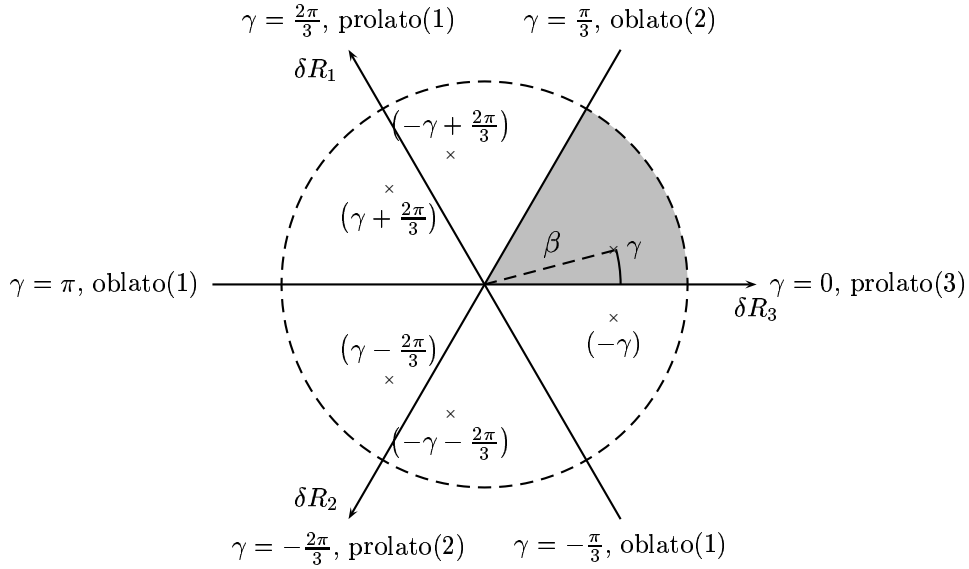


Figura 1.10: Formas nucleares en el plano (β, γ) . La figura muestra el diagrama polar para las variables de deformación β y γ . Las proyecciones de los tres ejes son proporcionales a los incrementos δR_k . Puntos sobre los ejes corresponden a formas axialmente simétricas. Los seis puntos obtenidos por reflexión en los ejes representan la misma forma del núcleo, formas triaxiales

Para determinar el hamiltoniano que describe los modos colectivos de movimiento, se tiene en cuenta el hamiltoniano de la ecuación 1.11, pero con la energía potencial dada por la siguiente expresión

$$U(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} C_{02} (a_{20}(\beta, \gamma) - a_{20}^o)^2 + C_{22} (a_{22}(\beta, \gamma) - a_{22}^o)^2, \tag{1.26}$$

que corresponde a una oscilación cuadrática de pequeña amplitud pero alrededor de un punto de equilibrio (a_{20}° , a_{22}° , a_{2-2}°). Algunas gráficas típicas para $U(\beta, \gamma)$ en el plano (β, γ) se muestran en la figura 1.11. Estas corresponden a (i) un vibrador, con variación proporcional a β^2 ; (ii) forma de equilibrio prolata; (iii) un vibrador γ -soft y (iv) un rotor triaxial.

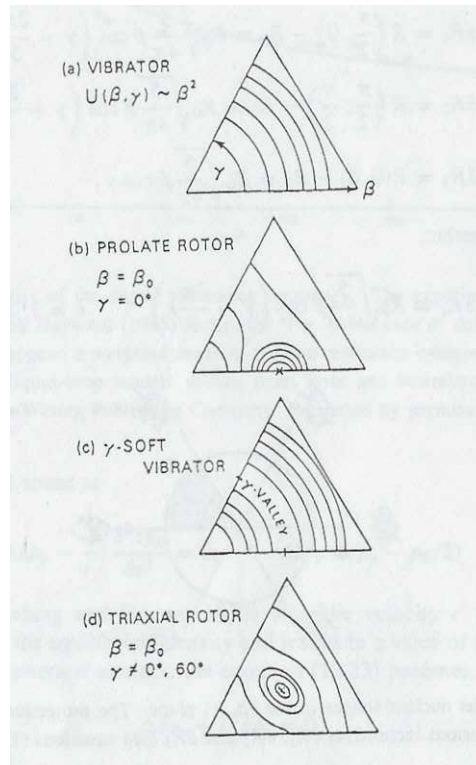


Figura 1.11: Diferentes formas de energía potencial en el plano $(\beta, (\gamma = 0^\circ \rightarrow \gamma = 60^\circ))$, se muestran los sectores correspondientes al vibrador esférico, rotor prolato, vibrador γ -soft y rotor triaxial.

Teniendo en cuenta las anteriores formas estructurales para los núcleos par-par, se pueden distinguir otras formas. Por ejemplo cuando el núcleo pierde su simetría axial, la asimetría se especifica por un parámetro γ que varía de 0° (rotor prolato axialmente simétrico), pasando por $\gamma = 30^\circ$ (rotor asimétrico) hasta llegar a 60° (rotor oblató axialmente simétrico); teniendo en cuenta núcleos con asimetría grande, $\gamma \sim 30^\circ$, se pueden distinguir dos casos: asimetría estática y dinámica, en el primer caso, *caso triaxial*, el núcleo posee un valor fijo de γ , esto significa que el potencial tiene un mínimo para este valor de γ ; en el segundo caso, *caso γ -soft o inestable*, el núcleo oscila libremente en un potencial que es casi independiente del valor de γ variando entre 0° y 60° . En ambos casos, la relación E_{4^+}/E_{2^+} es del orden de 2.5, que es un valor intermedio entre el valor para un vibrador, $E_{4^+}/E_{2^+} \sim 2$, y el rotor $E_{4^+}/E_{2^+} \sim 3.33$.

Ambos casos se caracterizan por excitaciones de baja energía que simulan bandas γ , en el rotor triaxial, $\gamma \sim 30^\circ$, la banda γ aparece en grupos de la siguiente forma $(2^+, 3^+)$, $(4^+, 5^+)$, $(6^+, 7^+)$..., en el caso γ -soft, la banda γ se agrupa así: $2^+, (3^+, 4^+)$, $(5^+, 6^+)$, este agrupamiento es consecuencia de la asociación de los niveles de energía del oscilador armónico, donde el grupo para 3 fonones presenta niveles degenerados para $J^\pi = 3^+$ y $J^\pi = 4^+$ (figura 1.12).

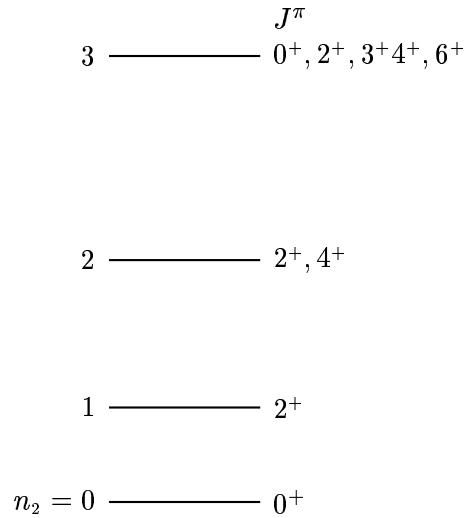


Figura 1.12: Niveles de energía para el caso γ -soft.

Una característica común entre el rotor axial y el γ -soft, es que el estado excitado más bajo 0^+ está por encima del estado correspondiente para la vibración γ .

1.4 Modelo Algebraico de Bosones Interactuantes

Como una aplicación de los métodos de teoría de grupos, se puede estudiar el movimiento cuadrupolar de baja energía de excitación por medio del concepto de simetrías relacionado con las descripciones algebraicas de un sistema nuclear de muchos cuerpos.

En esta sección se discute el fundamento microscópico de modelo de bosones interactuantes (IBM por sus siglas en inglés), el hamiltoniano y las herramientas algebraicas del IBM-1.

1.4.1 Fundamento microscópico

Como se discutió en el modelo de capas, la fuerza nuclear tiene dos componentes básicas, (1) la interacción atractiva entre los nucleones que lleva a la descripción del núcleo como un sistema de muchos cuerpos acotado, y (2) un centro repulsivo, que mantiene a dos nucleones alejados el uno del otro.

Anteriormente se mencionó que las deformaciones nucleares están ligadas a la existencia de nucleones por fuera de capa cerrada, estos nucleones de valencia al estar correlacionados espacialmente conducen al movimiento colectivo. En general este tipo de movimiento involucra momentos angulares y produce estados nucleares denominados estados cuadrupolares colectivos.

Interacción Nucleón-Nucleón

Si dos nucleones se están moviendo en la misma órbita, las funciones de onda se superponen, ganando de esta forma energía de enlace debido a que la interacción de corto alcance permite que dos nucleones estén muy cerca el uno del otro. Sin embargo el principio de exclusión de Pauli no permite a dos fermiones idénticos ocupar el mismo estado cuántico, este es el caso para protones y neutrones. Otra forma de ganar energía de enlace es que los dos neutrones se muevan en la misma órbita pero en direcciones opuestas, esto lleva a que los estados cuánticos de los dos neutrones sean diferentes. En este caso el momento angular total de un sistema de dos neutrones es cero. El estado cuántico de los dos neutrones se describe como un par de estados, uno de los cuales se puede obtener a partir del otro por medio de la sustitución $t \rightarrow -t$. Debido a esta estructura de parejas, esta interacción se llama interacción de apareamiento. Lo anterior también es válido para la interacción protón-protón [10].

Truncación del modelo de capas y parejas de nucleones **S** y **D**

El IBM se basa principalmente en el modelo de capas, que funciona bien para núcleos ligeros (hasta 50 nucleones) pero a medida que aumenta el número de nucleones más capas se tienen en cuenta y el número de estados nucleares puede ser tan grande que se hace imposible manejarlo. Por ejemplo, para el estado 2^+ del núcleo ^{154}Sm se encuentran $3 \cdot 10^{14}$ configuraciones posibles [11]; mientras que el IBM reduce el número de estados a 26 configuraciones para el estado antes mencionado.

Por lo tanto el espacio de Hilbert en donde se trabaja se trunca, para así obtener un subespacio manejable que proporcione más contenido físico. Este espacio se construye teniendo en cuenta parejas coherentes de nucleones (o huecos) de valencia con momentum angular $J^\pi = 0^+$ (pareja **S**) y $J^\pi = 2^+$ (pareja **D**), estas parejas pueden ser de protones o neutrones, aquí no se consideran mezclas de ellos.

Los operadores de creación de parejas **S** y **D** se definen en general

$$\begin{aligned}
 S^\dagger &= \sum_j \alpha_j A^\dagger(jj; 0, 0) \\
 D_M^\dagger &= \sum_{j,j'} \beta_{jj'} A^\dagger(jj'; 2, M),
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

donde α_j y $\beta_{jj'}$ son amplitudes normalizadas, el operador de creación de pares se define como

$$A^\dagger(jj'; J, M) = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{jj'}}} [a_j^\dagger \times a_{j'}^\dagger]_M^{(J)},
 \tag{1.28}$$

con a_j^\dagger , el operador de creación de un nucleón en el orbital j .

Los estados de parejas **S** y **D**, se pueden relacionar con los estados bosónicos s y d con $J^\pi = 0^+$ y $J^\pi = 2^+$ respectivamente [12], siendo estos los estados empleados en la descripción del modelo de bosones interactuantes. En la figura 1.13 se muestra esquemáticamente la correspondencia entre las parejas **S** y **D**, y los bosones s y d , donde dos nucleones con el mismo momentum angular y diferente proyección se acoplan para obtener un estado con momentum angular cero y proyección cero (pareja **S**), de igual forma para las parejas **D**, se acoplan dos nucleones con distintos momentos angulares para obtener un estado con momentum angular 2.

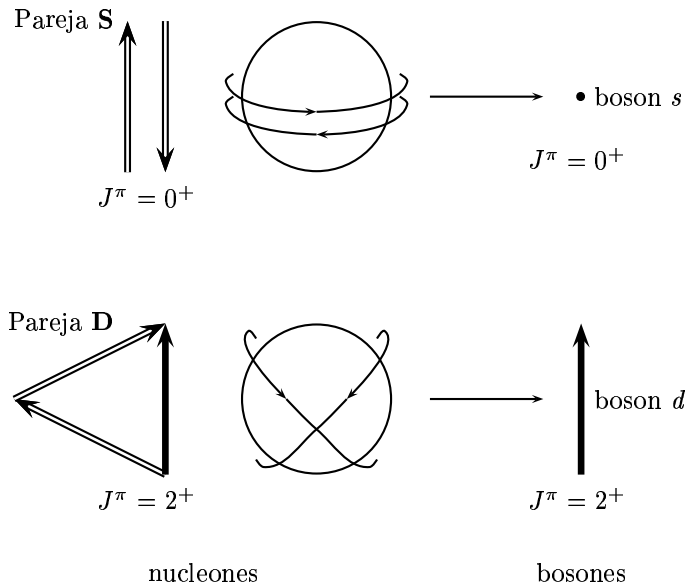


Figura 1.13: Correspondencia entre las parejas de nucleones **S** y **D**, y los bosones s y d

1.4.2 Aspectos Generales del IBM

En 1974, A. Arima y F. Iachello [3], crean el Modelo de Bosones Interactuantes, la idea básica del IBM es asumir que los estados colectivos de baja energía de excitación en un núcleo par-par pueden ser descritos por un sistema de bosones interactuantes s y d , con números cuánticos $J^\pi = 0^+$ y $J^\pi = 2^+$ respectivamente. El número total N de bosones se mantiene fijo, en este caso no se hace distinción entre los bosones formados por neutrones o protones (IBM-1). El número de bosones se cuenta respecto a la capa cerrada más cercana, por ejemplo, para el ^{110}Cd , se tiene $Z=48$ y $N=62$, para el caso de protones la capa cerrada más cercana es $Z=50$ por lo tanto se tienen dos protones (huecos) de valencia que corresponden a un boson, de la misma forma para los neutrones, la capa cerrada más próxima corresponde a $N=50$ por lo tanto se tienen 12 neutrones de valencia que corresponden a 6 bosones, de esta forma $N = N_\pi + N_\nu = 7$.

