

Agradecimientos

A Juan David, mi hermano menor, por ayudarme a conservar el buen humor en medio de las dificultades.

Al Profesor Cristancho por todo lo que aprendí en estos cuatro años y medio en el Grupo de Física Nuclear.

Al señor José Fernando Isaza, por la Beca de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.

Resumen

Se presenta un conjunto de programas escrito por el autor para la medición de vidas medias por el método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler. Este conjunto muestra ser mejor que el programa `fits` desde muchos puntos de vista. Se exponen los fundamentos teóricos de los algoritmos implementados en los programas. En este aspecto, es de destacar, la obtención de una ecuación general para el cálculo de las formas de línea. A través del análisis de las formas de línea de un experimento real se muestra que los resultados de los programas creados en este trabajo son similares a los de `fits`, cuando ambos usan modelos idénticos para la simulación del frenado de los núcleos. Se entrega una guía de instalación y operación de los programas.

Índice General

1	Introducción	2
2	La población de los estados en función del tiempo	5
2.1	La ley de decaimiento exponencial	5
2.2	La medición de la vida media de los estados como método de prueba de los modelos sobre la estructura nuclear	7
2.3	Evolución de la población cuando el tiempo se mide desde la creación del núcleo	9
2.4	¿Con qué reloj se mide t'' ?	17
3	El método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler	18
3.1	Reacción de fusión evaporación	18
3.2	Cálculo de las formas de línea	20
3.3	Efecto de la función de respuesta a impulso del detector	25
3.4	La medición de la vida media	26
4	Modelo usado para el cálculo de $f_{\beta}(\beta_k, t)$	28
4.1	Modelo usado para el cálculo de $f(\vec{v}, t)$	28
4.2	Cálculo de la distribución de $\cos \theta$, $f(\cos \theta)$	31
4.3	Combinación de $f(v, t)$ con $f(\cos \theta)$ para encontrar $f_{\beta}(\beta_k, t)$	35
5	Efectos relativistas	37
5.1	Error cometido en el cálculo de la velocidad al usar la ecuación clásica para la energía cinética	37
5.2	Error cometido en el cálculo de E_{γ} al despreciar la energía cinética de retroceso del núcleo	38
5.3	Diferencia en la medida de t'' en el marco de referencia del núcleo y en el marco de referencia del laboratorio por la dilatación del tiempo	39
5.4	Error cometido en el cálculo del corrimiento ΔE al tomar términos hasta de orden 1 en la expansión en serie de potencias de la ecuación exacta del efecto Doppler	41
6	Programas escritos en este trabajo	43
6.1	Instalación de los programas	43
6.2	Metodología de trabajo para la medición de vidas medias	46

6.2.1	Obtención de la tabla de poder de frenado	46
6.2.2	Generación de la distribución de cosenos	46
6.2.3	stopping9	46
6.2.4	Los programas auxiliares stopping6_1 y stopping7_1	48
6.2.5	ajuste15	50
6.2.6	ajuste16	56
6.2.7	El programa auxiliar no_h5	60
7	Un caso de estudio	64
7.1	Medición de las vidas medias de los estados de la banda principal del ^{83}Y	64
7.2	Ensayo de alternativas en el modelamiento del poblamiento lateral	77
8	Comparación de los programas ajuste16 y ajuste15 con fits	80
9	Perspectivas	82
10	Conclusiones	84
A	Cálculo analítico de la forma de línea $f(\Delta E)$ en un caso particular	85
B	Otra forma de calcular la velocidad de los núcleos residuales en función del tiempo, $v(t)$	88
C	Razón de producción de eventos en una reacción de fusión-evaporación	90
C.1	Número de fusiones por unidad de tiempo	90
C.2	Distribución de Poisson de las cuentas en los canales del espectro de energías	91

Capítulo 1

Introducción

Una de las líneas de trabajo del Grupo de Física Nuclear de la Universidad Nacional es la medición de vidas medias de estados nucleares por el método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler (Doppler Shift Attenuation, DSA). Un hecho característico de este método es el ensanchamiento, por efecto Doppler, de las formas de línea de las transiciones en el espectro de energías, de los rayos gamma emitidos por los núcleos a estudiar. Para medir las vidas medias, las formas de línea experimentales, se ajustan con formas de línea generadas por un programa que simula los procesos que tienen lugar en un experimento de DSA. Hasta la fecha, el Grupo de Física Nuclear había usado para este propósito el programa `fits` escrito en la Universidad del Estado de Florida. En este trabajo se presenta un conjunto de programas escrito por el autor que desempeñan una función similar a la de `fits` pero que superan a éste en eficiencia, programación estructurada, versatilidad en su operación y adaptabilidad a diferentes modelos sobre el experimento.

