

# Estadística de Extremos como una Herramienta Analítica en Estudios del Decaimiento Gamma en el Continuo Nuclear

Ronald Fernando Garcia Ruiz\* y Fernando Cristancho

*Departamento de Física. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.*

(Dated: 12 de diciembre de 2008)

Aplicamos las herramientas de la Estadística de Extremos al estudio del continuo nuclear, en el trabajo encontramos una función analítica capaz de ajustar “correctamente” el espectro energéticamente ordenado de los rayos gamma provenientes del decaimiento del continuo. Los resultados obtenidos sugieren un camino para extraer experimentalmente parámetros físicos como temperatura y densidad de niveles, que describen el núcleo a alta energía de excitación y alto espín. Mostramos además la posibilidad de distinguir entre los diferentes formalismos de la densidad de niveles y fortaleza de emisión.

## I. INTRODUCCIÓN

El continuo nuclear es una de las regiones más interesantes en el espacio de fase nuclear. Además de los tópicos clásicos relacionados con fenómenos estadísticos y termodinámicos, su relación con las características estructurales pueden ser investigadas. Transiciones de forma, la posible disolución de excitaciones de partícula independiente, caos cuántico, fortalezas de emisión y resonancia dipolar gigante son algunos de los temas que pueden ser tratados. Desde los estudios teóricos [1] que muestran la existencia de la dependencia con la temperatura en las fortalezas de emisión y las primeras medias de resonancia dipolar gigante (GDR) en estados de alto espín [2], la investigación del continuo nuclear ha sido objeto de constante desarrollo, tanto teórico como experimental [3].

Arreglos experimentales multidetectores de rayos gamma permiten obtener características espectroscópicas de estados altamente excitados. Una de las técnicas más exitosas ha sido detectar los primeros rayos gamma en ser emitidos (radiación primaria) en reacciones de iones livianos [4], pero estos métodos solo permite extraer información a bajo espín. Con el propósito de extender los métodos a alto espín proponemos usar la técnica  $Hk$  [5] con el procedimiento de espectros energéticamente ordenados [6] buscando obtener una buena aproximación de la radiación primaria en reacciones de fusión-evaporación en iones pesados.

Aproximaciones analíticas a los espectros energéticamente ordenados obtenidos en reacciones de fusión-evaporación en iones pesados, deducidas desde los Estadísticos de Orden han sido propuestas [7–9] para obtener experimentalmente parámetros que describen el decaimiento gamma en el continuo nuclear. En el presente trabajo mostramos que la Estadística de Extremos provee una función analítica que se ajusta muy bien al espectro ordenado de los rayos gamma más energéticos. Usando espectros simulados como nuestros datos “experimentales” mostramos que estos pueden ser ajustados correcta-

mente a dicha función, permitiendo estudiar el núcleo a alta energía de excitación y espín.

En la sección II se repasan algunas ideas y conceptos básicos usados en el estudio del continuo nuclear, mostrando los modelos usados a lo largo del trabajo. En la sección III se hace una pequeña introducción a la teoría de valores extremos y establecemos la relación entre la Estadística de Extremos y el decaimiento gamma del continuo. Las simulaciones usadas para comparar los resultados obtenidos al usar la Estadística de Extremos son presentadas en la sección IV. En la sección V se realiza el análisis de los resultados obtenidos. Finalmente se exponen las conclusiones y perspectivas del presente trabajo en la sección VI.

## II. EL CONTINUO NUCLEAR

### A. Reacciones de fusión-evaporación

Aunque existen diferentes métodos que permiten obtener estados nucleares a alta energía y momento angular, los mecanismos más efectivos resultan ser las reacciones de fusión-evaporación, esquematizada en la figura 1. El proyectil colisiona con el blanco formando lo que se denomina núcleo compuesto (figura 1a). Una vez el núcleo compuesto es formado, dependiendo de la energía en el laboratorio y la masa de cada núcleo, el sistema puede decaer de dos modos diferentes, por “fisión” ó por “evaporación”. La “fisión” (figura 1b) es el modo de decaimiento en el cual el núcleo compuesto se divide en dos ó mas partes. Un núcleo producto del proceso de fusión, además de tener energía rotacional, posee energía de excitación intrínseca. El modo mediante el cual el núcleo pierde ésta energía de excitación es el llamado “evaporación” (figura 1c), en el cual el núcleo compuesto emite partículas ( $n, p, \alpha, \dots$ ) hasta que la energía de excitación sea menor que la energía de ligadura de los nucleones. Una vez la evaporación termina, el núcleo residual ocupa aleatoriamente una región de energía  $E$  y espín  $I$ , conocida como “estados de entrada”.

La figura 2 muestra el esquema del decaimiento nuclear en el espacio de fase ( $E, I$ ), los estados de entrada

---

\*rfgarcia@bt.unal.edu.co

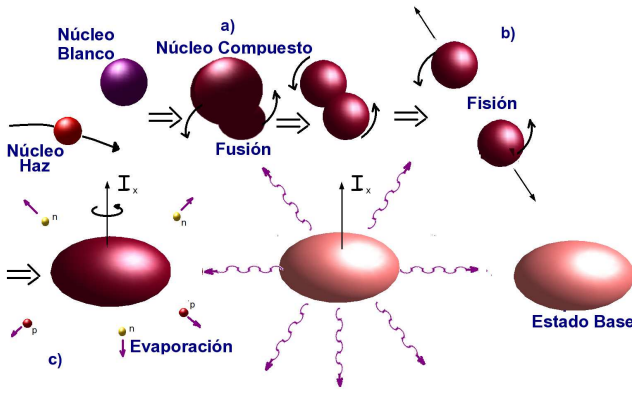


Figura 1: Esquema de la reacción fusión evaporación. Un núcleo proyectil colisiona con el blanco formando lo que se denomina núcleo compuesto (a). Una vez el núcleo compuesto es formado, el sistema puede decaer de dos modos diferentes: por fisión (b) ó por evaporación (c).

son representados como una región del espacio de fase. Cuando el núcleo se encuentra en dicha región, aún posee energía de excitación y momento angular. Debido a que la energía de excitación es menor a la energía de ligadura de los nucleones, el proceso de decaimiento continúa mediante emisión de rayos gamma, hasta llegar al estado base. Cada decaimiento desde los estados de entrada hasta el estado base, se conoce como “cascada” de multiplicidad  $n$ , donde  $n$  es el número de rayos gamma emitidos en la cascada. En la figura se muestra la llamada línea yrast, la cual representa los estados con menor energía de excitación para un momento angular dado, es decir, no existen estados accesibles al sistema por debajo de esta línea. La energía de excitación intrínseca  $U$  del núcleo es medida desde la línea yrast. La densidad de niveles por unidad de energía depende fuertemente de la energía de excitación a la cual se encuentre el núcleo. Los “estados discretos” están presentes para energías de excitación entre 0-2 MeV donde la densidad de niveles es baja. Cuando  $U = 2 - 6$  MeV se identifica la región del “casi-continuo”. Para energías superiores a 6 MeV, los estados cuánticos a través de los cuales ocurre el decaimiento forman el “continuo”, donde los niveles se superponen debido a la gran densidad de niveles y la anchura de los mismos.