Las 5 componentes del estado de bosones d ($J = 2$) y la componente del estado de bosones s ($J = 0$), definen un espacio vectorial de seis dimensiones, el cual provee una base para la interpretación del grupo $U(6)$; como consecuencia muchas de las propiedades características del IBM pueden ser derivadas de métodos de teoría de grupos y expresadas analíticamente. Los seis operadores de creación ($s^+, d_\mu^+; \mu = 0, \pm 1, \pm 2$) y seis de aniquilación ($s, d_\mu; \mu = 0, \pm 1, \pm 2$) satisfacen las relaciones de conmutación estándar de bosones.

$$\begin{aligned} [s, s^\dagger] &= 1; & [s, s] &= [s^\dagger, s^\dagger] = 0; \\ [d_\mu, d_\mu^\dagger] &= \delta_{\mu\mu'} & [d_\mu, d_\mu] &= [d_\mu^\dagger, d_\mu^\dagger] = 0 \\ [s, d_\mu^\dagger] &= [s, d_\mu] = [s^\dagger, d_\mu^\dagger] &= [s^\dagger, d_\mu] &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Este modelo se emplea en el estudio de núcleos intermedios y pesados, determinando momentos nucleares, niveles de energía del núcleo y sus respectivas probabilidades de transición de manera cuantitativa, siendo necesario sólo el ajuste de algunos parámetros [13].

La estructura del modelo está determinada por el algebra de Lie $U(6)$ generada por las 36 combinaciones bilineales de los operadores bosónicos anteriores

$$\hat{G}_{\mu\nu} \equiv b_\mu^\dagger b_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 6), \quad (1.30)$$

con $b^\dagger \equiv s^\dagger, d_\mu^\dagger$.

El hamiltoniano de dos cuerpos, en el grupo $U(6)$ consiste de términos lineales (energía de bosones) y términos cuadráticos (interacción de dos cuerpos) en los generadores $\hat{G}_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= E_0 + \sum_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \hat{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mu\nu \\ \kappa\sigma}} U_{\mu\nu, \kappa\sigma} \hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}_{\kappa\sigma} \\
 &= E_0 + \hat{H}'.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

En ausencia de la interacción \hat{H}' , todos los posibles estados $\underbrace{b_\mu^\dagger b_\nu^\dagger b_\kappa^\dagger \dots}_{N} |0\rangle$ para un N dado, serán estados degenerados de energía. La interacción \hat{H}' levanta este degeneramiento para un N dado y es necesario resolver la ecuación de valores propios para obtener las energías y vectores propios en la situación más general.

La expresión explícita para los generadores en términos de los bosones s y d es:

$$\begin{aligned}
 G_0^{(0)}(s, s) &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)} & 1 \\
 G_0^{(0)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(0)} & 1 \\
 G_\mu^{(1)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)} & 3 \\
 G_\mu^{(2)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(2)} & 5 \\
 G_\mu^{(3)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(3)} & 7 \\
 G_\mu^{(4)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(4)} & 9 \\
 G_\mu^{(2)}(d, s) &= [d^\dagger \times \tilde{s}]_\mu^{(2)} & 5 \\
 G_\mu^{(2)}(s, d) &= [s^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(2)} & 5
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

$\overline{36}$,

con $G_\kappa^{(k)}(l, l') = [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_\kappa^{(k)}$, $\tilde{s} = s$, $\tilde{d}_\mu = (-)^\mu d_{-\mu}$ y el producto tensorial definido como

$$[T^{(k_1)} \times T^{(k_2)}]_{(\kappa)}^{(k)} = \sum_{\kappa_1 \kappa_2} (k_1 1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k \kappa) T_{\kappa_1}^{(k_1)} T_{\kappa_2}^{(k_2)}, \tag{1.33}$$

con $(k_1 1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k \kappa)$ el coeficiente de Clebsh-Gordan.

En el generador $G_0^{(0)}(s, s) = [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)}$ se están acoplando dos bosones s para obtener un estado con momentum angular 0 y proyección cero, mientras que el generador $G_\mu^{(2)}(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(2)}$ representa el acople de dos bosones d a momentum angular 2 y proyección de momentum angular μ .

De esta forma el hamiltoniano toma la forma [14]

$$\begin{aligned}
 H = & E_0 + \varepsilon_s(s^\dagger \cdot \tilde{s}) + \varepsilon_d(d^\dagger \cdot \tilde{d}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{L=0,2,4} (2L+1)^{\frac{1}{2}} c_L [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(L)}]_0^{(0)} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{s}]^{(2)} + [d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(2)}]_0^{(0)} \\
 & + \frac{1}{2} v_0 [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{s} \times \tilde{s}]^{(0)} + [s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(0)}]_0^{(0)} \\
 & + u_2 [[d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{s}]_0^{(2)}]_0^{(0)} + \frac{1}{2} u_0 [[s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{s} \times \tilde{s}]_0^{(0)}]_0^{(0)},
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

donde se observa que sólo aparecen combinaciones de \tilde{s} , s^\dagger , \tilde{d} , d^\dagger , que mantienen el número de bosones constante y los términos de interacción hasta de dos cuerpos. El término E_0 corresponde a la energía del estado base, $\varepsilon_s(s^\dagger \cdot \tilde{s})$ y $\varepsilon_d(d^\dagger \cdot \tilde{d})$, son contribuciones de partícula aislada, y los siete términos restantes corresponden a interacciones entre bosones donde existe la probabilidad que un boson d se convierta en uno s y viceversa. El acople de los operadores se hace a $L = 0$, esto garantiza que el hamiltoniano sea escalar y por lo tanto invariante bajo rotaciones, además cada término en (1.34) aparece con su respectivo adjunto conjugado obteniéndose un hamiltoniano hermítico. Los parámetros que se deben ajustar para describir el espectro son c_L , ($L = 0, 2, 4$), v_L y u_L con ($L = 0, 2$), definidos por [15]

$$\begin{aligned}
 \langle ddL|V|ddL \rangle &= c_L, \quad (L = 0, 2, 4), \\
 \langle dd, L = 2|V|dd, L = 2 \rangle &= v_2 \sqrt{10}, \\
 \langle dd, L = 0|V|dd, L = 0 \rangle &= v_0, \\
 \langle ds, L = 2|V|ds, L = 2 \rangle &= 2\sqrt{5} u_2, \\
 \langle ss, L = 0|V|ss, L = 2 \rangle &= u_2,
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

donde V representa el potencial de interacción entre bosones.

Otra forma de escribir el hamiltoniano (1.34), es la llamada expansión multipolar

$$H = E'_0 + \varepsilon'' \hat{n}_d + a_0 P^\dagger P + a_1 (\hat{L} \cdot \hat{L}) + a_2 (\hat{Q} \cdot \hat{Q}) + a_3 (\hat{U} \cdot \hat{U}) + a_4 (\hat{V} \cdot \hat{V}), \tag{1.36}$$

con los operadores ahí escritos definidos como:

$$\begin{aligned}
 \hat{n}_d &= (d^\dagger \cdot \tilde{d}) \\
 \hat{P} &= \frac{1}{2}(\tilde{d} \cdot \tilde{d}) - \frac{1}{2}(\tilde{s} \cdot \tilde{s}), \\
 \hat{L} &= \sqrt{10}[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(1)}, \\
 \hat{Q} &= [d^\dagger \times \tilde{s} + s^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2}[d^\dagger \times \tilde{d}]^{(2)}, \\
 \hat{U} &= [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(3)}, \\
 \hat{V} &= [d^\dagger \times \tilde{d}]^{(4)},
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

denominándose operadores multipolares. El hamiltoniano (1.36), provee una descripción física más directa, ya que incluye un operador de momentum angular \hat{L} , términos de cuadrupolo \hat{Q} , octopolo \hat{U} y hexadecapolo \hat{V} y el operador de apareamiento \hat{P} .

Hay situaciones en las que el hamiltoniano \hat{H}' , se puede reescribir de forma exacta como la suma de operadores de Casimir (operadores invariantes) de una cadena de subgrupos de uno más grande, por ejemplo $G \supset G' \supset G'' \supset \dots$, con

$$\hat{H}' = \alpha C(G) + \alpha' C(G') + \alpha'' C(G'') + \dots \tag{1.38}$$

El problema de valores propios para (1.38) se puede resolver de forma exacta, proporcionando una expresión para la energía en la que los valores propios están dados en términos de varios números cuánticos que caracterizan las representaciones irreducibles de $G \supset G' \supset G'' \supset \dots$

$$E = \alpha \langle C(G) \rangle + \alpha' \langle C(G') \rangle + \alpha'' \langle C(G'') \rangle + \dots, \tag{1.39}$$

donde $\langle \dots \rangle$ denota el valor esperado

Cadenas de subgrupos de U(6)

Existen tres reducciones de grupo que pueden ser construidas, llamadas cadena U(5), SU(3) y SO(6), correspondientes a las tres diferentes representaciones del movimiento nuclear colectivo, vibracional, rotacional y γ -soft [14]. A continuación se presentan las principales cadenas de reducción

$$\begin{array}{lll}
 \text{U}(6) \supset \text{U}(5) \supset \text{SO}(5) \supset \text{SO}(3) \supset \text{SO}(2) & \text{I} & \\
 \text{U}(6) \supset \text{SU}(3) \supset \text{SO}(3) \supset \text{SO}(2) & \text{II} & \\
 \text{U}(6) \supset \text{SO}(6) \supset \text{SO}(5) \supset \text{SO}(3) \supset \text{SO}(2) & \text{III.} &
 \end{array} \tag{1.40}$$

Una característica de éstas cadenas de reducción es que contienen como subgrupos, los grupos de rotaciones en tres y dos dimensiones, $SO(3)$ y $SO(2)$ respectivamente, lo que asegura la descripción de los estados en términos del momentum angular.

Los operadores de Casimir⁴ invariantes para un grupo dado, se determinan teniendo en cuenta que ellos conmutan con todos los generadores del grupo [16]. Cada grupo se caracteriza por su representación irreducible, que contiene los números cuánticos necesarios para definir la base en la cual el hamiltoniano en el modelo IBM es diagonalizable.

Simetrías Dinámicas del IBM-1

Si se tiene una situación en la que el hamiltoniano se escribe en términos de operadores de Casimir invariantes de primer (C_1) y segundo (C_2) orden de una cadena en particular, el problema tiene solución analítica exacta. Estos casos límite se llaman simetrías dinámicas contenidas en el modelo IBM-1.

En un caso general, el hamiltoniano toma la siguiente forma

$$H = e_0 + e_1 C_1(U(6)) + e_2 C_2(U(6)) + \varepsilon C_1(U(5)) + \alpha C_2(U(5)) + \beta C_2(SO(5)) \\ + \gamma C_2(SO(3)) + \eta C_2(SO(6)) + \delta C_2(SU(3)). \quad (1.41)$$

Con los operadores de Casimir definidos de acuerdo a la notación en [14]

$$\begin{aligned} C_1(U(6)) &= \hat{N} & C_2(U(6)) &= \hat{N}(\hat{N} + 5), \\ C_1(U(5)) &= \hat{n} & C_2(U(5)) &= \hat{n}(\hat{n} + 4), \\ C_2(SU(3)) &= \frac{2}{3}[2\hat{Q} \cdot \hat{Q} + \frac{3}{4}\hat{L} \cdot \hat{L}], & & (1.42) \\ C_2(SO(6)) &= 2[\hat{N}(\hat{N} + 4) - 4\hat{P}^\dagger \cdot \hat{P}], \\ C_2(SO(5)) &= 4[\frac{1}{10}\hat{L} \cdot \hat{L} + \hat{U}\hat{U}], \\ C_2(SO(3)) &= 2(\hat{L} \cdot \hat{L}). \end{aligned}$$

Los valores propios de este hamiltoniano sólo pueden ser obtenidos a través de métodos numéricos. Sin embargo, la escogencia particular de estos parámetros, conduce a las simetrías dinámicas.

Para determinar los valores de energía en cada una de las simetrías se determinan los valores esperados para los operadores de Casimir de acuerdo a la tabla 1.1.

⁴Por ejemplo los operadores de Casimir de primer y segundo orden del grupo de rotaciones $SO(3)$ son L_z y L^2 respectivamente

Grupo	Elementos de la base	Orden	$\langle C \rangle$
U(n)	$[f_1, f_2, \dots, f_n]$	1	$f = \sum_{i=1}^n f_i$
		2	$\sum_{i=1}^n f_i(f_i + n + 1 - 2i)$
SU(n)	$[f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n = 0]$	2	$\sum_{i=1}^n \left(f_i - \frac{f}{n}\right) \left(f_i - \frac{f}{n} + 2n + 2i\right)$ con $f = \sum_{i=1}^n f_i$
SU(3)	$(\lambda, \mu) = (f_1 - f_2, f_2)$	2	$\frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu)$
SO(2n+1)	(f_1, f_2, \dots, f_n)	2	$\sum_{i=1}^n 2f_i(f_i + 2n + 1 - 2i)$
SO(2n)	(f_1, f_2, \dots, f_n)	2	$\sum_{i=1}^n 2f_i(f_i + 2n - 2i)$

Tabla 1.1: Valores esperados para los operadores de Casimir de los distintos grupos

Cada una de estas simetrías corresponde a un límite geométrico, U(5), núcleo vibracional, SU(3), núcleo rotacional y SO(6), núcleo γ -soft. En la figura 1.14, se esquematiza las simetrías del IBM-1 y se muestran los núcleos a trabajar en cada uno de los casos.