En el capítulo 2 se explica la ley de decaimiento exponencial respecto a la cual se define la vida media de un estado. La población de un estado es vista no como una función que evoluciona en el tiempo, sino como la densidad de probabilidad de una variable aleatoria con unidades de tiempo. Este punto de vista es importante para la consistencia conceptual del estudio del método DSA. Cuando el tiempo se mide desde el instante de poblamiento del estado de interés, la población decae exponencialmente. Sin embargo, en un experimento de DSA el tiempo es medido indirectamente desde el instante de creación del núcleo de interés. En estas condiciones, la población de los estados en el tiempo presenta una forma funcional distinta a la exponencial decreciente, que debe ser hallada mediante la solución de la ecuación de Bateman. Es usual en el análisis del decaimiento de estados que esta ecuación se postule y que la ley de decaimiento exponencial resulte como una consecuencia de ella en el caso particular en que el estado no es poblado por otros estados. En este trabajo, para hacer énfasis en el punto de vista probabilístico, se propone el esquema deductivo en el sentido inverso, es decir, se postula la ley de decaimiento exponencial y se deduce de ella la ecuación de Bateman.

En este capítulo, también, se esboza el modelo que predice la ley de decaimiento exponencial con base en la ecuación de Schrödinger. En el estudio de este modelo resulta claro que, con base en los estados predichos por algún modelo sobre la es-

estructura nuclear, puede hacerse un cálculo teórico de la vida media de los estados estudiados. La comparación de las vidas medias encontradas experimentalmente con las calculadas teóricamente es un criterio de prueba de dicho modelo sobre la estructura nuclear.

El método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler es explicado en el capítulo 3. Se muestra que el corrimiento por efecto Doppler tiene como papel transformar la población del estado de interés en función del tiempo en la densidad de probabilidad del corrimiento, es decir la forma de línea de la transición. Esta discusión se lleva a cabo inicialmente para la situación hipotética en que todos los núcleos residuales se frenan siguiendo la misma curva de velocidad en el tiempo y los vectores de onda de los fotones emitidos presentan la misma dirección. Después, los resultados hallados se generalizan al caso en que hay dispersión de las velocidades de los núcleos y de los vectores de onda. Por este camino se encuentra una ecuación según la cual la forma de línea de la transición puede hallarse aplicando una transformada integral a la población del estado. El kernel de esta transformada es proporcional a la densidad de probabilidad de la componente de la velocidad del núcleo en la dirección del vector de onda, como función del tiempo, $f_{\beta}(\beta_k, t)$.

En el capítulo 4 se describe el modelo empleado para el cálculo de $f_{\beta}(\beta_k, t)$. En este modelo todos los núcleos residuales se mueven con velocidad paralela al haz de proyectiles, suposición que permite la caracterización de la velocidad con un único parámetro, su magnitud. Como pasos intermedios en el cálculo de $f_{\beta}(\beta_k, t)$ se encuentran la densidad de probabilidad de la velocidad en función del tiempo, $f(v, t)$, y la densidad de probabilidad del coseno del ángulo entre la velocidad y el vector de onda de los fotones detectados, $f(\cos \theta)$.

El análisis del método DSA en que se basan los algoritmos de los programas escritos en este trabajo tiene como fundamento las ecuaciones de la mecánica newtoniana y la aproximación hasta orden uno en v/c de la ecuación relativista del efecto Doppler (para efectos de esta introducción, llámeseles “ecuaciones clásicas”). En el capítulo 5 se hace una primera discusión de las consecuencias de considerar los términos de orden inmediatamente superior a aquellos que conducen a las ecuaciones clásicas, en la expansión en serie de potencias de v/c de las ecuaciones relativistas.

En el capítulo 6 se presentan las últimas versiones de los programas escritos en este trabajo. Dos de ellos, `ajuste15` y `ajuste16` generan formas de línea teóricas. Se expone la metodología de trabajo a seguir: el orden en que deben ser ejecutados, sus archivos de entrada y salida y algunos detalles a destacar de su código fuente. Algunos procedimientos empleados en `fits`, no obstante su justificación dudosa, fueron utilizados en los programas escritos en este trabajo. El uso de estos procedimientos no afecta la esencia del método DSA y, en cambio, facilita la comparación de los resultados de estos programas con los de `fits`.

En el capítulo 7 se comparan los resultados de `ajuste16` con los de `fits` en el ajuste de formas de línea obtenidas en un experimento real. Se usa una distribución $f_{\beta}(\beta_k, t)$ generada con un programa que implementa el mismo modelo usado por `fits` en la simulación del frenado de los núcleos. Los resultados de `fits` y los de `ajuste16` coinciden.