A continuación hacemos una descripción de los modelos para la fortaleza de emisión y la densidad de niveles usados en el trabajo.

## B. Densidad de Niveles

### C. Gas de Fermi con temperatura constante

Considerando  $\Omega(A, U)$  el número de estados accesibles al sistema por unidad de energía, coincide entonces esta con la densidad de estados  $\rho(A, U)$ . La entropía del

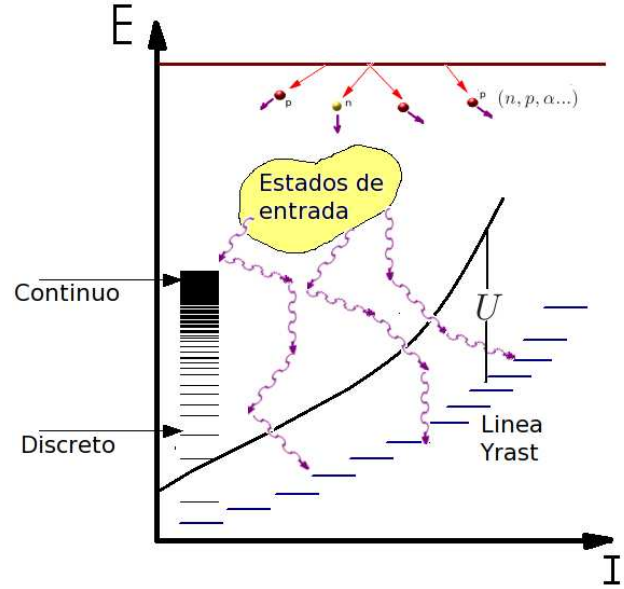


Figura 2: Espacio de fase  $E-I$  en el cual el decaimiento del núcleo toma lugar en una reacción de fusión-evaporación. El núcleo ocupa aleatoriamente una región del espacio de fase, desde esta región el decaimiento se lleva a cabo via emisión de rayos gamma hasta llegar a la línea yrast.

sistema estará dada por

$$S(A, E) = k \ln \Omega = k \ln \rho(A, E). \quad (1)$$

Asumiendo que la temperatura  $T$  permanece constante en el intervalo de energía considerado

$$S(A, U) = \frac{U - U_0}{T}, \quad (2)$$

reemplazando en (1) obtenemos la expresión para la densidad de niveles en el gas de Fermi con temperatura constante (CT).

$$\rho(A, U) = \rho(A, U_0) e^{\frac{U - U_0}{T}}, \quad (3)$$

donde  $\rho(A, U_0)$  es la densidad de estados en el estado de energía  $U_0$ . La relación entre la energía y la temperatura es dada por la aproximación de segundo orden para el gas de Fermi

$$T = \sqrt{\frac{U}{a}}, \quad (4)$$

donde  $a$  es el parámetro de densidad de niveles.

## D. Fortalezas de Emisión

### 1. Partícula independiente

La transición con emisión gamma de un sistema de muchos nucleones, es debida únicamente a un nucleón,

razón llamado el modelo de partícula independiente (PI). La fortaleza de emisión en este modelo  $\Gamma_{\text{SP}}$  depende del orden multipolar  $\lambda$  de la radiación emitida, dada por

$$\Gamma_{\text{PI}}(E_\gamma, O\lambda) = C_{O\lambda} E_\gamma^m \quad m = 2\lambda + 1, \quad (5)$$

donde  $E_\gamma$  es la energía del rayo gamma y  $C_{O\lambda}$  es una constante que depende del carácter electromagnético de la transición  $O\lambda$ .

### E. Intensidad de la radiación emitida

De la regla de oro de la mecánica cuántica, sabemos que la probabilidad de transición  $P_{i \rightarrow f}$  de ir de un estado inicial  $i$  al estado final  $f$  está dada por

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H | i \rangle|^2 \rho(f), \quad (6)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano de la interacción, y  $\rho(f)$  la densidad de estados en el estado final. En el estudio del decaimiento nuclear  $\frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H | i \rangle|^2$  es representada la fortaleza de emisión  $\Gamma$ , luego (6) puede ser expresada como

$$P_{E_\gamma} \propto \Gamma(E_\gamma) \rho(U - E_\gamma). \quad (7)$$

La probabilidad de transición es asociada a la intensidad de la radiación emitida, la cual es un efecto conjunto de la fortaleza de emisión y la densidad de niveles. Entonces, si escogemos una región de energía  $dE$  en el continuo nuclear, la intensidad de la radiación está dada por

$$dI_\gamma(E_\gamma) = \Gamma(E_\gamma) \rho(U, I) dU. \quad (8)$$

### F. Espectros energéticamente ordenados

La información de la estructura del núcleo a cierta energía de excitación está contenida en los primeros rayos en ser emitidos en el decaimiento (radiación primaria). Sin embargo existe una imposibilidad experimental de distinguir (ordenar) una secuencia temporal de los rayos gamma en una cascada. Los tiempos de vida de los estados nucleares en el continuo son menores a los tiempos de resolución de la electrónica usada en el experimento. Una solución a esta dificultad es un ordenamiento diferente propuesto por Baktash [6]; nosotros sabemos que los rayos gamma de mayor energía son los más probables en ser emitidos primero. Siguiendo este principio, nos olvidamos de la secuencia temporal y ordenamos los rayos gamma en una cascada de multiplicidad  $n$  de acuerdo a su energía  $E_\gamma$ , asignamos a cada rayo un ordinal  $N$ , de manera que el rayo de  $N = 1$  sea el de mayor energía,

$$E_{\gamma N=1} \geq E_{\gamma N=2} \geq \dots \geq E_{\gamma N=n}, \quad (9)$$

Los espectros construidos con este ordenamiento son los llamados energéticamente ordenados (EEO) de orden  $N$ . El presente trabajo se enfoca en el estudio de los más energéticos ( $N = 1$ ), a los cuales podemos aplicar las herramientas de la Estadística de Extremos.

## III. ESTADÍSTICA DE EXTREMOS EN EL ESTUDIO DEL CONTINUO NUCLEAR

El estudio de los valores extremos de las variables aleatorias es quizás uno de los tópicos más importantes de la matemática estadística. Una gran variedad de herramientas teóricas han sido desarrolladas, comenzando desde los trabajos de Fréchet [10] quien encontró una distribución para ordenar variables aleatorias, los llamados estadísticos de orden [11]. Fisher y Tippet [12] mostraron que las distribuciones de extremos pueden ser tan solo una entre tres tipos.

Establecemos la relación entre la Estadística de Extremos y el Continuo Nuclear al identificar el espectro de los rayos gamma más energéticos (EEO de orden  $N = 1$ ) como una distribución de extremos. Al ser esta una distribución de extremos debe cumplir con los postulados de Fisher y Tippet. Posteriormente veremos que los espectros se ajustan a la llamada distribución de Gumbel [13].