De acuerdo al hamiltoniano multipolar (1.36), y teniendo en cuenta las simetrías antes mencionadas, los términos ε'' , $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$ y $\hat{P}^i \hat{P}^i$, determinan las características vibratoriales (límite U(5)), rotacionales (límite SU(3)) y γ -soft (límite SO(6)) respectivamente. En la figura 1.15 se muestran las regiones en la tabla de núclidos donde estas simetrías se presentan.

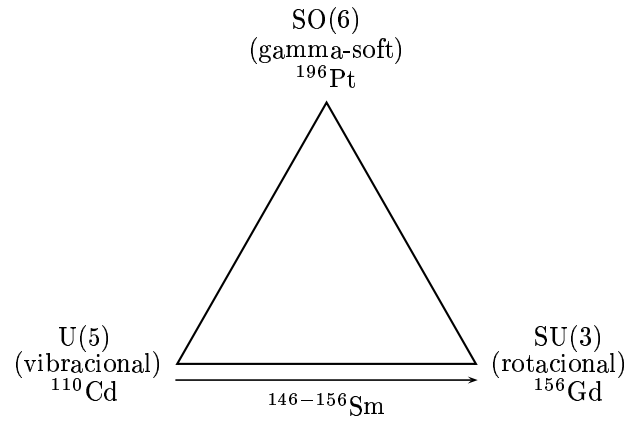


Figura 1.14: Ilustración de las tres simetrías del IBM-1, es decir los límites vibracional (U(5)), rotacional (SU(3)) y γ -soft (SO(6))

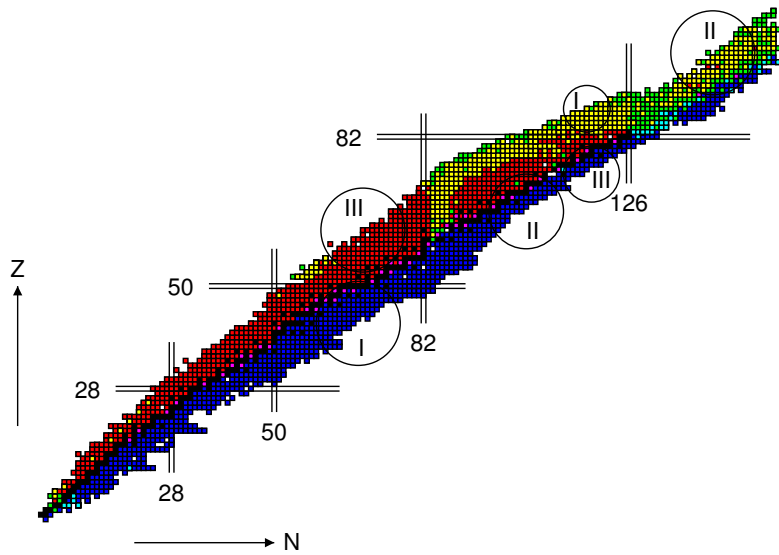


Figura 1.15: Regiones de la tabla de núclidos donde se encuentran las simetrías dinámicas: (I) U(5);(II) SU(3);(III) SO(6)

Capítulo 2

Límite Vibracional

En este capítulo se hace la descripción del límite vibracional o límite $U(5)$. Se muestran los resultados de la aplicación del modelo de bosones interactuantes al núcleo ^{110}Cd [15], y se interpretan los coeficientes que rigen las características de este límite.

2.1 Cadena I: Límite $U(5)$

La estructura de un grupo de Lie está determinada por un conjunto finito de relaciones de conmutación (álgebra de Lie) [17], la estructura del grupo $U(6)$ estará determinada por su correspondiente álgebra.

Para propósitos de clasificación de estados y de construcción de las bases, es necesario obtener todas las posibles subgrupos de $U(6)$, en general dado un grupo \mathfrak{G} , cualquier subconjunto \mathfrak{H} de \mathfrak{G} cerrado con respecto a la conmutación genera un subgrupo. Esto significa que si

$$X \in \mathfrak{G}, \quad Y \in \mathfrak{H}, \quad X \supset Y, \quad (2.1)$$

entonces

$$[Y_i, Y_j] = \sum_k C_{ij}^k Y_k. \quad (2.2)$$

Para construir una cadena de subgrupos se tiene en cuenta un conjunto de términos de (1.32) que cumplan las propiedades de grupo. La primera cadena de $U(6)$, correspondiente al límite vibracional se construye de la siguiente manera, considerando los 25 generadores

$$\begin{aligned}
 G_0^{(0)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(0)} & 1 & \\
 G_\mu^{(1)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)} & 3 & \\
 G_\mu^{(2)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(2)} & 5 & \\
 G_\mu^{(3)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(3)} & 7 & \\
 G_\mu^{(4)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(4)} & 9 & \\
 & & \overline{25} & \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

cerrados bajo el álgebra unitaria de $U(5)$ construyéndose de esta forma el primer subgrupo. Ahora, teniendo en cuenta el conjunto de los siguientes 10 operadores

$$\begin{aligned}
 G_\mu^{(1)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)} & 3 & \\
 G_\mu^{(3)}(d, d) &= [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(3)} & 7 & \\
 & & \overline{10}, & \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

se forma un subgrupo de $U(5)$, el subgrupo ortogonal en 5 dimensiones $SO(5)$. Los 3 generadores

$$G_\mu^{(1)}(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{(1)} \quad 3,$$

conciben con los generadores del grupo de rotaciones $SO(3)$, obteniendo el subgrupo $SO(3)$ y finalmente la componente

$$G_\mu^{(1)}(d, d) = [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(1)} \quad 1,$$

genera el grupo $SO(2)$, el grupo de rotaciones alrededor del eje z . Para aplicaciones a la física nuclear, se desean estados caracterizados por un valor de momentum angular. Esto tiene como consecuencia la inclusión del grupo de rotaciones en 3 dimensiones $SO(3)$ como una subgrupo de $U(6)$.

De esta forma se obtiene una posible cadena de subgrupos, denominada I

$$\begin{aligned}
 U(6) \supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2) \\
 N, \quad n_d, \quad v, n_\Delta, \quad L, \quad M_L, \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

donde $N, n_d, v, n_\Delta, L, M_L$, son los números cuánticos que caracterizan esta cadena de subgrupos [18].

Entonces la base de $U(5)$ se puede escribir como:

$$|\phi\rangle = |[N], n_d, v, n_\Delta, L\rangle \quad \text{ó} \quad |\phi\rangle = |[N], n_d, n_\beta, n_\Delta, L\rangle \quad (2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} N &= \text{número total de bosones, } N = n_s + n_d, \\ n_d &= \text{número de bosones } d, \\ n_\beta &= \frac{(n_d - v)}{2} = \text{número de parejas de bosones } d \text{ acopladas a } L=0, \\ n_\Delta &= \text{número de tripletes de bosones } d \text{ acoplados a } L=0, \\ L &= \text{número cuántico del momentum angular total.} \end{aligned}$$

Los posibles valores para estos números cuánticos son:

$$\begin{aligned} n_d &= N, N - 1, \dots, 1, 0, \\ v &= n_d, n_d - 2, \dots, 1, \text{ ó } 0; (n_d = \text{par o impar}), \\ n_\beta &= 0, 1, 2, \dots, n_d/2 \text{ ó } (n_d - 1)/2; (n_d = \text{par o impar}), \\ n_\Delta &= 0, 1, \dots, [n_d/3] = \text{al mayor entero } \leq n_d/3, \\ L &= 2\lambda, 2\lambda - 2, \dots, \lambda + 2, \lambda \text{ con } \lambda = v - 3n_\Delta. \end{aligned}$$

En la tabla 2.1 se muestran los valores que pueden tener estos números cuánticos para $N = 7$.

Considerando el hamiltoniano en términos de los operadores de Casimir, ecuación (1.41), y teniendo en cuenta sólo los operadores correspondientes a los subgrupos en el límite vibracional se tiene:

$$\begin{aligned} H^1 &= e_0 + e_1 C_1(U(6)) + e_2 C_2(U(6)) + \varepsilon C_1(U(5)) + \alpha C_2(U(5)) \\ &\quad + \beta C_2(SO(5)) + \gamma C_2(SO(3)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dados los valores esperados para los operadores de Casimir en la tabla 1.1, se pueden determinar los valores para la energía en este límite

$$\begin{aligned} E^1(N, n_d, v, n_\Delta, L) &= \langle [N], n_d, v, n_\Delta, L | H^1 | [N], n_d, v, n_\Delta, L \rangle \\ &= e_0 + e_1 N + e_2 N(N + 5) + \varepsilon n_d + \alpha n_d(n_d + 4) \\ &\quad + \beta 2v(v + 3) + \gamma 2L(L + 1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

n_d	v	n_β	n_Δ	λ	L
7	7	0	2	1	2
			1	4	8,6,5,4
			0	7	14,12,11,10,9,8,7
	5	1	1	2	4,2
			0	5	10,8,7,6,5
	3	2	1	0	0
			0	3	6,4,3
1	3	0	1	2	
6	6	0	2	0	0
			1	3	6,4,3
			0	6	12,10,9,8,7,6
	4	1	1	1	2
			0	4	8,7,6,5,4
	2	2	0	2	4,2
	0	3	0	0	0
5	5	0	1	2	4,2
			0	5	10,8,7,6,5
	3	1	1	0	0
			0	3	6,4,3
1	2	0	1	2	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2	2	0	0	2	4,2
	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	2
0	0	0	0	0	0

Tabla 2.1: Valores permitidos para los números cuánticos, con $N = 7$

Renombrando por comodidad los índices y haciendo $E_0 = e_0 + e_1 N + e_2 N(N + 5)$ se tiene

$$E^1(N, n_d, v, n_\Delta L) = E_0 + \varepsilon' n_d + \alpha' n_d(n_d + 4) + \beta' 2v(v + 3) + \gamma' 2L(L + 1). \quad (2.10)$$

De acuerdo a [18], los valores de la energía son

$$E^1(N, n_d, v, n_\Delta L) = E_0 + \varepsilon n_d + \alpha \frac{1}{2} n_d(n_d - 1) + \beta(n_d - v)(n_d + v + 3) + \gamma[L(L + 1) - 6n_d], \quad (2.11)$$

con

$$\begin{aligned} \gamma &= 2\gamma' \\ \beta &= s\beta' \\ \alpha &= 2\alpha' + 4\beta' \\ \varepsilon &= \varepsilon' + 5\alpha' + 8\beta' + 12\gamma'. \end{aligned}$$

Ahora si se tiene en cuenta que $v = n_d - 2n_\beta$, se obtiene la expresión para las energías de excitación utilizada en el paquete de programas PHINT¹ [19].

$$E^1(N, n_d, v, n_\Delta L) = \varepsilon n_d + \alpha \frac{1}{2} n_d(n_d - 1) + 2n_\beta \beta(2n_d - 2n_\beta + 3) + \gamma[L(L + 1) - 6n_d]. \quad (2.12)$$

Considerando ahora, el hamiltoniano en término de los bosones s y d , ecuación (1.34), para el límite vibracional, donde el primer término representa la energía de los bosones d y el segundo la interacción entre ellos,

$$H^1 = \varepsilon_d(d^\dagger \cdot \tilde{d}) + \frac{1}{2} \sum_{L=0,2,4} (2L + 1)^{\frac{1}{2}} c_L [[d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(L)}]_0^{(0)}, \quad (2.13)$$

se puede obtener el hamiltoniano (2.8) por medio de las siguientes relaciones [18],

$$\begin{aligned} c_4 &= \alpha + 8\beta, \\ c_2 &= \alpha - 6\gamma \\ c_0 &= \alpha + 10\beta - 12\gamma, \end{aligned} \quad (2.14)$$

¹Se utiliza en los casos límite para probarlo y usarlo en la transición $U(5) \rightarrow SU(3)$

y sus relaciones inversas

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (4c_2 + 3c_4)/7 \\
 \beta &= (7c_0 - 10c_2 + 3c_4)/70, \\
 \gamma &= (c_4 - c_2)/14.
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

En la tabla 2.2 se encuentra la equivalencia entre las constantes del programa y las encontradas en la literatura.

Literatura	Programa
ε_s	0
$\varepsilon_d - \varepsilon_s$	HBAR
c_0, c_2, c_4	$C(1), C(2), C(3)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}v_2$	F
$\frac{1}{2}v_0$	G
$\frac{1}{\sqrt{5}}u_2$	CH2
u_0	CH1

Tabla 2.2: Equivalencia entre las constantes utilizadas en el programa PCIBAXW, que forma parte del paquete PHINT [19] y las que se encuentran en la literatura para el caso vibracional

2.2 Resultados

La región más favorable para aplicar el modelo de bosones interactuantes en el límite vibracional es aquella que presenta N^2 (ó Z) entre 4 y 6 partículas por fuera de capa cerrada y Z (ó N) entre 8 y 10 [18]. Algunos de los núcleos que exhiben este comportamiento son ^{102}Ru , ^{110}Cd y ^{188}Pt (figura 1.15). Una condición para poder aplicar esta descripción es que la relación entre las energía del primer y segundo estado sea $E_{4_1^+}/E_{2_1^+} \sim 2$.