Las ventajas de `ajuste15` y `ajuste16` sobre `fits` se explican en el capítulo 8.
Algunas tareas a realizar, en relación con este trabajo, se enumeran en el capítulo 9.

Capítulo 2

La población de los estados en función del tiempo

2.1 La ley de decaimiento exponencial

A través de cierto mecanismo se lleva un núcleo a un estado excitado $|\phi\rangle$. Se registra el tiempo t' que transcurre desde que el núcleo llega a $|\phi\rangle$ hasta que abandona este estado. Se repite muchas veces este procedimiento (a cada repetición se le llamará un *ensayo*) poblando siempre el mismo estado. Se observa que t' es una variable aleatoria continua, es decir su valor no es igual en todos los ensayos y no está restringido a un conjunto discreto. Se encuentra experimentalmente que la densidad de probabilidad de t' , $f'(t)$, definida por

$$\left(\begin{array}{l} \text{Probabilidad de que } t' \text{ se} \\ \text{halle el intervalo } (t_a, t_b) \end{array} \right) = \int_{t_a}^{t_b} f'(t) dt, \quad (2.1)$$

es

$$f'(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad (2.2)$$

donde τ es una constante llamada vida media del estado $|\phi\rangle$. Al hecho de exhibir t' una densidad de probabilidad con la forma funcional indicada por (2.2) se le llama *ley de decaimiento exponencial*.

Sin embargo, esta ley no está aún enunciada en una forma que sea susceptible de comparación con resultados basados en la ecuación de Schrödinger. Con el fin de llegar a una ecuación que sí lo sea, es necesario derivar de (2.2) una expresión para la probabilidad $P'(t)$ de que el núcleo se encuentre en el estado inicial $|\phi\rangle$ en el tiempo t medido desde el instante de poblamiento de $|\phi\rangle$, dado que el cálculo teórico de esta cantidad puede hacerse a través de la expresión

$$P'(t) = |\langle\phi|\Psi(t)\rangle|^2, \quad (2.3)$$

donde $|\Psi(t)\rangle$ es el estado del núcleo en t .

En la deducción de $P'(t)$ con base en $f'(t)$ resulta útil la figura 2.1. En ella se han representado los t' medidos en 6 ensayos en forma de barras horizontales con

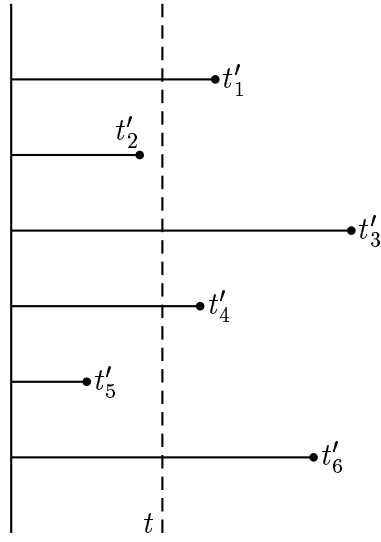


Figura 2.1: Representación del tiempo t' mediante barras horizontales, para algunos ensayos.

una longitud proporcional a t' . En el tiempo t en el cual se quiere conocer $P'(t)$ se ha trazado una línea discontinua vertical. En esta representación, la condición “encontrarse en $|\phi\rangle$ ”, cuya probabilidad se indaga adquiere la siguiente expresión gráfica: el núcleo del evento i -ésimo se encuentra en $|\phi\rangle$ en t , si la barra correspondiente es cruzada por la línea discontinua, como sucede en $\{t'_1, t'_3, t'_4, t'_6\}$. De la expresión gráfica de la condición se llega inmediatamente a su expresión analítica: el núcleo del ensayo i -ésimo se encuentra en $|\phi\rangle$ si $t'_i > t$ o, dicho de otra forma, si $t'_i \in (t, \infty)$. Es decir, $P'(t)$ puede definirse con base en t' así

$$P'(t) \equiv \left(\begin{array}{l} \text{Probabilidad de que } t' \text{ se} \\ \text{halle en el intervalo } (t, \infty) \end{array} \right) \quad (2.4)$$

A partir de las ecuaciones (2.4) y (2.1) se obtiene

$$P'(t) = \int_t^{\infty} f'(t) dt \quad (2.5)$$

Al remplazar (2.2) en (2.5) se llega a

$$P'(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{\infty} e^{-t'/\tau} dt \quad (2.6)$$

$$P'(t) = e^{-t/\tau}. \quad (2.7)$$

Para simplificar la terminología a la ecuación (2.7) también se le llamará *ley de decaimiento exponencial*).