### A. Estadística de orden (EO)

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una población absolutamente continua, con función distribución acumulativa  $F(x)$  y función densidad de probabilidad  $f(x)$ . La correspondiente Estadística de Orden (EO)[11] es definida por los  $X_i$ 's ordenado en orden decreciente de magnitud. El mayor denotado por  $X_{1:n}$  y el menor  $X_{n:n}$ , esto es  $X_{1:n} \geq X_{2:n} \geq \dots \geq X_{n:n}$ . La probabilidad  $p_{N:n}(x)$  de encontrar una variable  $X_{N:n}$  entre  $x$  y  $x + dx$  es dada por

$$\begin{aligned} p_{N:n}(x) &\equiv p(x < X_{N:n} < x + \delta x) \\ &= \frac{n!}{(N-1)!(n-N)!} \{F(x)\}^{n-N} \{1 - F(x)\}^{N-1} f(x). \end{aligned} \quad (10)$$

El resultado para el valor extremo  $N = 1$ , es

$$p_{1:n}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x). \quad (11)$$

Si asociamos la variable  $X$  a la energía del rayo gamma  $E_\gamma$  y a  $n$  la multiplicidad de cada cascada, el ordenamiento de la EO es claramente el propuesto en [6] esquematizado en (9), donde  $f(x)$  corresponde a la intensidad (8) de la radiación. Es importante tener en cuenta las restricciones presentes en la EO al aplicar la teoría al estudio del decaimiento nuclear :

1. En la EO  $x$  no está acotada, mientras la energía de transición sí.
2. El número de transiciones  $n$  en una cascada es una variable aleatoria.
3. La EO es deducida asumiendo que las  $X_i$  son variables aleatorias independientes e idénticamente

distribuidas, mientras que en el decaimiento gamma no lo son.

La tercera restricción puede ser estudiada para los valores extremos ( $N = 1, N = n$ ) desde una perspectiva más simple a la teoría de la EO, definiendo las distribuciones máximo y mínimo, lo cual será estudiado a continuación.

### 1. Las distribuciones máximo y mínimo

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria, con función acumulativa  $F(x)$  y función densidad  $f(x)$ , definimos las variables aleatorias máximo y mínimo como sigue;

$$H_n(x) = \text{máx}(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (12)$$

$$L_n(x) = \text{mín}(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (13)$$

Si  $F_H(x)$  es la función acumulativa de  $H_n(x)$  entonces;

$$F_H(x) = P(H \leq x) = P(\text{máx}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x). \quad (14)$$

Nótese que como  $X_i \leq \text{máx}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , el evento  $\text{máx}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x$  se puede interpretar como  $(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x)$ , esto es, para que el máximo de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sea menor ó igual a un número  $x$ , cada una de las  $X_i$ , tiene que ser menor ó igual a ese número. Entonces,

$$\begin{aligned} F_H(x) &= P(H \leq x), \\ &= P(\text{máx}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x), \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x), \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \dots P(X_n \leq x) : (\text{indep.}), \\ &= [P(X \leq x)]^n : (\text{idénticamente distribuidos}), \\ &= [F(x)]^n. \end{aligned} \quad (15)$$

Ahora, por definición la función densidad  $f_H(x)$  está dada por la derivada de  $F_H(x)$ .

$$\begin{aligned} f_H(x) &= \frac{d}{dx} F_H(x), \\ &= n[F(x)]^{n-1} f(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la distribución mínimo, obtenemos

$$f_L(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x). \quad (17)$$

Los resultados son iguales a los obtenidos por la Estadística de Orden para  $N = 1$  y  $N = n$ . La derivación por este camino nos permite estudiar la condición de independencia y de distribución idéntica expuesta en la tercera restricción. Aunque esta restricción no será objeto de nuestro estudio se plantea como un problema que podría ser estudiado en trabajos futuros.

## B. Las tres asíntotas

Una vez conocidas las distribuciones máximo y mínimo, los resultados obtenidos por Fisher [12] establecen que la distribución de los valores extremos  $G(x)$  pertenece a una sola de tres familias de distribuciones, conocidas como las distribuciones de Fréchet, Weibull y Gumbel. Fisher obtuvo estos resultados partiendo del llamado postulado de estabilidad, el cual será explicado a continuación.

### 1. Postulado de estabilidad

Usando el argumento propuesto por Fisher [12], consideremos  $N$  muestras cada una de tamaño  $k$ , tomadas de la misma población de una variable aleatoria  $X$ . En cada muestra hay un valor máximo, entonces el valor máximo en  $Nk$  observaciones es el máximo de los  $N$  valores máximos tomados de las muestras de tamaño  $k$ . La distribución de los valores máximos en  $Nk$  observaciones tenderá a la misma expresión asintótica de los valores máximos en muestras de tamaño  $k$ , siempre que una asíntota exista. Consecuentemente, la asíntota debe ser tal que los valores máximos de una muestra de tamaño  $k$  tomados de ésta, deben tener la misma distribución asintótica. Entonces  $F(x)$  satisface la ecuación funcional llamada postulado de estabilidad

$$F^k(x) = F(a_k x + b_k), \quad (18)$$

donde los parámetros  $a_k$  y  $b_k$  dependen de  $k$ , entonces  $F^k(x)$  converge a una de las siguientes tres distribuciones de valores extremos [12, 14]

Fréchet :

$$G_1(x) = \begin{cases} \exp \left[ - \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\varepsilon} \right] & x > \mu, \varepsilon > 0, \\ 0 & x \leq \mu, \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (19)$$

Weibull :

$$G_2(x) = \begin{cases} \exp \left[ - \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{1/\varepsilon} \right] & x < \mu, \varepsilon > 0, \\ 0 & x \geq \mu, \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Gumbel :

$$G_3(x) = \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right] - \infty < x < \infty. \quad (21)$$

En las tres anteriores ecuaciones  $\mu$  es el parámetro de localización asociado a la moda de la distribución de extremos y  $\sigma$  es el parámetro de escala asociado a la dispersión. El parámetro  $\varepsilon$  determina la forma de la distribución. Las condiciones de necesidad y suficiencia obtenidas

por Fisher [12] se encuentran expuestas en el Apéndice A. En la figura 3 se muestran las gráficas para cada una de las funciones. Las funciones (17-19) son funciones acu-

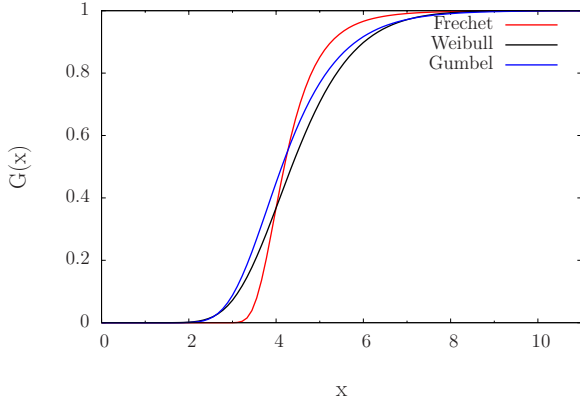


Figura 3: Funciones acumulativas de las tres asíntotas: Frechét, Weibull y Gumbel.

mulativas, pero en nuestro análisis siempre obtenemos el espectro de intensidad, el cual está asociado a la función densidad, así que hacemos los ajustes a las derivadas de las funciones acumulativas (17-19), dadas por Frechét:

$$f_F(x) = \frac{1}{\varepsilon\sigma} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-(1+\varepsilon)/\varepsilon} \exp \left[ - \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-1/\varepsilon} \right]. \quad (22)$$

Weibull:

$$f_W(x) = \frac{1}{\varepsilon\sigma} \left( - \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{(1-\varepsilon)/\varepsilon} \exp \left[ - \left( - \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{1/\varepsilon} \right]. \quad (23)$$

Gumbel:

$$f_G(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left( - \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \exp \left( - \exp \left( - \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right). \quad (24)$$

Las gráficas de las densidades de probabilidad anteriores son mostradas en la figura 4. Como veremos en los resultados, los espectro simulados presentan un decaimiento exponencial para las energías mayores, igual que la función de Gumbel.