En este capítulo, se discute la aplicación del IBM al $^{110}_{48}\text{Cd}_{62}$, con $N = 7$ bosones y $E_{4_1^+}/E_{2_1^+} = 2.3$.

Teniendo en cuenta los valores permitidos para los números cuánticos $N, n_d, v, n_\beta, n_\Delta, L$, tabla 2.1, se puede organizar el espectro de acuerdo a una serie de “bandas” $Y, X, Z, X', X', Z', \beta, \Delta$ [18], de acuerdo a

²Número de neutrones en el núcleo

$$\begin{aligned}
 \text{banda-Y} & \quad |n_d, v = n_d, n_\Delta = 0, L = 2n_d\rangle \\
 \text{banda-X} & \quad |n_d, n_d, 0, L = 2n_d - 2\rangle \\
 \text{banda-Z} & \quad |n_d, n_d, 0, L = 2n_d - 3\rangle \\
 \text{banda-X'} & \quad |n_d, n_d, 0, L = 2n_d - 4\rangle \\
 \text{banda-Z'} & \quad |n_d, n_d, 0, L = 2n_d - 5\rangle \\
 \text{banda} - \beta & \quad |n_d, n_d - 2, 0, L = 2n_d - 4\rangle \\
 \text{banda} - \Delta & \quad |n_d, n_d, 1, L = 2n_d - 6\rangle
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

con $n_d = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ para este caso particular.

Se determinaron para 5 grupos de constantes diferentes los valores analíticos para la energía de excitación de acuerdo a (2.12). En la tabla 2.3 se muestran las constantes utilizadas en cada uno de los casos, para los casos 1 y 4 las constantes se toman de la literatura [15], y los demás casos corresponden a variaciones hechas a partir de los casos 1 y 4; en la tabla 2.4 se presentan los porcentajes de error en cada uno de los casos

Constantes	Caso1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
HBAR	722	657.8	722	740	740
c_0	29	29	30	30	30
c_2	-42	-42	-42	-120	-120
c_4	98	98	100	100	10
Valores en KeV					

Tabla 2.3: Valores de las constantes en cada uno de los casos

Para escoger el grupo de constantes con el que se va a trabajar se tiene en cuenta el promedio del porcentaje de error más bajo, teniendo presente que el modelo de bosones interactuantes se aplica a estados con baja energía de excitación

En la figura 2.1, se muestra el espectro analítico para el ^{110}Cd , se observa que la diferencia entre los niveles de energía es casi constante, hecho por el cual este límite recibe el nombre de vibracional, además se aprecia la existencia del triplete ($0^+, 2^+, 4^+$) al doble de la energía del estado 2_1^+ . La forma de clasificación por bandas no es la única posible, también se puede tener en cuenta parejas de (n_d, n_Δ) y obtener un espectro similar [14].

Los valores obtenidos para el espectro de energía tanto en el caso analítico como en el calculado con PCIBXW coinciden, ya que éste utiliza la base de $U(5)$ para determinar los elementos matriciales del hamiltoniano a solucionar. En la figura 2.2 se muestra la comparación entre las energías experimentales [20] y las calculadas para estados de baja energía

L^π	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
2^+	10	0,01	10	4	13
4^+	0,03	8	0,1	7	3
6^+	1	9	1	7	9
8^+	6	2	6	0,1	8
10^+	27	18	27	22	5
Baja energía de excitación	4	5	4	5	8
Porcentaje de error por banda					
Por banda	18	14	18	18	8
$\%error = \frac{ E_{exp} - E_{cal} }{E_{exp}} \times 100$					

Tabla 2.4: Porcentajes de error entre los valores experimentales y los valores analíticos

de excitación, obteniendo una buena descripción para la banda del estado base (banda Y). Aunque se reproduce la existencia del triplete al doble de la energía del estado 2_1^+ , no se están reproduciendo sus valores experimentales.

De acuerdo a la clasificación de las bandas (2.16) se puede determinar la contribución de las constantes a ajustar en el límite vibracional. Teniendo en cuenta la expresión para la energía (2.12) y las relaciones (2.15) se hace un análisis para las bandas Y, X y β .

Para la banda Y se tiene $v = n_d$, por lo tanto $n_\beta = 0$, en general la única banda para la que n_β no es cero es la banda β . Con $n_\beta = 0$ la expresión para la energía toma la forma

$$E^I(N, n_d, v, n_\Delta, L) = \varepsilon n_d + \alpha \frac{1}{2} n_d (n_d - 1) + \gamma [L(L + 1) - 6n_d]. \quad (2.17)$$

dependiendo sólo de los valores α y γ y por lo tanto de c_2 y c_4 . Para la banda Y se tienen los siguientes casos

- $n_d = 0$, $L = 0$ por lo tanto $E = 0$, que corresponde al estado base.
- $n_d = 1$, $L = 2$, que corresponde al estado excitado 2_1^+ , la energía para este estado es

$$E_{2_1^+} = \varepsilon, \quad (2.18)$$

de esta forma se puede determinar el valor de ε a partir del valor de la energía del estado 2_1^+ y ésta se puede conocer de los espectros experimentales. Por lo tanto la

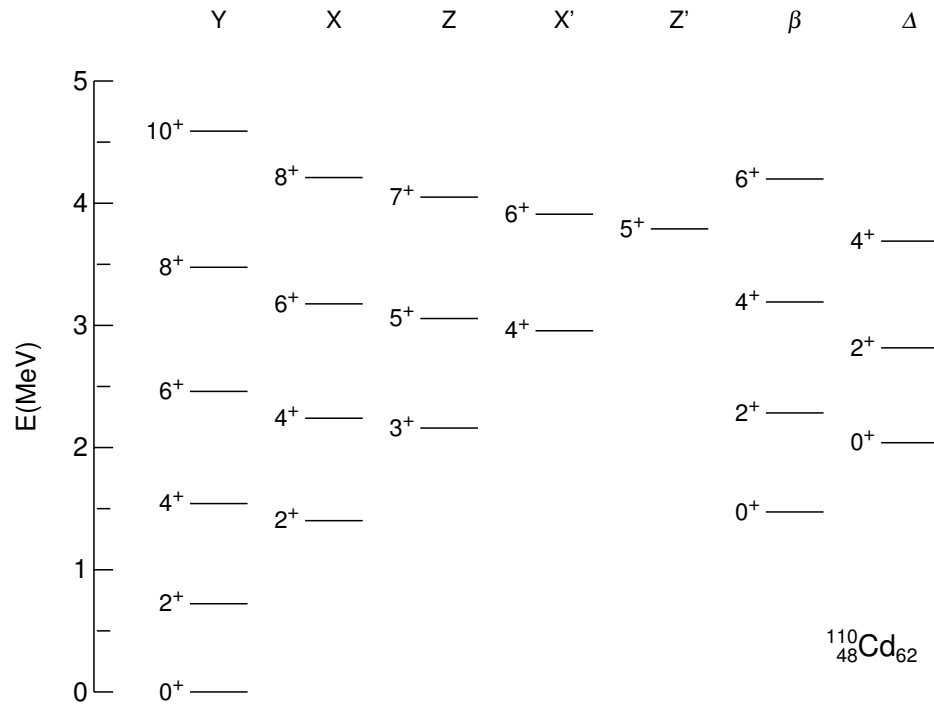


Figura 2.1: Niveles de energía analíticos para el núcleo ¹¹⁰Cd. En la parte superior se señala la banda correspondiente

energía del estado 2_1^+ se conoce a partir del valor de ε y es independiente de los valores de c_0, c_2, c_4 .

- $n_d = 2, L = 4$, que corresponde al estado 4_1^+ , la energía es

$$\begin{aligned} E_{4_1^+} &= 2\varepsilon + \alpha + 8\gamma \\ &= 2\varepsilon + c_4, \end{aligned} \tag{2.19}$$

por lo tanto una vez determinado ε se puede obtener c_4 , de esta forma la energía del estado 4_1^+ es independiente de los valores de c_0 y c_2 . Además el término c_4 está introduciendo la contribución de la interacción entre bosones, ya que si se supone un vibrador puro, la energía de $E_{4_1^+}$ quedaría determinada por ε

En general las energías de la banda Y no depende del valor que tome c_0 , debido a que el factor β no aparece en la expresión de la energía para esta banda.

Para la banda X, la energía está dada por (2.17). Para esta banda el estado excitado 2_X^+ correspondiente al estado 2_2^+ que pertenece al triplete ($0^+, 2^+, 4^+$) que aparece al doble

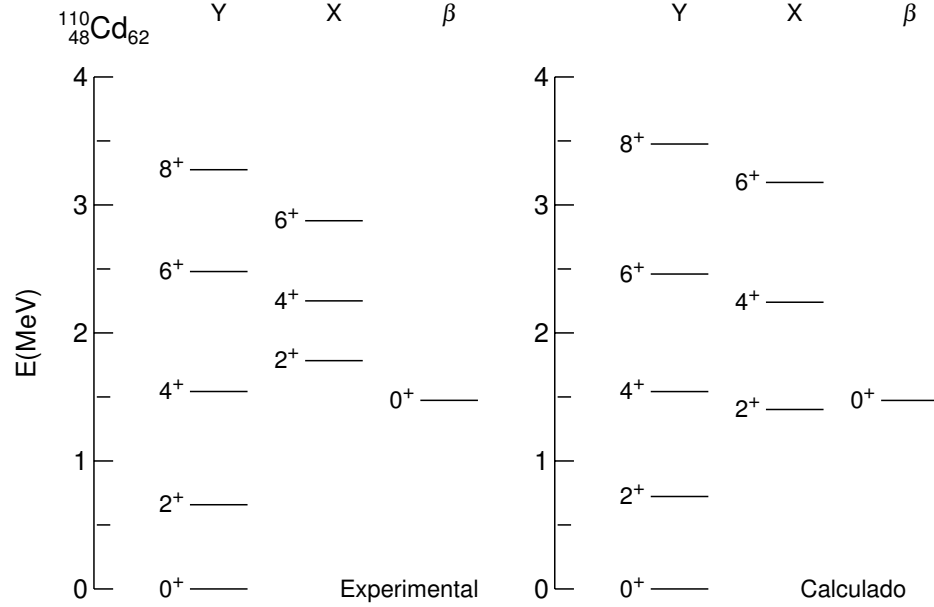


Figura 2.2: Comparación de las energías experimentales con las calculadas

de la energía del primer estado excitado, tiene $n_d = 2$ y $L = 2$, con lo que la expresión de la energía toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} E_{2_2^+} &= 2\varepsilon + \alpha - 6\gamma \\ &= 2\varepsilon + c_2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

quedando así determinado el valor de c_2 conociendo el valor de ε y $E_{2_2^+}$ a partir de un espectro experimental. Si no existiera el término de interacción $c_2 = c_4 = 0$, entonces las energías de 2_2^+ y 4_1^+ serían degeneradas.

Para determinar el valor de c_0 se debe tener en cuenta la banda β ya que para esta banda $n_\beta = 1$ y el término β contribuye a la energía, ésta tiene la misma forma que (2.12). Para el estado 0_β^+ correspondiente al estado 0_2^+ se tiene $n_d = 2$ y $L = 0$, obteniendo la siguiente expresión para la energía

$$\begin{aligned} E_{0_2^+} &= 2\varepsilon + \alpha + 10\beta - 6\gamma \\ &= 2\varepsilon + c_0 + \frac{3}{7}(c_2 + c_4), \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde c_0 se puede determinar una vez se conozcan los valores de $E_{0_2^+}$, c_2 y c_4 .

Ahora teniendo en cuenta algunos casos especiales, por ejemplo, para $c_2 = c_4$, la energía es independiente del valor de L y por lo tanto va a ser degenerada para los mismos valores de n_d , en las distintas bandas, a excepción de la banda β que tiene una contribución adicional debido a $n_\beta = 1$.

Para $c_2 > c_4$, se tiene $\gamma < 0$, por lo tanto la contribución del término de momentum angular es negativa, por el contrario si $c_2 < c_4$, $\gamma > 0$ y la contribución se hace positiva. Si $c_2 < 0$ la contribución de γ es mayor que si c_2 y c_4 son positivos.

Análisis similares se pueden hacer con las otras bandas, siempre y cuando se conozcan los valores experimentales de sus espectros.

Capítulo 3

Límite Rotacional

En este capítulo se discute la aplicación del modelo de bosones interactuantes al núcleo ^{156}Gd [21], obteniendo su espectro de forma analítica y calculándolo haciendo uso del programa PCIBXW [19].

3.1 Cadena II: Límite SU(3)

La determinación de la segunda cadena de subgrupos de U(6) no es tan directa como en el caso vibracional, aquí se deben tener en cuenta combinaciones lineales de los 36 generadores en (1.32).