2.2 La medición de la vida media de los estados como método de prueba de los modelos sobre la estructura nuclear

La ecuación (2.7) puede ser predicha mediante la solución aproximada de la ecuación de Schrödinger en un modelo en el cual el sistema puede hacer una transición desde un estado inicial discreto hasta un conjunto de estados finales en un continuo [1, pag. 1344]. En este desarrollo, el sistema a estudiar lo constituyen el núcleo y el campo electromagnético. En $t = 0$ el núcleo se encuentra en un estado $|\phi_i\rangle$ y el campo se halla en un estado de cero fotones en todos sus modos, $|0\rangle$. El estado del sistema es

$$|\varphi_i\rangle = |\phi_i\rangle|0\rangle \quad (2.8)$$

Desde este estado el núcleo puede llegar a un estado $|\phi_f\rangle$ a través de la emisión de un fotón con vector de onda \mathbf{k} . El campo electromagnético queda en el estado propio del operador número, asociado al modo con vector de onda \mathbf{k} , con valor propio igual a uno, $|1_{\mathbf{k}}\rangle$. Tal estado del sistema se representa mediante

$$|\phi_f, 1_{\mathbf{k}}\rangle = |\phi_f\rangle|1_{\mathbf{k}}\rangle. \quad (2.9)$$

\mathbf{k} puede tomar cualquier valor, dado que no se imponen condiciones experimentales que restrinjan los modos posibles del campo electromagnético.

En la referencia [1] se demuestra que la probabilidad de encontrar al sistema en el estado inicial discreto $P_i(t)$ varía de acuerdo con ¹

$$P_i(t) = e^{-\Gamma t} \quad (2.10)$$

donde

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \int d\beta |\langle\beta, E = E_i|H_{int}|\varphi_i\rangle|^2 \rho(\beta, E = E_i). \quad (2.11)$$

En la ecuación anterior,

$$|\beta, E\rangle = |\phi_f, 1_{\mathbf{k}}\rangle, \quad (2.12)$$

donde E es la energía del estado y β es el vector conformado por todos los números cuánticos del estado final del sistema distintos a la energía (entre ellos están los dos ángulos que indican la dirección de número de onda del fotón, (θ, ϕ)); H_{int} es el hamiltoniano de interacción del campo electromagnético con el núcleo, dado por [5]

$$H_{int} = -\frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad (2.13)$$

¹La ley de decaimiento exponencial se demuestra mediante teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a segundo orden en la referencia [2, pag. 343]. El lector interesado en comparar la emisión espontánea de radiación electromagnética en el caso nuclear con ésta en el caso atómico, puede encontrar información sobre la última en la referencia [3]. La idea original de la explicación del decaimiento exponencial con base en la ecuación de Schrödinger, debida a V.F. Weiskopf y E. Wigner, se encuentra en la referencia [4].

$\rho(\beta, E)$ es la densidad de estados, en este caso

$$\rho = \frac{k^2}{\hbar c}. \quad (2.14)$$

Cuando

$$\Gamma t \ll 1 \quad (2.15)$$

la ecuación (2.10) puede aproximarse por su expansión en serie de potencias de Γt a primer orden

$$P_i(t) = 1 - \Gamma t. \quad (2.16)$$

El resultado obtenido de esta manera, (2.16), coincide con aquel al que se llega, al resolver el problema con teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a primer orden [1]. En esta aproximación, la probabilidad de que el núcleo se encuentre en el estado $|\phi_f\rangle$, $P_f(t)$ está dada por

$$P_f(t) = \Gamma t. \quad (2.17)$$

Es decir $P_f(t)$ es proporcional al tiempo, razón por la cual a Γ se le llama la probabilidad de transición por unidad de tiempo (usualmente simbolizada con la letra w). En la referencia [2] se le llama *regla de oro de Fermi* a la ecuación (2.11). En la referencia [1] este nombre se le da al integrando en el lado derecho de esta ecuación.

El elemento matricial en la ecuación (2.11)

$$\langle \beta, E = E_i | H_{int} | \alpha_i \rangle \quad (2.18)$$

puede expresarse como el producto de una expresión que depende del estado del campo electromagnético y un elemento matricial que depende únicamente de los estados nucleares final e inicial [5],

$$\langle \phi_i | H'_{int} | \phi_f \rangle, \quad (2.19)$$

donde H'_{int} es algún operador que sólo depende de los grados de libertad del núcleo. Al comparar la ecuaciones (2.7) y (2.10), descontando las diferencias en la notación, se concluye que

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}. \quad (2.20)$$

Cuando el estado inicial puede hacer transiciones a varios estados finales, la ecuación análoga a (2.20) es [6]

$$\tau = \frac{b_i}{\Gamma_i}, \quad (2.21)$$

donde Γ_i es la probabilidad de transición al estado final i -ésimo y b_i , llamado razón de ramificación, es la fracción de decaimientos del estado inicial que llega a ese estado final.