En principio con solo conocer  $F(x)$  podríamos obtener la distribución de valores extremos. Pero no en todos los casos tenemos expresiones analíticas para  $F(x)$ , en el caso del decaimiento gamma en el continuo nuclear, al usar fortaleza de emisión como Resonancia Dipolar Gigante [15], la función de densidad presenta una forma funcional no integrable analíticamente.

#### IV. LA SIMULACIÓN

Utilizamos dos programas que simulan el decaimiento gamma en el continuo nuclear basados en el método de

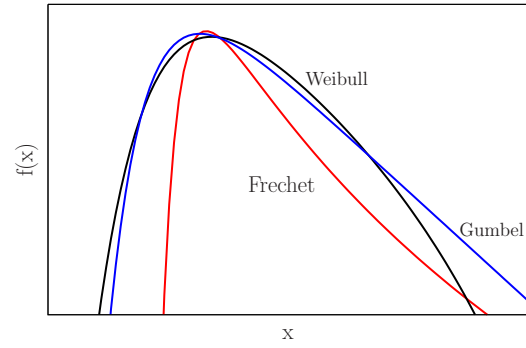


Figura 4: Funciones de densidad de probabilidad para las tres asíntotas: Frechét, Weibull y Gumbel, en unidades arbitrarias.

Monte Carlo. Para dar una primera solución al problema, escribimos un código en C++ (programa DMG.cpp) que nos permite simular de manera global el decaimiento gamma en el continuo nuclear. El segundo programa utilizado es GAMBLE [15] un código en fortran mucho más robusto construido especialmente para simular la emisión de radiación gamma en reacciones de fusión-evaporación. Los histogramas obtenidos en cada una de las simulaciones serán considerados como nuestros datos “experimentales”. Los programa nos permiten controlar cada una de las variables involucradas como la temperatura  $T$ , el parámetro de densidad de niveles  $a$  y la energía de excitación  $E$ .

#### A. Programa DMG

Construimos el programa suponiendo que el decaimiento sucede por emisión de radiación de un solo carácter electromagnético. Como nuestro objetivo es comparar los resultados de la simulación con la solución analítica propuesta al usar la Estadística de Extremos, usamos en el programa las expresiones para la fortaleza de emisión PI (5) y densidad de niveles TC (3), las cuales además de ser analíticamente integrables, nos dan una buena descripción del decaimiento,

- Fortaleza de emisión: Partícula independiente (PI) (5)

$$\Gamma(E1) = C_1 E_\gamma^m. \quad (25)$$

- Densidad de niveles: Gas de fermi a temperatura constante (TC)

$$\rho(A, U) = \rho(A, U_0) e^{(U-U_0)/T}. \quad (26)$$

- No hay dependencia con el espín.

Entonces, la intensidad de la radiación producida por una región delgada de energía de excitación, es dada por la

expresión (8)

$$I_\gamma = CE_\gamma^m \frac{e^{(U_f - U_0)/T}}{e^{(U_i - U_0)/T}} = CE_\gamma^m e^{-E_\gamma/T}. \quad (27)$$

Con  $E_\gamma = U_i - U_f$ . Si  $x = E_\gamma$ , la intensidad de la radiación  $I_\gamma(8)$  corresponde a la densidad de probabilidad  $f(x)$ . Entonces la función densidad  $f(x)$

$$f(x) = Cx^m e^{-x/T}, \quad (28)$$

y función acumulativa  $F(x)$

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = C \int_0^x x^m e^{-x/T} dx, \quad (29)$$

con  $C$  una constante de normalización tal que en la energía de excitación  $U_0$ ,  $F(U_0) = 1$ .

### 1. Funcionamiento del programa

El programa DMG (Decaimiento - Monte Carlo - Gumbel) simula el decaimiento para cada núcleo desde los estados de entrada suponiendo que todos los núcleos se encuentran a una sola energía de excitación inicial, siguiendo los siguientes pasos:

- Construidas las funciones  $f(x)$  y  $F(x)$ , se usa el método de Monte Carlo para escoger la energía del rayo gamma emitido en el decaimiento.
- Calcula la nueva energía de excitación, restando la energía del rayo gamma a la energía de excitación inicial.
- Se repite el mismo proceso hasta que la energía de excitación del núcleo este en la región del discreto ( $\sim 1$  MeV).
- Organiza los rayos gamma de la cascada de mayor a menor, de acuerdo con el valor de energía, almacenando los EEO.

## B. Programa GAMBLE

Este programa es mucho más complejo que DMG ya que tiene en cuenta todos los procesos físicos involucrados. La entrada de GAMBLE debe incluir un conjunto de datos: los estados yrast del núcleo escogido, la distribución de los estados de entradas, las bandas colectivas, la densidad de niveles, la fortalezas de emisión, las energías y anchos de los picos de GDR. Una descripción detallada del programa puede ser encontrada en el artículo original de Leander [15]. GAMBLE produce una gran cantidad de información, su salida es guardada en archivos de la misma manera como se almacenan los datos en un experimento real, por lo tanto es necesario utilizar otro programa, GAMANA para analizar los datos de salida.

## V. RESULTADOS Y ANÁLISIS

### A. Simulación con DMG

Una vez los núcleos ocupan los estados de entrada, suponiendo que todos se encuentran con la misma energía de excitación, usamos el programa DMG para simular el decaimiento en dos casos diferentes, para diferentes temperaturas de excitación y a diferentes temperaturas con energía de excitación fijada en un solo valor.

#### 1. Diferentes energías de excitación

Construimos el programa para el caso en que la radiación es de tipo  $E1$  ( $m = 3$ ), de la expresión (27),  $f(x)$  esta dada por

$$f(x) = Cx^3 e^{-x/T}, \quad (30)$$

y obtenemos  $F(x)$  de la expresión (29)

$$F(x) = 6CT^4 \left[ 1 - e^{-x/T} \left( \frac{x^3}{6T^3} + \frac{x^2}{2T^2} + \frac{x}{T} + 1 \right) \right]. \quad (31)$$

Realizamos el proceso de simulación para diferentes energías de excitación  $U$ . La temperatura correspondiente a cada energía de excitación fue obtenida usando la relación (4). Para cada núcleo se extrae el rayo gamma de mayor energía en el decaimiento, formando así el EEO de orden  $N = 1$ . Usamos el programa GNU PLOT [18] para ajustar cada uno de los EEO de orden  $N = 1$  a una distribución tipo Gumbel (24). En la figura 4 se muestran los espectros simulados y sus respectivos ajustes. Se observa que cada uno de los ajustes sigue el espectro simulado en toda la región de energía. Este resultado es la primera prueba del éxito que se obtiene al aplicar la Estadística de Extremos nuestro estudio.