Considerando los siguientes operadores cerrados bajo el álgebra de U(3)

$$\begin{array}{ll} G_0^{(0)}(s, s) + \sqrt{5}G_0^{(0)}(d, d) & 1 \\ G_\mu^{(1)}(d, d) & 3 \\ G_\mu^{(2)}(d, s) + G_\mu^{(2)}(s, d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}G_\mu^{(2)}(d, d) & 5 \\ & \overline{9}, \end{array} \quad (3.1)$$

donde el signo \pm en el último término se refiere a momentos cuadrupolares positivos (+) y negativos (-), se pueden determinar los generadores del grupo de transformaciones unitarias en tres dimensiones SU(3), donde no se tiene en cuenta el operador del número total de bosones, $\hat{N} = G_0^{(0)}(s, s) + \sqrt{5}G_0^{(0)}(d, d)$ [14], obteniéndose

$$\begin{array}{rcl}
 G_{\mu}^{(1)}(d, d) & & 3 \\
 G_{\mu}^{(2)}(d, s) + G_{\mu}^{(2)}(s, d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}G_{\mu}^{(2)}(d, d) & & 8 \\
 & & \overline{9}.
 \end{array} \tag{3.2}$$

Subgrupos de (3.2) se pueden formar considerando

$$\begin{array}{rcl}
 G_{\mu}^{(1)}(d, d) = [d^{\dagger} \times \tilde{d}_{\mu}^{(1)}] & & 3 \\
 G_{\mu}^{(1)}(d, d) = [d^{\dagger} \times \tilde{d}_0^{(1)}] & & 1,
 \end{array} \tag{3.3}$$

para así obtener los subgrupos SO(3) y SO(2) respectivamente. Encontrando una cadena de subgrupos denominada II.

$$\begin{array}{l}
 \text{U}(6) \supset \text{SU}(3) \supset \text{SO}(3) \supset \text{SO}(2) \\
 N, \quad (\lambda, \mu), K, \quad L, \quad M_L,
 \end{array} \tag{3.4}$$

donde N , (λ, μ) , K , L , M_L , son los números cuánticos que caracterizan esta cadena de subgrupos [22] y se definen como

$$\begin{array}{l}
 N = \text{número total de bosones, } N = n_s + n_d, \\
 (\lambda, \mu) = \text{números cuánticos de SU}(3), \\
 L = \text{número cuántico del momentum angular total,} \\
 M_L = \text{proyección del momentum angular total,}
 \end{array}$$

con los siguientes posibles valores [15],

$$\begin{array}{l}
 \mu = 0, 2, 4, \dots, \\
 \lambda = 2N - 6I - 2\mu \text{ con } I = 0, 1, \dots \text{ y } N = \text{número de bosones,} \\
 K = \text{entero} = 0, 2, 4, \dots, \min\{\lambda, \mu\}.
 \end{array}$$

En la determinación de los valores de L se tienen los siguientes casos

- $K = 0, L = 0, 2, 4, \dots, \max\{\lambda, \mu\}$,
- $K > 0, L = K, K + 1, K + 2, \dots, K + \max\{\lambda, \mu\}$.

De acuerdo a lo anterior sucede que valores de L que pertenecen al mismo doblete (λ, μ) , tienen la misma energía, por lo tanto son estados degenerados.

En la tabla 3.1 se muestran los valores permitidos para estos números cuánticos.

I	(λ, μ)	K	L
0	(24,0)	0	0, 2, 4, ... 24
0	(20,2)	0	0, 2, 4, ... 20
		2	2, 3, 4, ... 22
0	(16,4)	0	0, 2, 4, ... 16
		2	2, 3, 4, ... 18
		4	4, 5, 6, ... 20
0	(12,6)	0	0, 2, 4, ... 12
		2	2, 3, 4, ... 14
		4	4, 5, 6, ... 16
		6	6, 7, 8, ... 18
1	(18,0)	0	0, 2, 4, ... 18

Tabla 3.1: Valores permitidos para los números cuánticos, con $N=12$

Para determinar los valores de energía de excitación se debe tener en cuenta el hamiltoniano en término de los operadores de Casimir de los subgrupos que están incluidos en esta cadena, de esta forma se obtiene para el hamiltoniano

$$\begin{aligned}
 H^{\text{II}} = & e_0 + e_1 C_1(U(6)) + e_2 C_2(U(6)) + \beta C_2(SO(5)) \\
 & + \gamma C_2(SO(3)) + \delta C_2(SU(3)),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

y para los valores de energía

$$E^{\text{II}}(N, \lambda, \mu, K, L) = E_0 + 2\gamma L(L + 1) + \delta \frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)), \tag{3.6}$$

con $E_0 = e_0 + e_1 N + e_2 N(N + 5)$.

Si se considera ahora, el hamiltoniano en su expresión multipolar, ecuación (1.36), de acuerdo a [22] se tiene

$$H^{\text{II}} = -\kappa' \hat{L} \cdot \hat{L} - \kappa 2 \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \tag{3.7}$$

con sus respectivos valores de energía

$$E^{\text{II}}(N, \lambda, \mu, K, L) = \alpha L(L + 1) - \beta(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)), \quad (3.8)$$

con

$$\alpha = \frac{3}{4}\kappa - \kappa', \quad \beta = \kappa. \quad (3.9)$$

3.2 Resultados

Para un número de partículas grande por fuera de capa cerrada, la descripción en términos del límite rotacional es adecuada. Una condición necesaria es que la banda correspondiente al estado base sea proporcional a $L(L + 1)$, de ahí el nombre de límite rotacional, para que esto suceda se debe cumplir $E_{4_1^+}/E_{2_1^+} \sim 3.33$ [22]. Las regiones ($A \gtrsim 80$) donde esto ocurre, se muestran en la figura 1.15.

El enfoque se hace en la descripción del núcleo $^{156}_{64}\text{Gd}_{92}$, con $E_{4_1^+}/E_{2_1^+} = 3.24$ y con $N = 12$ bosones.

Se determinaron para 4 grupos de constantes diferentes¹ las energías de forma analítica, en la tabla 3.2 se muestra la equivalencia entre los valores utilizados en el programa y los valores en la literatura y en la tabla 3.3 se muestran los valores utilizados en cada caso.

Caso	Literatura	Programa
1	$4\gamma + \delta$	ELL
	$\frac{3}{8}\delta$	QQ
2	$\frac{3}{2}\xi + 2\gamma_v$	ELL
	4ξ	QQ
3	$2a_1$	ELL
	$2a_2$	QQ
4	$2\alpha - \frac{3}{2}\beta$	ELL
	-4β	QQ

Tabla 3.2: Equivalencia entre las constantes utilizadas en el programa PCIBXW y las que se encuentran en la literatura, para el caso rotacional

Para determinar con que grupo de constantes trabajar se hallan los porcentajes de error entre los valores analíticos y los valores experimentales [20] para la banda del estado base,

¹En el apéndice B se muestra el desarrollo de las equivalencias en cada caso

Caso	Literatura	Programa
1	$\gamma = 3.8$ $\delta = -20.1$	ELL=-4.9 QQ=53.6
2	$\xi = -7$ $\gamma_v = 13$	ELL=15.5 QQ=-28
3	$a_1 = 9.17$ $a_2 = -15.07$	ELL=18.35 QQ=-30.16
4	$\alpha = 13.40$ $\beta = 7.6$	ELL=15.4 QQ=-30.4

Tabla 3.3: Valores en KeV utilizados en cada caso, tomados de [14],[21], [23] y [22] respectivamente

esto es ($\lambda = 24, \mu = 0$), tabla 3.4, y se escoge el grupo que tenga en promedio el menor porcentaje de error para los estados de baja energía de excitación

L^π	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
2 ⁺	49	12	0.1	10
4 ⁺	47	10	3	7
6 ⁺	45	7	6	4
8 ⁺	43	3	10	0.03
10 ⁺	41	1	15	4
Baja energía de excitación	45	7	7	5

Tabla 3.4: Porcentajes de error entre los valores experimentales y los valores analíticos

A partir de este momento se trabaja con el caso 4, ya que su porcentaje de error es el menor.

Como se observa en la figura 3.1, el espectro en su banda base tiene características rotacionales, sus niveles no están igualmente espaciados; las bandas con $K = 0$ y $K = 2$ para la pareja (20,2) corresponden a las bandas β y γ relacionadas con las vibraciones en un núcleo deformado.

Al hacer la comparación de los valores analíticos con los calculados, se encuentra que estos

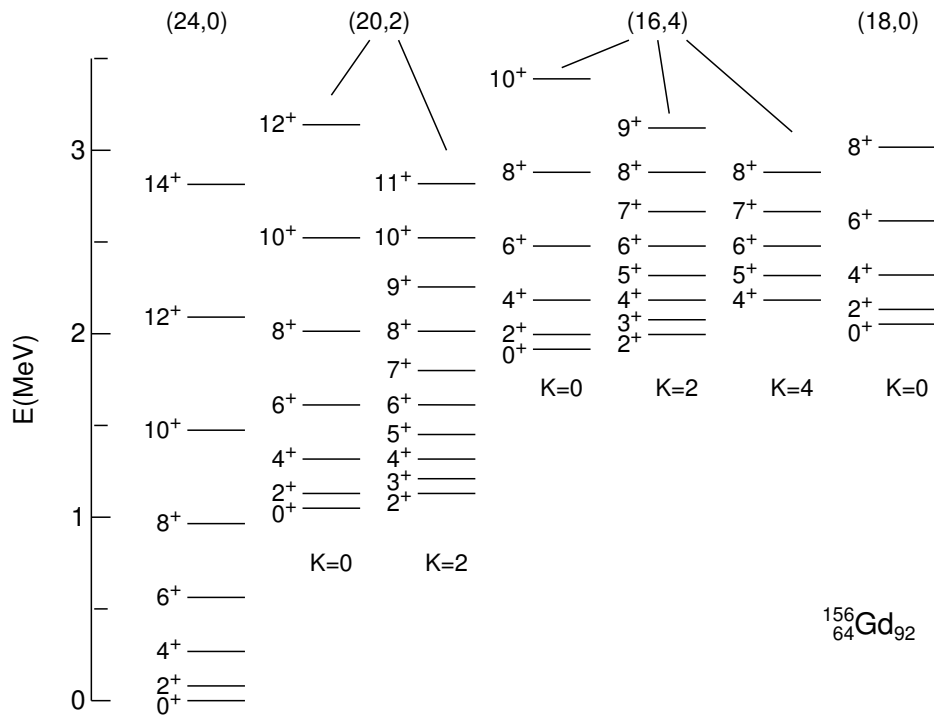


Figura 3.1: Niveles de energía analíticos para el núcleo ^{156}Gd . Las parejas (λ, μ) se muestran en paréntesis

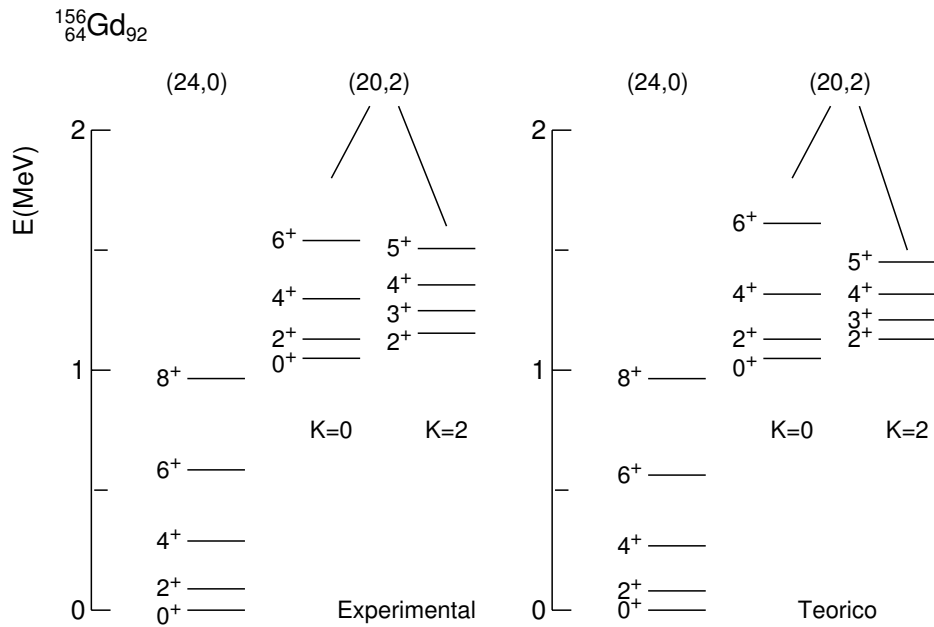


Figura 3.2: Comparación de las energías experimentales con las analíticas

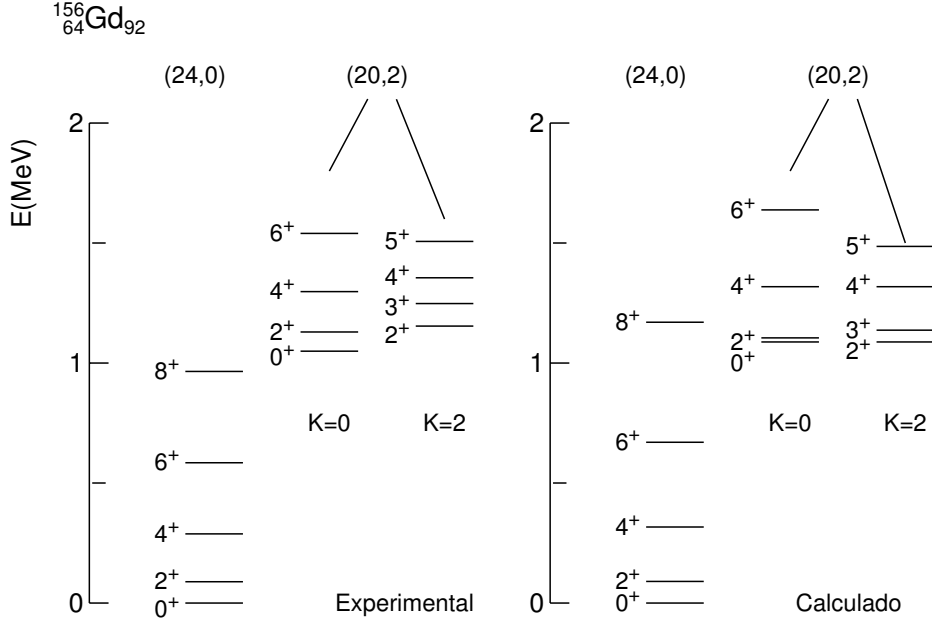


Figura 3.3: Comparación de las energías experimentales con las calculadas con PCIBAXW

difieren entre sí, esto se debe a que el programa con el que se trabaja [19], usa como base la de $U(5)$, por lo tanto las funciones de onda en el límite $SU(3)$, son combinaciones lineales de los estados base de $U(5)$ y de esta manera existe un factor proporcional al valor esperado de n_d que afecta los resultados en los valores calculados [23].