Este mismo procedimiento anterior se efectuó tomando fortalezas de emisión PI de diferente potencia, proporcional a  $E_\gamma^4$  y  $E_\gamma^5$ . Los valores de los parámetros de la distribución Gumbel para cada ajuste se encuentran en el cuadro I.

En la figura 5 mostramos la dependencia los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  de la función de Gumbel al variar la temperatura. Se observa claramente una dependencia lineal con la temperatura para ambos parámetros. La importancia de obtener este resultado será discutida en la siguiente sección.

La pregunta que surge ahora, ¿Qué relación hay entre los parámetros de la función de Gumbel y la función densidad y distribución inicial?. La respuesta a esta pregunta fue dada por Gumbel [13] para una distribución exponencial. Con el propósito de comparar los resultados de Gumbel para la distribución exponencial con los obtenidos en nuestro caso, definimos la función intensidad de la distribución (Ver Apéndice B)

$$\eta(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}. \quad (32)$$

Cuadro I: Parámetros del ajuste de la función de Gumbel para diferente orden multipolar en la fortaleza de emisión al variar la energía de excitación.

$a = 20 \text{ MeV}^{-1}$	U(MeV):	7	8	9	10	11	12
Fortaleza	T(MeV) <sup>a</sup> :	0.591	0.632	0.671	0.707	0.742	0.775
$\Gamma \propto E_\gamma^3$	A	7027(23)	8026(28)	9022(31)	10023(30)	11020(32)	12014(30)
	$\sigma$	0.701(3)	0.759(3)	0.817(3)	0.870(3)	0.918(3)	0.966(3)
	$\mu$	2.785(3)	3.059(3)	3.321(3)	3.574(3)	3.823(3)	4.060(3)
$\Gamma \propto E_\gamma^4$	A	7057(39)	8054(35)	9067(40)	10059(36)	11020(41)	12062(41)
	$\sigma$	0.779(5)	0.843(4)	0.907(5)	0.961(4)	0.918(4)	1.072(4)
	$\mu$	3.151(5)	3.465(4)	3.764(5)	4.053(4)	3.823(4)	4.601(4)
$\Gamma \propto E_\gamma^5$	A	7029(59)	8054(60)	9083(57)	10099(56)	11116(58)	12122(60)
	$\sigma$	0.830(8)	0.911(8)	0.986(7)	1.053(7)	1.118(7)	1.175(7)
	$\mu$	3.493(8)	3.848(8)	4.196(7)	4.519(7)	4.830(7)	5.125(7)

$${}^a T(\text{MeV}) = \sqrt{U/a}$$

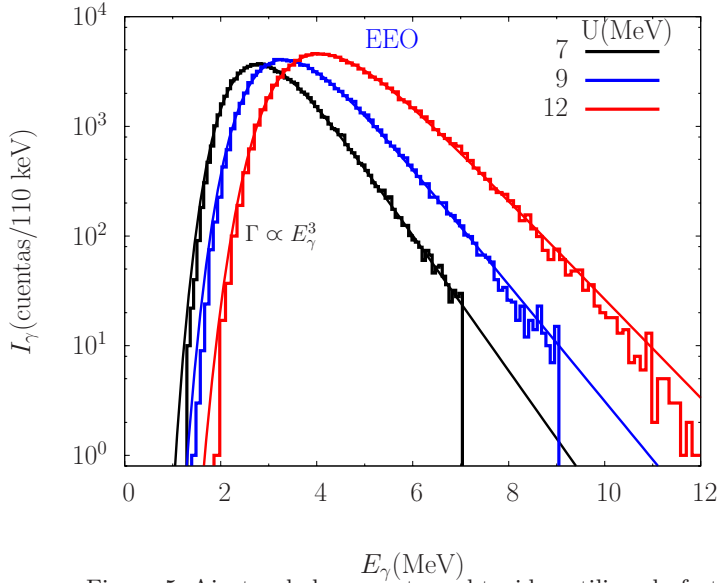


Figura 5: Ajustes de los espectros obtenidos utilizando fortaleza de emisión  $\Gamma \propto E_\gamma^3$ , a diferentes energías de excitación. La temperatura variando como  $T = \sqrt{U/a}$ .

Gumbel [13] encontró que para una distribución tipo exponencial, el parámetro  $\sigma$  de la distribución de extremos es el inverso de la función intensidad evaluado en la moda de la distribución.

$$\sigma = \frac{1 - F(\mu)}{f(\mu)} = (\eta(\mu))^{-1}. \quad (33)$$

Tomando la función densidad (28) y distribución (29) obtenemos la expresión para la función intensidad en el caso de  $\Gamma \propto E_\gamma^3$

$$\eta_3(x) = \frac{x^3 e^{-x/T}}{6T^4 (e^{-g(x)} - e^{-g(U_0)})}, \quad (34)$$

con

$$g(x) = \frac{x}{T} - \ln \left( \frac{x^3}{6T^3} + \frac{x^2}{2T^2} + \frac{x}{T} + 1 \right). \quad (35)$$

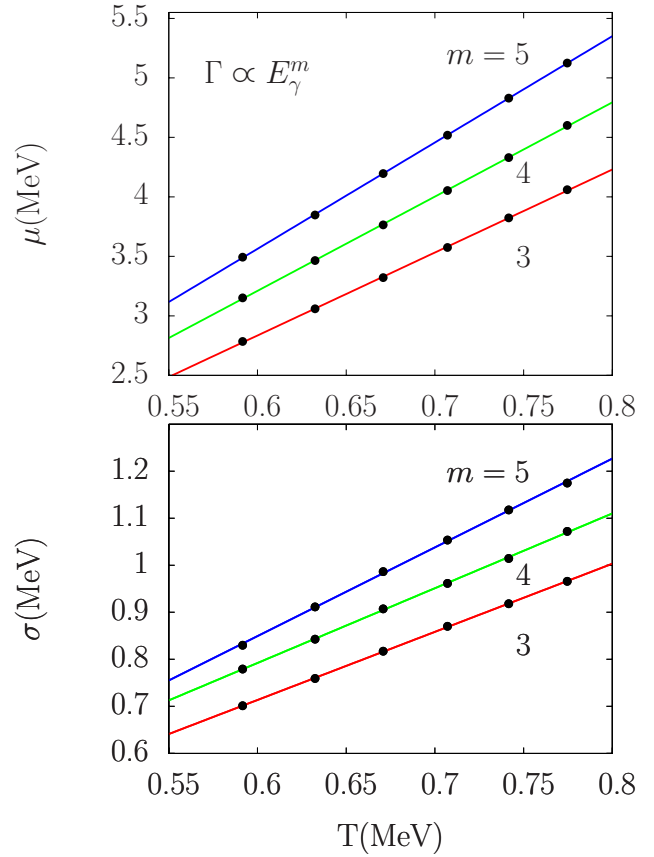


Figura 6: Dependencia de los parámetros de la función de Gumbel al variar la energía de excitación  $U$ . La temperatura cambia como  $T = \sqrt{U/a}$ .

Obsérvese que la función intensidad tiene unidades del inverso de la energía, luego  $\sigma$  está en unidades de energía. Tomando las otras dos fortalezas de emisión  $\Gamma \propto E_\gamma^4$  y  $\Gamma \propto E_\gamma^5$  encontramos las respectivas funciones intensidad  $\eta_4(x)$  y  $\eta_5(x)$ . Al comparar los resultados que Gumbel encontró para una distribución tipo exponencial con los que obtuvimos (cuadro I) en el ajuste para las diferentes distribuciones (diferentes fortalezas de emisión) encon-

tramos un resultado interesante. El parámetro  $\sigma$  de la distribución Gumbel corresponde a la función intensidad evaluada en la moda de la distribución corrida en una constante:

$$\Gamma \propto E_\gamma^3 \quad \sigma = (\eta_3(\mu))^{-1} - 0.45(1) \text{ MeV}, \quad (36a)$$

$$\Gamma \propto E_\gamma^4 \quad \sigma = (\eta_4(\mu))^{-1} - 0.59(1) \text{ MeV}, \quad (36b)$$

$$\Gamma \propto E_\gamma^5 \quad \sigma = (\eta_5(\mu))^{-1} - 0.75(1) \text{ MeV}. \quad (36c)$$

Estas relaciones (36a,36b,36c) nos inducen a pensar en la expresión más general

$$\Gamma \propto E_\gamma^m \sigma = (\eta_m(\mu))^{-1} - m \times 0.15(1) \text{ MeV}. \quad (37)$$

Es importante aclarar que la distribución en nuestro caso corresponde a la distribución exponencial multiplicada por un factor  $x^m$ . En este sentido las constantes en (36a,36a,36a) dan cuenta del exponente  $m$ . Un trabajo analítico completo nos debería mostrar la relación de cada constante con la distribución inicial, aunque ahora no nos ocuparemos en dicho detalle, este será objeto de nuestro estudio en trabajos posteriores.

## 2. Energía de excitación fija

Utilizando las mismas funciones densidad y acumulativa anteriores, fijamos la energía de excitación en un valor de  $U = 11$  MeV, simulamos el decaimiento para diferentes temperaturas. El procedimiento es el equivalente a variar el parámetro de densidad de niveles para una formulación dada. Tomamos los espectro EEO de or-

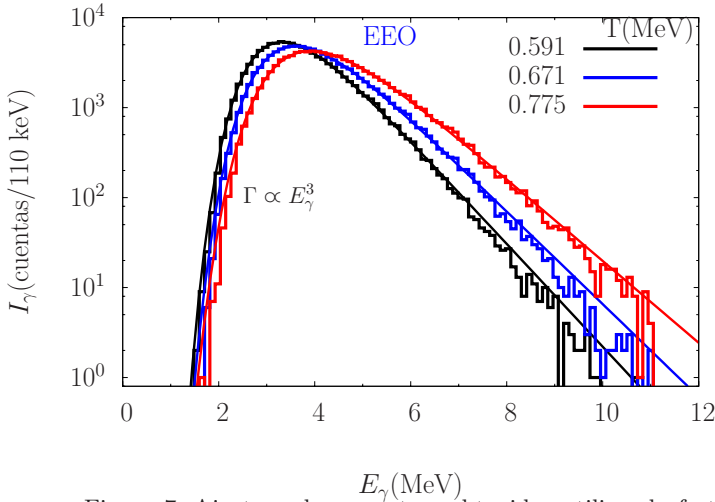


Figura 7: Ajustes a los espectros obtenidos utilizando fortaleza de emisión  $\Gamma \propto E_\gamma^3$ , para diferentes temperaturas  $T$ . La energía de excitación se fijo en  $U = 11$  MeV.

den  $N = 1$  y para cada espectro hacemos el ajuste a la función densidad de Gumbel (24). De manera similar al proceso anterior, realizamos la simulación para las diferentes fortalezas de emisión. Los ajustes obtenidos para los espectros con  $\Gamma \propto E_\gamma^3$  son mostrados en la figura 6. El

valor para cada uno de los parámetros de Gumbel en cada ajuste se encuentra en el cuadro II. Encontramos que

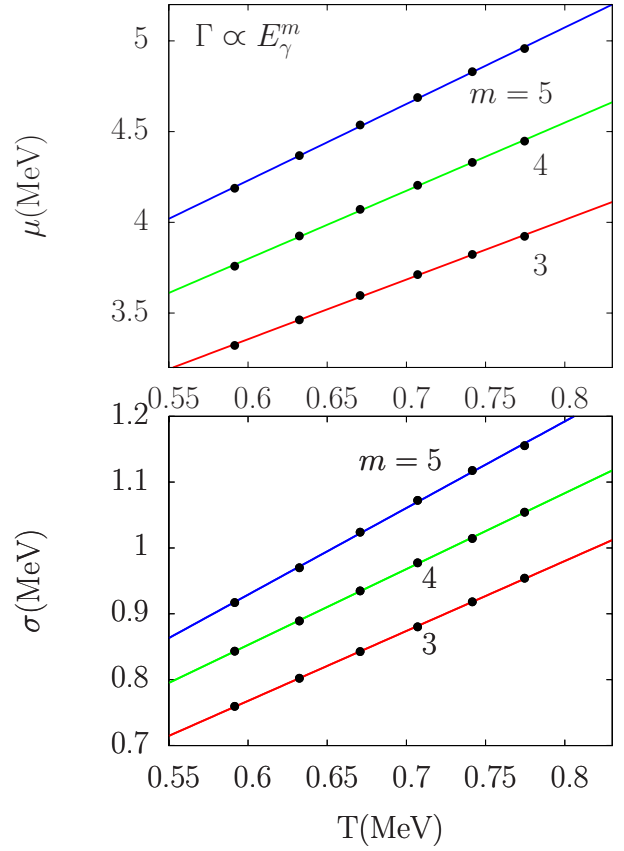


Figura 8: Dependencia de los parámetros de la función de Gumbel al variar la temperaturas  $T$ . La energía de excitación fija en  $U = 11$  MeV.

cada parámetro de la función de Gumbel presenta una dependencia lineal con la temperatura (Figura 7), para las diferentes fortalezas de emisión. Esta dependencia lineal representa un resultado muy importante, significa que en esta formulación de la densidad de niveles TC y fortaleza de emisión PI, podemos conocer la temperatura con tan solo encontrar el canal del espectro en el cual se detecta el mayor número de cuentas (la moda de la distribución). En otras palabras, para una formulación dada que relacione la temperatura con el parámetro de densidad de niveles, podemos conocer el parámetro de densidad de niveles con conocer la moda de la distribución.