Tanto en el caso analítico (figura 3.2) como en el calculado (figura 3.3), se reproduce de forma adecuada la banda del estado base, mientras que para las bandas correspondientes a las excitaciones, los valores analíticos están más de acuerdo con los experimentales.

Cuando se tiene el término $\beta = 0$ se obtiene el espectro de un rotor cuántico, con energías proporcionales a $L(L + 1)$.

Como una consideración aproximada, se puede asumir que el ^{156}Gd es un rotor puro, es decir que sus energías sólo son proporcionales a $L(L + 1)$ y la expresión para la energía toma la siguiente forma

$$E^{\text{II}}(N, \lambda, \mu, K, L) = \alpha L(L + 1). \quad (3.10)$$

Además,

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} L(L + 1), \quad (3.11)$$

de esta forma se tiene $\alpha = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}}$, se determina un valor de α para el cual los valores de energía

obtenidos sean próximos a los valores experimentales, se encuentra un valor promedio de $\alpha = 13.89$ KeV.

De acuerdo a la tabla 3.2 y a las ecuaciones (3.10) y (3.11) se tiene

$$ELL = \frac{\hbar^2}{\mathcal{J}} \quad (3.12)$$

Con lo que se encuentra

$$\frac{\mathcal{J}}{\hbar^2} = 36 \frac{1}{\text{MeV}} \quad (3.13)$$

De forma analítica, se asume que el momento de inercia del núcleo corresponde al de un elipsoide de revolución, $\mathcal{J} \approx \frac{2}{5}MR^2$, en este caso $R = r_0A^{1/3}$ y $M = A(u.m.a)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{2}{5}A(u.m.a)r_0^2A^{2/3} \\ &= \frac{2}{5}r_0^2A^{5/3}(u.m.a), \end{aligned} \quad (3.14)$$

con $A = 156$, $r_0 = 1.2$ fm, $1 u.m.a = 931.5016$ MeV, $\hbar c = 197.3$ MeVfm, se obtiene

$$\frac{\mathcal{J}}{\hbar^2} = 62.5 \frac{1}{\text{MeV}} \quad (3.15)$$

Se observa que $\mathcal{J}_{\text{exp}} < \mathcal{J}_{\text{teo}}$, es decir que el núcleo tiene menos inercia que el esperado teóricamente [5] usando un modelo clásico. Esto sucede porque el núcleo tiene un comportamiento que se asemeja a un superfluido, y de ahí que el momento de inercia sea menor que el esperado clásicamente.

Capítulo 4

Límite γ -soft

En este capítulo se muestra la aplicación del IBM al núcleo ^{196}Pt [24], comparando el espectro experimental con el obtenido de forma analítica.

4.1 Cadena III: Límite $\text{SO}(6)$

La última cadena de subrupos de $\text{U}(6)$ se construye teniendo en cuenta el siguiente grupo de generadores [14]

$$\begin{aligned} G_{\mu}^{(1)}(d, d) &= [d^{\dagger} \times \tilde{d}]_{\mu}^{(1)} & 3 \\ G_{\mu}^{(3)}(d, d) &= [d^{\dagger} \times \tilde{d}]_{\mu}^{(3)} & 7 \\ G_{\mu}^{(2)}(d, s) + G_{\mu}^{(2)}(s, d) &= [d^{\dagger} \times \tilde{s} + s^{\dagger} \times \tilde{d}]_{\mu}^{(2)} & 5 \\ & & \overline{15}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

cerrados bajo el álgebra de transformaciones ortogonales en seis dimensiones $\text{SO}(6)$. Sin tener en cuenta los operadores $G_{\mu}^{(2)}(d, s) + G_{\mu}^{(2)}(s, d)$, se encuentra un conjunto de generadores cerrados bajo el álgebra de $\text{SO}(5)$,

$$\begin{aligned} G_{\mu}^{(1)}(d, d) &= [d^{\dagger} \times \tilde{d}]_{\mu}^{(1)} & 3 \\ G_{\mu}^{(3)}(d, d) &= [d^{\dagger} \times \tilde{d}]_{\mu}^{(3)} & 7 \\ & & \overline{10}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nuevamente se encuentran los generadores

$$G_{\mu}^{(1)}(d, d) = [d^{\dagger} \times \tilde{d}_{\mu}^{(1)}] \quad 3,$$

y

$$G_{\mu}^{(1)}(d, d) = [d^{\dagger} \times \tilde{d}_0^{(1)}] \quad 1,$$

correspondiente a los grupos de rotaciones $SO(3)$ y $SO(2)$ respectivamente. De esta forma se obtiene una posible cadena de subgrupos, denominada III

$$\begin{aligned} U(6) \supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2) \\ N, \quad \sigma, \quad \tau, \nu_{\Delta}, \quad L, \quad M_L, \end{aligned}$$

con $N, \sigma, \tau, \nu_{\Delta}, L, M_L$, los números cuánticos que caracterizan el límite $SU(3)$ [24]. La definición de τ y ν_{Δ} es la misma que la de v y n_{Δ} en el caso vibracional.

Los valores que toman estos números son

$$\begin{aligned} \sigma &= N, N - 2, \dots, 0, \text{ ó } 1; (N = \text{par o impar}), \\ \tau &= \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0 \\ \nu_{\Delta} &= 0, 1, \dots, [\sigma/3] = \text{al mayor entero } \leq \sigma/3, \\ L &= 2\lambda, 2\lambda - 2, \dots, \lambda + 2, \lambda \text{ con } \lambda = \tau - 3\nu_{\Delta}. \end{aligned}$$

En la tabla 4.1 se muestran los valores permitidos para estos números con $N = 6$.

En la determinación de los valores de energía de excitación se tiene en cuenta el hamiltoniano en términos de los operadores de casimir y los valores esperados para estos (tabla 1.1). El hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} H = e_0 + e_1 C_1(U(6)) + e_2 C_2(U(6)) + \beta C_2(SO(5)) \\ + \gamma C_2(SO(3)) + \eta C_2(SO(6)) + \delta C_2(SU(3)), \end{aligned} \quad (4.3)$$

con la energía dada por

$$\begin{aligned} E^{\text{III}}(N, \sigma, \tau, \nu_{\Delta} L) &= \langle [N], \sigma, \tau, \nu_{\Delta} L | H^{\text{III}} | [N], \sigma, \tau, \nu_{\Delta} L \rangle \\ &= E_0 + \beta 2\tau(\tau + 3) + \eta 2\sigma(\sigma + 4) \\ &\quad + \gamma 2L(L + 1). \end{aligned} \quad (4.4)$$

σ	τ	ν_{Δ}	λ	L	
6	6	2	0	0	
		1	3	6,4,3	
		0	6	12,10,9,8,7,6	
	5	1	2	4,2	
		0	5	10,8,7,6,5	
	4	1	1	2	
		0	4	8,6,5,4	
	3	1	0	0	
		0	3	6,4,3	
	2	0	2	4,2	
		1	0	1	2
	1	0	0	0	0
		0	0	0	0
	4	4	1	1	2
0			4	8,6,5,4	
3		1	0	0	
		0	3	6,4,3	
2		0	2	4,2	
		1	0	1	2
1	0	0	0	0	
	0	0	0	0	
2	2	0	2	4,2	
		1	0	1	2
	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	
		0	0	0	

Tabla 4.1: Esquema de clasificación para el límite γ -soft. Valores permitidos para los números cuánticos, $N = 6$.

con $E_0 = e_0 + e_1 N + e_2 N(N + 5)$.

De acuerdo a [24] los valores para energía son

$$E([N], \sigma, \tau, n_\Delta, L) = A(N - \sigma)(N + \sigma + 4)/4 + B\tau(\tau + 3)/6 + CL(L + 1) \quad (4.5)$$

que es justamente la expresión utilizada en el programa [19] con las constantes de (4.4) y (4.5) relacionadas por

$$\begin{aligned} A &= -8\eta, \\ B &= 12\beta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$C = 2\gamma. \quad (4.7)$$

En la tabla 4.2 se muestra la equivalencia entre las constantes del programa y las de la literatura

Literatura	Programa
A	-2QQ
B	15OCT-3QQ
C	(ELL-OCT)/2

Tabla 4.2: Equivalencia entre las constantes utilizadas en el programa PCIBAXW y las que se encuentran en la literatura para el caso γ -soft.

4.2 Resultados

Los estudios experimentales muestran dos regiones en la tabla de núclidos en donde los espectros son similares al obtenido en el límite SO(6). Estas regiones figura 1.15, se presentan al final de las regiones con $N=50-82$ y $N=82-126$ (N número de neutrones) [24]. Para el caso γ -soft, la relación entre $E_{4_1^+}/E_{2_1^+}$ es proporcional a 2.5.

Para la aplicación de éste límite se escoge el $^{196}\text{Pt}_{118}$ [24], con $E_{4_1^+}/E_{2_1^+} = 2.47$ y $N=6$ bosones.

En la tabla 4.3 se muestran los valores utilizados para determinar tanto el espectro analítico como el calculado con PCIBAXW.

Constantes
Programa
ELL=22.9
QQ=-85.5
OCT=2.9

Tabla 4.3: Valores en KeV utilizados [24]

Teniendo en cuenta los valores permitidos para los número cuánticos (tabla 4.1) y la ecuación (4.5) se determinan las energías de excitación. En este caso los valores de las energías calculados y analíticos coinciden al igual que en el caso vibracional, este resultado se espera ya que los elementos de la base toman valores similares excepto por los valores de n_d en el caso vibracional y σ en este caso. Los valores obtenidos se muestran en la figura 4.1.

Una de las diferencias principales entre los límites vibracional y γ -soft, es la ubicación del estado 0_2^+ . En el caso vibracional este estado hace parte de un triplete con $n_d = 2$ junto con los estados 4_1^+ y 2_2^+ , por lo tanto su energía es cercana a dos veces la energía del estado 2_1^+ , mientras que en el caso γ -soft, mirando la figura 4.1, tiene una energía mayor a la del estado 2_1^+ , más cercana incluso a la energía del estado 3_1^+ .

La primera banda excitada para los valores encontrados de forma analítica presenta una agrupación similar a la de los núcleos con características γ -soft (figura 1.12), por esta razón el límite SO(6) recibe el nombre de γ -soft.

En la figura 4.2 se muestra la comparación entre los valores experimentales y calculados con PCIBAXW.

El programa PCIBAXW reproduce de forma adecuada la banda del estado base, mientras que la banda que experimentalmente corresponde a una banda de vibración γ la ajusta por pares, por ejemplo los valores correspondientes a 3_2^+ y 4_2^+ , se encuentran entre los valores de 3_2^+ y 4_2^+ experimentales, de igual forma para 5_2^+ y 6_2^+ ; aunque individualmente no se están obteniendo los valores de energía, al determinar el porcentaje de error para esta banda se encuentra que es del 8%.

De acuerdo a la discusión en la sección 1.3 y a las ecuaciones (A.10) y (A.13), donde $CHQ = \sqrt{35}/2$ y $CHQ = 0$ respectivamente, el límite γ -soft, está relacionado con un rotor cuya energía ha sido disminuida debido al efecto de $CHQ = 0$ y un término proporcional a la interacción octopolar.

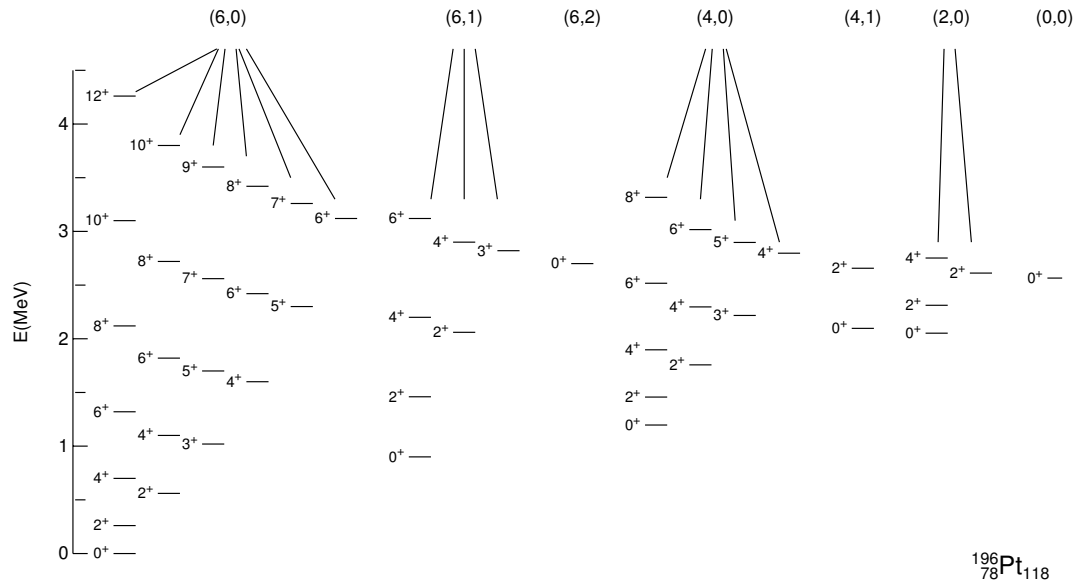


Figura 4.1: Niveles de energía analíticos para el núcleo ^{196}Pt . Las parejas (σ, ν_{Δ}) se muestran en paréntesis

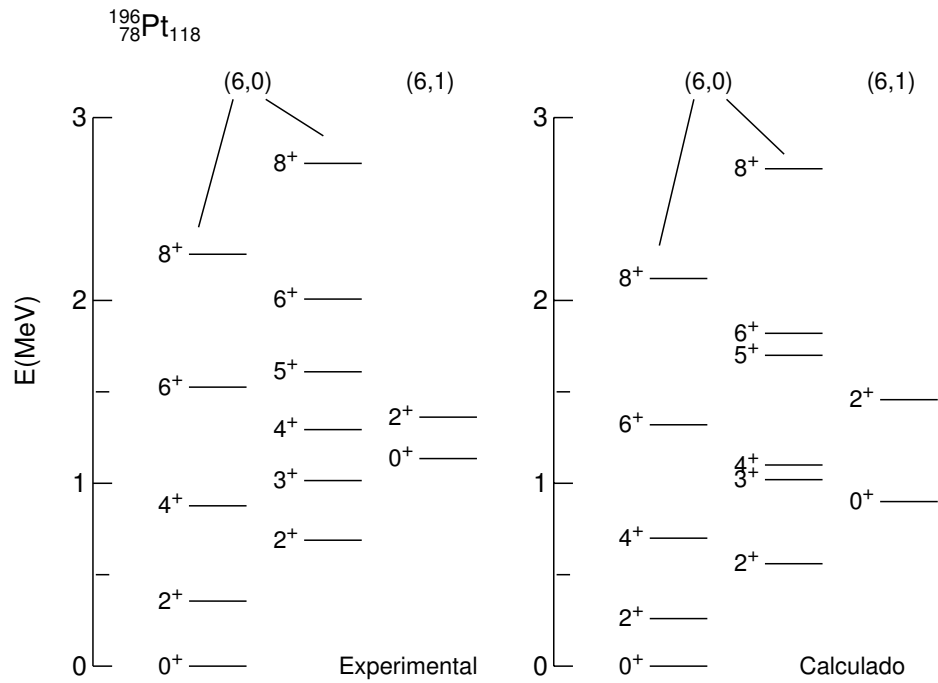


Figura 4.2: Comparación de las energías experimentales con las calculadas con PCIBAXW

Capítulo 5

Transición $U(5) \rightarrow SU(3)$

En el modelo de bosones interactuantes cada una de las simetrías actúa como puntos de referencia determinando regiones de transición nuclear. El espectro de una secuencia de núcleos en una región de este tipo, puede calcularse variando un único parámetro que está relacionado con la posición a lo largo del triángulo de simetrías (figura 1.14).

El hamiltoniano característico de la transición $U(5) \rightarrow SU(3)$ tiene en cuenta los términos vibracional ε'' , rotacional $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$ y de momentum angular $\hat{L} \cdot \hat{L}$.

$$H = \varepsilon \hat{n}_d + a_2 \hat{Q} \cdot \hat{Q} + a_1 \hat{L} \cdot \hat{L} \quad (5.1)$$

De esta forma cerca a capas cerradas el término $\varepsilon \hat{n}_d$ va a dar la mayor contribución, mientras que lejos de capas cerradas la contribución más importantes se debe a a_2 , además a_1 da una contribución proporcional a L , de esta forma el parámetro ε tiene la restricción de decrecer linealmente a medida que aumenta el número de bosones.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \theta N \quad (5.2)$$

donde θ es una constante a determinar.

En la figura 5.1 se observa el efecto de introducir el término $\varepsilon \hat{n}_d$ en un hamiltoniano rotacional [10]. Al introducir este término se varía el valor de las energías de los estados 2_1^+ y 4_1^+ aumentando respecto del valor original y por lo tanto variando la relación $E_{4_1^+}/E_{2_1^+}$, además para la banda β rotacional el valor de energía del estado excitado 0_2^+ está por debajo del valor original, otra característica que se observa es que el valor para el estado 4_2^+ es cercano al original.

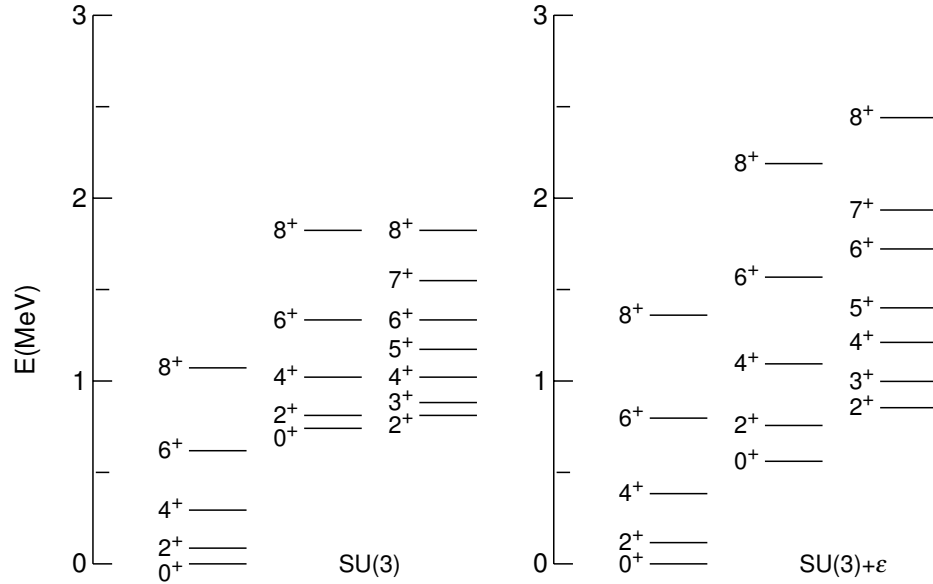


Figura 5.1: Efecto de adicionar el término $\varepsilon \hat{n}_d$ a un hamiltoniano rotacional, $a_1 = 0.0087$ MeV y $a_2 = -0.013$ MeV y $\varepsilon = 0.3$ MeV

5.1 Resultados

La región en la que más se ha estudiado esta transición tiene valores de A cercanos a 150, de esta forma se escogen núcleos con N variando desde 82 hasta $N > 90$. Los núcleos que se describen en este capítulo son $^{146-156}\text{Sm}$ [10], suponiendo que el primero (^{146}Sm) corresponde a un núcleo vibracional ($E_{4_1^+}/E_{2_1^+} = 1.85$), y el segundo (^{156}Sm) a un núcleo rotacional ($E_{4_1^+}/E_{2_1^+} = 3.29$).

Para determinar el valor de θ en (5.2), se toma $\varepsilon_0 = 0.7472$ MeV, valor correspondiente a la energía del estado 2_1^+ del núcleo ^{146}Sm y $\varepsilon = 0$ para el núcleo ^{156}Sm con $N = 12$, de esta forma se encuentra $\theta = 62.27$ KeV.

Variando el valor de ε de acuerdo a (5.2) y determinando los valores para a_1 y a_2 de la misma forma que en B.3, se encuentran los espectros de los núcleos en la transición. En la figura 5.2 se muestra la comparación entre las energías experimentales [20] y las calculadas.

Como hipótesis inicial, que puede verse en la figura 5.2, en el espectro correspondiente a ^{146}Sm se observa que los valores de energía experimentales y calculados corresponden a un espectro vibracional, al pasar al ^{158}Sm no se ha perdido este carácter vibracional, mientras que en el ^{150}Sm y el ^{152}Sm puede verse como la separación entre los niveles cambia de la forma vibracional para acomodarse en la forma rotacional que se obtiene claramente para los casos ^{154}Sm y ^{156}Sm .

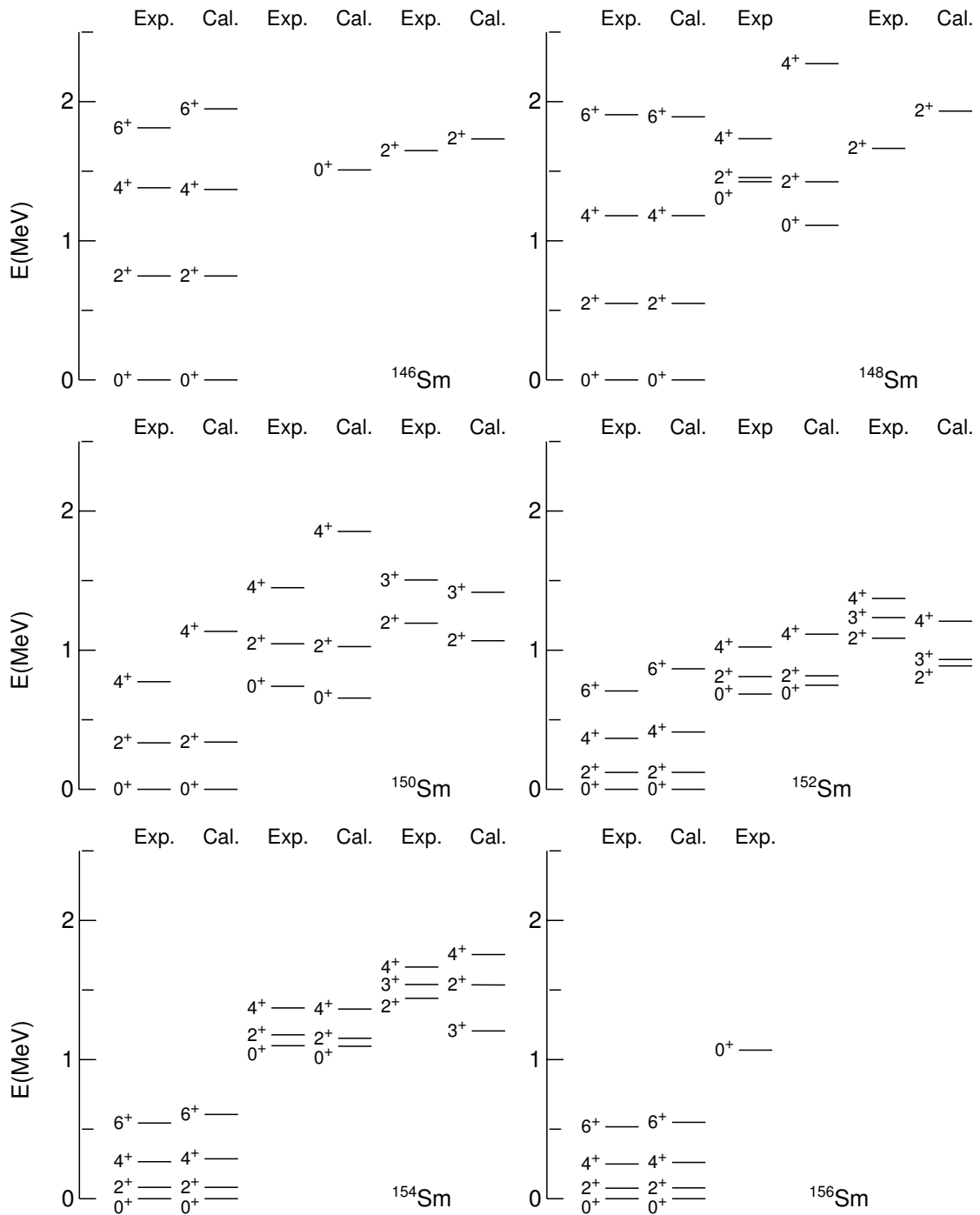


Figura 5.2: Comparación entre las energías experimentales y calculadas para la transición $U(5) \rightarrow SU(3)$

Se puede observar en la figura 5.2 que con las constantes utilizadas se ajusta de manera adecuada la banda del estado base, en general esto sucede para todos los núcleos en la transición. En el caso del ^{148}Sm , en la primera banda excitada el valor de energía que se ajusta es la correspondiente al estado 2_2^+ , al igual que en los demás núcleos.

Capítulo 6

Conclusiones

1. Los valores obtenidos para el espectro de energía en el caso vibracional, tanto en el caso analítico como en el calculado con **PCIBXW** coinciden, ya que éste utiliza la base de $U(5)$ para determinar los elementos matriciales del hamiltoniano a solucionar. En cuanto a la comparación con el espectro experimental, de la figura 2.2 se puede observar una buena descripción para la banda Y en los estados de baja energía, al igual que para el estado excitado 0_{β}^{+} . Aunque en la banda X se obtiene el orden de los estados no se reproduce la diferencia de energía experimental entre ellos. El triplete al doble de la energía del estado 2_1^{+} se obtiene, pero no se reproduce en orden.
2. En el límite vibracional se da una interpretación a las constantes que se deben ajustar
 - La energía del estado 2_1^{+} queda determinada por el valor de ε , ecuación (2.18).
 - La constante c_4 determina la energía del estado 4_1^{+} , ya conocido ε , además de introducir la contribución de la interacción entre los bosones, ecuación (2.19).
 - La constante c_2 determina el valor de la energía del estado 2_2^{+} de acuerdo a la ecuación (2.20).
 - El valor de la energía del estado 0_2^{+} quede determinado por la constante c_0 , una vez conocidos ε , c_2 y c_4 .
3. Comparando los valores analíticos con los calculados en el límite rotacional, se encuentra que estos difieren entre sí, debido a que el programa usa como base la de $U(5)$, sin embargo los dos proporcionan una buena descripción para la banda del estado base.
4. En el caso de $\beta = 0$ para la ecuación (3.8), se encuentra que el momento de inercia del ^{156}Gd es
$$J = 36 \frac{\hbar^2}{\text{MeV}} .$$
5. Los valores de energía analíticas y calculadas en el límite γ -soft coinciden, debido a que los elementos de la base de $U(5)$ y la de $SO(6)$ tienen valores similares, excepto por σ y n_d .