Escogiendo la formulación  $T = \sqrt{U/a}$ , obtenemos las relaciones entre el parámetro densidad de niveles para diferentes fortalezas de emisión en función de la moda de la distribución:

$$\Gamma \propto E_\gamma^3, \quad a = 11[0,304(4)\mu - 0.42(1)]^{-2} \text{ MeV}, \quad (38a)$$

$$\Gamma \propto E_\gamma^4, \quad a = 11[0,266(3)\mu - 0.41(1)]^{-2} \text{ MeV}, \quad (38b)$$

$$\Gamma \propto E_\gamma^5, \quad a = 11[0,237(3)\mu - 0.40(1)]^{-2} \text{ MeV}. \quad (38c)$$



Cuadro II: Parámetros del ajuste de la función de Gumbel para diferente orden multipolar en la fortaleza de emisión a diferentes temperaturas, con energía de excitación fijada en  $U = 11$  MeV

Fortaleza	T(MeV)	0.591	0.632	0.671	0.707	0.742	0.775
$\Gamma \propto E_\gamma^3$	A	11022(27)	11023(32)	11013(27)	11011(29)	11020(32)	11027(33)
	$\sigma$	0.759(2)	0.802(3)	0.842(2)	0.880(3)	0.918(3)	0.954(3)
	$\mu$	3.321(2)	3.462(3)	3.596(2)	3.711(3)	3.823(3)	3.922(3)
$\Gamma \propto E_\gamma^4$	A	11074(31)	11061(26)	11050(33)	11060(35)	11062(41)	11066(38)
	$\sigma$	0.843(3)	0.889(2)	0.935(3)	0.977(4)	1.014(4)	1.054(4)
	$\mu$	3.758(3)	3.925(2)	4.071(3)	4.204(4)	4.330(4)	4.448(4)
$\Gamma \propto E_\gamma^5$	A	11090(35)	11082(39)	11098(47)	11110(50)	11116(58)	11110(63)
	$\sigma$	0.917(3)	0.970(4)	1.024(5)	1.072(6)	1.118(7)	1.155(8)
	$\mu$	4.187(3)	4.368(4)	4.536(5)	4.688(6)	4.830(7)	4.958(8)

## B. Simulación con GAMBLE

Simulamos el decaimiento del  $^{170}\text{Hf}$  proveniente de la reacción  $^{130}\text{Te}(^{44}\text{Ca}, 4n)^{170}\text{Hf}$  a  $E_{lab} = 195$  MeV en el sistema laboratorio. Los cálculos hechos con el programa PACE [16] predicen que la distribución de estados de entrada estará centrada alrededor de  $(E, I) = (30 \text{ MeV}, 56\hbar)$ , lo cual fue usado como entrada a GAMBLE [7]. Simulamos el espectro tomando dos formulaciones para la fortaleza de emisión GDR y PI. Ajustamos cada uno de los EEO orden  $N = 1$  a dos tipos de distribuciones; Gumbel(24) y Weibull(23). En la figura 8 se muestran los EEO de orden  $N = 1$  simulados con fortaleza de emisión PI, la figura 9 muestra los mismos espectros para fortaleza de emisión GDR. Para el caso de la función de Gumbel, el ajuste muestra estar en buen acuerdo en la mayor parte del espectro, pero presenta diferencias en la región de mayor energía, esta diferencia es debida a que GAMBLE utiliza como modelo para la densidad de niveles el gas de Fermi sin temperatura constante FG y que además tiene en cuenta la dependencia con el espín. La función de Weibull sí ajusta bien al espectro en todo el rango de energía. Los valores de los parámetros del ajuste a cada espectro, para ambas funciones, se encuentran en el cuadro III.

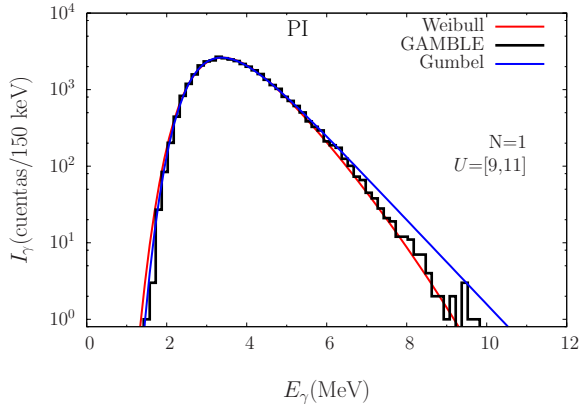


Figura 9: Ajustes de los espectros EEO de orden  $N = 1$ , obtenidos con Gamble utilizando fortaleza de emisión se partícula aislada PI y densidad de niveles FG.

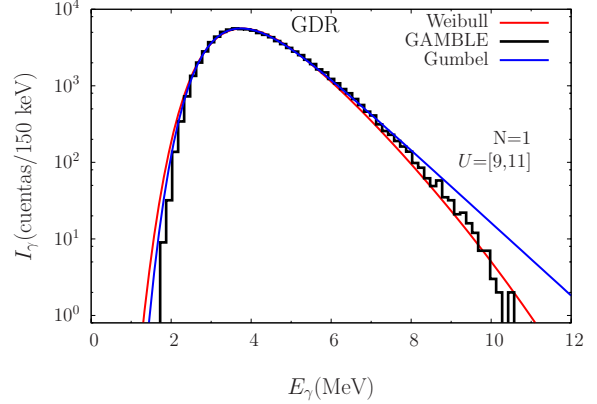


Figura 10: Ajustes de los espectros EEO orden  $N = 1$ , obtenidos con Gamble utilizando fortaleza de emisión GDR y densidad de niveles FG.

Cuadro III: Parámetros de los ajustes para la función de Gumbel y función de Weibull, para los espectros obtenidos con Gamble usando fortalezas de emisión GDR y PI, ambos casos con densidad de niveles FG [15].

	Parámetro	Gumbel	Weibull
PI	A	5620(25)	5550(30)
	$\sigma$	0.787(4)	15.61(7)
	$\mu$	3.369(4)	18.98(7)
	$\epsilon$	–	0.05
GDR	A	13970(59)	13876(96)
	$\sigma$	0.914(5)	18.2(1)
	$\mu$	3.743(1)	21.9(1)
	$\epsilon$	–	0.05

## VI. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Usando la propuesta de ordenar espectros de acuerdo con la energía de los rayos gamma emitidos, combinada con la técnica  $Hk$  [5], el presente trabajo propone el uso de la Estadística de Extremos como una herramienta para ser usada en la investigación de la estructura del núcleo a alta energía de excitación y espín.

Los espectros de los rayos gamma más enérgicos (EEO de orden  $N = 1$ ) obtenidos con el programa DMG muestran seguir una distribución de Gumbel. Por medio del

ajuste de los espectros a la distribución de Gumbel, mostramos de manera numérica:

- La relación entre la función intensidad y los parámetros de la función de Gumbel al variar la energía de excitación, cuando la temperatura cumple la formulación  $T = \sqrt{U/a}$ , dada por (37)

$$\Gamma \propto E_\gamma^m \sigma = (\eta_m(\mu))^{-1} - m \times 0,15(1) \text{ MeV.}$$

- Existe una relación lineal entre los parámetros de la función de Gumbel con la temperatura para las diferentes potencias de  $E_\gamma^m$  en el modelo PI. Esta relación permite obtener el parámetro de densidad de niveles en un formalismo dado, con tan solo identificar el canal del espectro en el cual se obtienen más cuentas (moda de la distribución).

Los resultados obtenidos en el trabajo muestran el futuro prometedor que tiene la aplicación de la teoría de valores extremos en el estudio del decaimiento gamma del continuo nuclear. Un trabajo próximo podría enfocarse en resolver las siguientes preguntas:

- I. ¿Existe una relación analítica entre los parámetros de la función Gumbel  $\mu, \sigma$  y las variables físicas del decaimiento  $T, m$ ?

$$\mu, \sigma \rightarrow T, m.$$

- II. ¿Que relación hay entre los parámetros de la función de Weibull y las variables físicas involucradas en los espectros obtenidos por GAMBLE?.