6. El programa PCIBAXW reproduce de forma adecuada la banda experimental del estado base para el núcleo ^{196}Pt .
7. El método seguido para determinar las constantes en la transición $U(5) \rightarrow SU(3)$, permite la descripción adecuada no sólo de los casos límite vibracional y rotacional, sino que como puede verse en la figura 5.2, describe de forma adecuada los espectros de la transición.
8. Las constantes utilizadas en este trabajo permiten determinar probabilidades de transición que se pueden comparar con las experimentales y comprobar la validez del modelo.
9. Los espectros se compararon para bajas energías debido a que el IBM no describe de forma adecuada estados de alta energía de excitación, en estos caso se hace uso de otros modelos como el IBFM [5].

Apéndice A

Paquete de Programas PHINT

El paquete PHINT [19] contiene programas que llevan a cabo cálculos para núcleos par-par de acuerdo al modelo de bosones interactuantes (IBM). Para propósitos del trabajo se va a utilizar el programa PCIBAXW.

El programa PCIBAXW calcula energías de excitación y funciones de onda para estados de paridad positiva y negativa. Estas energías las calcula por medio de la diagonalización del hamiltoniano del IBM, proporcionando los distintos valores propios. El cálculo de la matriz de elementos se hace utilizando la base de U(5)

$$|\phi\rangle = |[N], n_d, n_\beta, n_\Delta, L\rangle. \quad (\text{A.1})$$

Con el Hamiltoniano dado por

$$H = H_{sd} + H_f + V_{df}. \quad (\text{A.2})$$

En este caso se utiliza $H = H_{sd}$

$$\begin{aligned} H_{sd} = & \text{HBAR} n_d + \frac{1}{2} \sum_{L=0,2,4} (2L+1)^{\frac{1}{2}} C \left(\frac{L+2}{2} \right) [(d^\dagger d^\dagger)^{(L)} \times (\tilde{d}\tilde{d})^{(L)}]_0^{(0)} \\ & + \text{F} \left([(d^\dagger d^\dagger)^{(2)} \times (\tilde{d}s)^{(2)}]_0^{(0)} + \text{h.c.} \right) + \text{G} \left([(d^\dagger d^\dagger)^{(0)} \times (ss)^{(0)}]_0^{(0)} + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$+ \text{CH2} \sqrt{5} [(d^\dagger s^\dagger)^{(2)} \times (\tilde{d}s)^{(2)}]_0^{(0)} + \frac{1}{2} \text{CH1} [s^\dagger s^\dagger ss]_0^{(0)}, \quad (\text{A.4})$$

o en su forma multipolar

$$\begin{aligned} H_{sd} = & \text{EPS} n_d + \frac{1}{2} \text{ELL} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{2} \text{QQ} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}) - \frac{5}{\sqrt{7}} \text{OCT} [(d^\dagger \tilde{d})^{(3)} \times (d^\dagger \tilde{d})^{(3)}]_0^{(0)} \\ & + 15 \text{HEX} [(d^\dagger \tilde{d})^{(4)} \times (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}]_0^{(0)}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = -10\sqrt{3}[(d^\dagger \tilde{d})^{(1)} \times (d^\dagger \tilde{d})^{(1)}]_0^{(0)} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} = \sqrt{5} & \left[(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)} + \frac{\text{CHQ}}{\sqrt{5}} (d^\dagger d)^{(2)} \right. \\ & \left. \times (s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)} + \frac{\text{CHQ}}{\sqrt{5}} (d^\dagger d)^{(2)} \right]_0^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A.1 Fórmulas analíticas

Límite Vibracional

El hamiltoniano toma la forma

$$H = \text{HBAR} n_d + \frac{1}{2} \sum_{L=0,2,4} (2L+1)^{\frac{1}{2}} C \left(\frac{L+2}{2} \right) [(d^\dagger d^\dagger)^{(L)} \times (\tilde{d}\tilde{d})^{(L)}]_0^{(0)}, \quad (\text{A.8})$$

con la energía dada por

$$E([N], n_d, n_\beta, n_\Delta, L) = \text{HBAR} n_d + \frac{1}{2} \alpha n_d (n_d - 1) + 2\beta n_\beta (2n_d - 2n_\beta + 3) + \gamma [L(L+1) - 6n_d], \quad (\text{A.9})$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= (4c_2 + 3c_4)/7, \\ \beta &= (7c_0 - 10c_2 + 2c_4)/70, \\ \gamma &= (c_4 - c_2)/14. \end{aligned}$$

Límite Rotacional

El hamiltoniano es de la forma

$$H = \frac{1}{2} \text{ELL}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{2} \text{QQ}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}), \quad (\text{A.10})$$

con $\text{CHQ} = \sqrt{35}/2$.

La energía

$$E([N], (\lambda, \mu), K, L) = (\kappa' + \frac{3}{4}\kappa)L(L+1) - \kappa(\lambda^2 + \mu^2 + 3(\lambda + \mu)), \quad (\text{A.11})$$

con

$$\kappa = -\text{QQ}/4, \quad \kappa' = \text{QQ}/2. \quad (\text{A.12})$$

Límite γ -soft

El hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2}\text{ELL}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{2}\text{QQ}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}) - \frac{5}{\sqrt{7}}\text{OCT}[(d^\dagger \tilde{d})^{(3)} \times (d^\dagger \tilde{d})^{(3)}]_0^{(0)}, \quad (\text{A.13})$$

con $\text{CHQ}=0$

Los valores para la energía son

$$E([N], \sigma, \tau, n_\Delta, L) = A(N - \sigma)(N + \sigma + 4)/4 + B\tau(\tau + 3)/6 + CL(L + 1), \quad (\text{A.14})$$

con $A = -2\text{QQ}$, $B = 15\text{OCT} - 3\text{QQ}$ y $C = (\text{ELL} - \text{OCT})/2$.

Apéndice B

Equivalencia entre las constantes del programa y la literatura

La equivalencia entre las constantes teniendo en cuenta ya sea la expresión del hamiltoniano o la expresión para la energía en cada uno de los casos.

B.1 Caso 1

La expresión para el hamiltoniano en término de los operadores de Casimir sin tener en cuenta E_0 es [14]

$$\begin{aligned} H &= 2\gamma(\hat{L} \cdot \hat{L}) + \delta \frac{2}{3} [2\hat{Q} \cdot \hat{Q} + \frac{3}{4}\hat{L} \cdot \hat{L}] \\ &= (2\gamma + \frac{1}{2}\delta) \hat{L} \cdot \hat{L} + \frac{3}{4}\hat{Q} \cdot \hat{Q}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

comparándolo con el hamiltoniano (A.8) se encuentra

$$\begin{aligned} ELL &= 2(2\gamma + \frac{1}{2}\delta), \\ QQ &= \frac{8}{3}\delta. \end{aligned} \tag{B.2}$$

B.2 Caso 2

El hamiltoniano en este caso está dado por [21],

$$H = 2\xi\hat{Q} \cdot \hat{Q} + (\frac{3}{4} + \gamma)\hat{L} \cdot \hat{L}, \tag{B.3}$$

y comparándolo con (A.8) se encuentra

$$\begin{aligned} ELL &= 2\left(\frac{3}{4}\xi + \gamma\right), \\ QQ &= 4\xi. \end{aligned} \tag{B.4}$$

B.3 Caso 3

El hamiltoniano toma la forma [23]

$$H = a_1 \hat{L} \cdot \hat{L} + a_2 \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \tag{B.5}$$

con las energías dadas por

$$E(N, \lambda, \mu, K, L) = a_2(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)) + \left(a_1 - \frac{3}{8}a_2\right)L(L+1), \tag{B.6}$$

comparado con (A.8) se obtiene

$$\begin{aligned} ELL &= 2a_1, \\ QQ &= 2a_2. \end{aligned}$$

Para determinar los valores de a_1 y a_2 se le asignan valores a L y a la pareja (λ, μ)

- Para $L = 2$ y las parejas de $(\lambda, \mu) = (2N, 0), (2N - 4, 2)$ se obtiene

$$a_2 = -\frac{(E_{2_2^+} - E_{2_1^+})}{3(2N - 1)}. \tag{B.7}$$

- Para $(\lambda, \mu) = (2N, 0)$ y $L = 0, 2$, con $E_{0_1^+} = 0$, se encuentra

$$a_1 = \frac{E_{2_1^+}}{6} + \frac{3}{8}a_2. \tag{B.8}$$

De esta forma conociendo los valores experimentales de $E_{2_1^+}$ y $E_{2_2^+}$ se pueden determinar las constantes a_1 y a_2

B.4 Caso 4

El hamiltoniano es de la forma [22]

$$H^{\text{II}} = -\kappa' \hat{L} \cdot \hat{L} - \kappa 2\hat{Q} \cdot \hat{Q}, \quad (\text{B.9})$$

con la energía dada por

$$E(N, \lambda, \mu, K, L) = \alpha L(L + 1) - \beta(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)), \quad (\text{B.10})$$

con

$$\alpha = \frac{3}{4}\kappa - \kappa'; \quad \beta = \kappa, \quad (\text{B.11})$$

Nuevamente comparando con (A.8) se encuentra

$$\begin{aligned} ELL &= 2\alpha - \frac{3}{2}\beta, \\ QQ &= -4\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Bibliografía

- [1] K. Heyde. *From Nucleons to the Atomic Nucleus*. Springer-Verlag, 1998.
- [2] O. Castaños y M.E López. Simetrías y estructura nuclear. *Revista Mexicana de Física*, **37**:418, 1991.
- [3] A. Arima and F. Iachello. Collective Nuclear States as Representations of a SU(6) group. *Phys. Rev. Lett.*, **35**:1069, 1975.
- [4] N.A. Jelley. *Fundamentals of Nuclear Physics*. Cambridge University Press, 1990.
- [5] K. Heyde. *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics*. Institute of Physics Publishing, second edition, 1999.
- [6] C. Cohen-Tannoudji, B.Diu, and F. Lalöe. *Quantum Mechanics*, volume II. John Wiley & Sons.
- [7] P.E. Hodgson, E. Gadioli, and E. Gadioli Erba. *Introductory Nuclear Physics*. Oxford University Press, 1997.
- [8] G. Scharff-Goldhaber and J. Weneser. System of Even-Even Nuclei. *Phys. Rev.*, **98**:212, 1955.
- [9] A. Bohr and B.R. Mottelson. *Nuclear Structure*, volume II. W.A. Benjamin INC., 1975.
- [10] R.F. Casten, editor. *Algebraic Approaches to Nuclear Structure*. Harwood Academic Publisher, 1993.
- [11] R.F. Casten. *Nuclear Structure from a Simple Perspective*. Oxford Science Publications, New York, second edition, 2000.
- [12] A. Arima, Ohtsuka T, F. Iachello, and I. Talmi. Collective Nuclear States as Symmetric Couplings of Proton and Neutron Excitation. *Phys. Lett, B* **66**:205, 1977.
- [13] A.M. Shirokov, N.A. Smirnova, and Y.F. Smirnov. Parameter Symmetry of the Interacting Boson Model. *nucl-th/9806068*, 1998.

- [14] F. Iachello and A. Arima. *The Interacting Boson Model*. Cambridge University Press, 1987.
- [15] W. Pfeifer. *An Introduction to the Interacting Boson Model of the Atomic Nucleus*. v/d|f, 1998.
- [16] B.G Adams. *Algebraic Approach to Simple Quantum Systems*. Springer-Verlag.
- [17] Fi. Stancu, editor. *Group Theory in Subnuclear Physics*. Oxford University Press, 1996.
- [18] A. Arima and F. Iachello. Interacting Boson Model of Collective States, I. The Vibrational Limit. *Ann.Phys.*, **99**:253, 1976.
- [19] O. Scholten. *The Program-Package Phint*. Kernfysisch Versneller Institut, 1979.
- [20] V. Shirley, editor. *Table of Isotopes*. John Wiley & Sons Inc., 1996.
- [21] A.Franck and P.Van Isacker. *Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Structure Physics*. John Wiley & Sons, 1994.
- [22] A. Arima and F. Iachello. Interacting Boson Model of Collective States, II. The Rotational Limit. *Ann.Phys.*, **111**:201, 1978.
- [23] R.F. Casten and D. Warner. The interacting boson approximation. *Rev, Mod, Phys.*, **60**:389, 1988.
- [24] A. Arima and F. Iachello. Interacting Boson Model of Collective States, IV. The O(6) Limit. *Ann.Phys.*, **123**:468, 1979.
- [25] K. Langanke, J.A. Maruhn, and S.E. Koonin, editors. *Computational Nuclear Physics 1*. Springer-Verlag, 1991.
- [26] K.S. Krane. *Introductory Nuclear Physics*. John Wiley & Sons.
- [27] P. Cejnar. and H.B. Geyer. Parameter symmetries of quantum many-body systems. *nucl-th/0110042*, 2001.