#### Apéndice A: Condiciones Necesarias y Suficientes para la convergencia a una Función de Valores Extremos

Decimos que una función  $F(x)$  pertenece al dominio de atracción de una distribución de extremos cuando la función  $F(x)$  tiende a una de las tres distribuciones asintóticas. Una función acumulativa  $F(x)$  se dice que pertenece al dominio de atracción de una función distribución no degenerada  $G(x)$  si existen  $a_n$  y  $b_n > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \quad (\text{A1})$$

decimos  $F \in D(G)$ . Las condiciones necesarias y suficientes para que esto ocurra están dada en el siguiente teorema.

#### Teorema 1

- I.  $F \in D(G_1)$  si y solo si  $F^{-1}(1) = +\infty$  y existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}, \quad (\text{A2})$$

para todo  $x > 0$ .

- II.  $F \in D(G_2)$  si y solo si  $F^{-1}(1)$  es finita y existe una constante  $\alpha > 0$  tal que para todo  $x > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - F(F^{-1}(1) - \epsilon x)}{1 - F(F^{-1}(1) - \epsilon)} = x^\alpha. \quad (\text{A3})$$

- III.  $F \in D(G_3)$  si y solo si  $E(X|X > c)$ (valor esperado) es finito para algún  $c < F^{-1}(1)$  y para todo real  $x$ ,

$$\lim_{t \rightarrow F^{-1}(1)} \frac{1 - F(t + xE(X - t|X > t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \quad (\text{A4})$$

donde  $X$  representa la población de la variable aleatoria con función distribución  $F$ .

#### Apéndice B: Función Intensidad de una Distribución

Definimos la función intensidad de una distribución como

$$\eta_m(x) = \frac{f_m(x)}{1 - F_m(x)}. \quad (\text{B1})$$

Estudiamos el caso de la función  $f_m(x) = Cx^m e^{-x/T}$  para  $m = 3, 4, 5$ . Sean las funciones densidad

$$m = 2 \quad f_3(x) = C_3 x^3 e^{-x/T}, \quad (\text{B2a})$$

$$m = 3 \quad f_4(x) = C_4 x^4 e^{-x/T}, \quad (\text{B2b})$$

$$m = 4 \quad f_5(x) = C_5 x^5 e^{-x/T}. \quad (\text{B2c})$$

Con funciones distribución:

$$F_3(x) = C_3 6T^4 [1 - e^{-g_3(x)}], \quad (\text{B3a})$$

$$F_4(x) = C_4 24T^5 [1 - e^{-g_4(x)}], \quad (\text{B3b})$$

$$F_5(x) = C_5 120T^6 [1 - e^{-g_5(x)}]. \quad (\text{B3c})$$

Donde  $C_1, C_2$  y  $C_3$  son constantes tales que  $F_3(U_0) = F_4(U_0) = F_5(U_0) = 1$  para  $x = U_0$ , y las funciones  $g_m(x)$  dadas por

$$g_3(x) = \frac{x}{T} - \ln \left[ \frac{x^3}{6T^3} + \frac{x^2}{2T^2} + \frac{x}{T} + 1 \right],$$

$$g_4(x) = \frac{x}{T} - \ln \left[ \frac{x^4}{24T^4} + \frac{x^3}{6T^3} + \frac{x^2}{2T^2} + \frac{x}{T} + 1 \right],$$

$$g_5(x) = \frac{x}{T} - \ln \left[ \frac{x^5}{120T^5} + \frac{x^4}{24T^4} + \frac{x^3}{6T^3} + \frac{x^2}{2T^2} + \frac{x}{T} + 1 \right].$$

Las respectivas funciones intensidad están dadas por:

$$\eta_3(x) = \frac{x^3 e^{-x/T}}{6T^4 [e^{-g_3(x)} - e^{-g_3(U_0)}]}, \quad (\text{B5a})$$

$$\eta_4(x) = \frac{x^4 e^{-x/T}}{24T^5 [e^{-g_4(x)} - e^{-g_4(U_0)}]}, \quad (\text{B5b})$$

$$\eta_5(x) = \frac{x^5 e^{-x/T}}{120T^6 [e^{-g_5(x)} - e^{-g_5(U_0)}]}. \quad (\text{B5c})$$

### Apéndice C: Modelo PI y TC como Miembro de la Familia Natural de Distribuciones Exponenciales

Identificamos la función de densidad obtenida al usar el modelo PI (5) combinado con TC (3) como miembro de una familia de exponenciales. Este apéndice es útil ya que este concepto es utilizado frecuentemente en la teoría de estadística.

Se llama familia de distribuciones exponenciales (ref. [17]) con parámetro  $\theta$  a todas las funciones de la forma

$$f(x) = \exp(A(\theta)B(x) + C(x) + D(\theta)) \quad (C1)$$

Donde  $A, B, C, D$  son funciones arbitrarias de sus argumentos. Una subclase de la familia es llamada la familia

natural cuando  $B(x) = x$

$$f(x) = \exp(xA(\theta) + C(x) + D(\theta)). \quad (C2)$$

En este caso  $A(\theta)$  es llamado el parámetro natural. Cuando usamos el modelo PI combinado con TC es fácil ver que la función densidad pertenece a la familia natural de distribuciones exponenciales con parámetro natural  $\theta = -1/T$ , con funciones  $C(x) = \log x^m$  y  $D(\theta) = \text{constante}$ . Esto es

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x}{T} + \log x^m + \text{cste}\right). \quad (C3)$$

- 
- [1] J. L. Egido and H. A. Weidenmüller, Phys. Rev. **C39**, 2398 (1989).
- [2] J. O. Newton and et al, Phys. Rev. Lett. **46**, 1383 (1981).
- [3] S. Shlomo and M. Kolomietz, Rep. Prog. Phys. **68**, 1 (2005).
- [4] E. Algin and et al, Phys. Rev. **C78**, 054321 (2008).
- [5] M. Jääskeläinen and et al., Nucl. Inst. Meth. **204**, 385 (1983).
- [6] C. Baktash and et al, Nuc. Phys. **A520**, 555c (1990).
- [7] F. Cristancho, Heavy Ion Physics **299**, 313 (1995).
- [8] J. P. Urrego and F. Cristancho, Heavy Ion Physics **16**, 75 (2002).
- [9] J. Cardona and F. Cristancho, Heavy Ion Physics **7**, 305 (1998).
- [10] M. Fréchet, Ann. Soc. Polonaise Math. **6**, 92 (1927).
- [11] B. C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. Nagaraja, *A First Course in Order Statistics* (John Wiley and Sons, 1992), 1st ed.
- [12] R. A. Fisher and L. H. C. Tippett, Proc. Cambridge Philos. Soc. **24**, 180 (1928).
- [13] E. J. Gumbel, *Statistics of Extremes* (Columbia University Press, New York, 1958), 1st ed.
- [14] B. Gnedenko, Ann. Math. **44**, 423 (1943).
- [15] G. A. Leander, Comp. Phys. Comm. **38**, 311 (1987).
- [16] A. Gavron, Phys. Rev. **C21**, 230 (1980).
- [17] A. Stuart and K. Ord, *Kendall's Advanced Theory of Statistics. Distribution Theory* (John Wiley and Sons Inc, 1994), sixth ed.
- [18] <http://www.gnuplot.info/>