Al medir experimentalmente la vida media τ , mediante la ecuación (2.20) se puede calcular la constante de decaimiento Γ . Por otra parte al proponerse un modelo para la estructura del núcleo estudiado, los estados predichos por este modelo

pueden remplazarse en (2.19) y con base en ellos se puede hacer un cálculo de la constante de decaimiento. Para que el modelo se considere exitoso este valor debe ser cercano a aquel hallado con base en la vida media encontrada experimentalmente. De esta manera, la medida de la vida media provee un método de prueba de los modelos sobre la estructura nuclear. De hecho, esta es la razón que justifica la medición de vidas medias en el contexto en que está inscrito este trabajo.

2.3 Evolución de la población cuando el tiempo se mide desde la creación del núcleo

Según lo expuesto en la sección 2.1 para medir la vida media de un estado pueden seguirse, *en principio*, los siguientes pasos: *i*) Construir un histograma de t' a partir de los resultados de un número N_T de ensayos (para hacer más cómoda la exposición, se llamará tanto al conjunto de los resultados de todos los ensayos, $\{t'_1, t'_2, \dots, t'_{N_T}\}$, como al histograma construido a partir de ellos, una *muestra* de la densidad de probabilidad de t'). *ii*) Buscar el valor de τ que corresponda a la función de la forma (2.2) que mejor se ajuste a la muestra. Dicho valor se tomará como la medida de la vida media.

En el experimento que se estudia en este trabajo, sin embargo, este procedimiento no puede llevarse a cabo debido a que, en general, no es posible obtener una muestra de la densidad de probabilidad de t' . Las razones se exponen enseguida.

En un experimento de DSA se puede medir *indirectamente* (más adelante se explicará cómo) el tiempo t'' , que transcurre desde la creación del núcleo de interés hasta el decaimiento del estado de interés $|\phi\rangle$. El estado inicial de los núcleos creados no es el mismo siempre. Es tomado aleatoriamente de cierto conjunto de estados iniciales posibles. Desde el estado inicial $|\phi_1\rangle$ el núcleo realiza una secuencia de transiciones, pasando por estados $|\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$, hasta llegar a $|\phi\rangle$. El núcleo permanece un tiempo $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ en cada estado respectivamente. En $|\phi\rangle$ permanece un tiempo t' , por definición. Luego, es evidente que

$$t'' = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n + t' \quad (2.22)$$

Por ser t'' una suma de variables aleatorias no correlacionadas, es también una variable aleatoria. Por supuesto, cada una de las variables t_1, t_2, \dots, t_n, t' , sigue la ley de decaimiento exponencial, es decir, presenta una densidad de probabilidad dada por (2.2).

Para que t'' y t' coincidan se requiere que el estado inicial sea el mismo estado de interés. Si acaso $|\phi\rangle$ perteneciera al conjunto de estados iniciales posibles, para conseguir una muestra de la densidad de probabilidad de t' se deberían escoger de entre todos los ensayos aquellos cuyo estado inicial sea $|\phi\rangle$, pero no se conoce un método para realizar tal selección.

Por lo dicho anteriormente es claro que si se está en el empeño de determinar τ , no hay otra opción que hacerlo a partir de una muestra de la densidad de probabilidad de t'' , no de t' . Esta tarea se puede intentar mediante el ajuste de una función de

prueba a la muestra, de manera similar a como se sugirió al inicio de esta sección. Sin embargo, ya no resultaría adecuado tomar como función de prueba $1/\tau \exp(-t/\tau)$, dado que, en general ésta no es la forma funcional de la densidad de probabilidad de t'' . Enseguida se expone el método para encontrar dicha forma funcional en el caso general.

Según las ecuaciones (2.2) y (2.7)

$$f'(t) = \frac{P'(t)}{\tau}. \quad (2.23)$$

Recuérdese que $f'(t)$ es la densidad de probabilidad de t' y $P'(t)$ es la probabilidad de que el núcleo se encuentre en el estado de interés cuando ha transcurrido un tiempo t desde su poblamiento. Se mostrará que la densidad de probabilidad de t'' cumple una relación análoga a (2.23),

$$f''(t) = \frac{P''(t)}{\tau}, \quad (2.24)$$

donde f'' es la densidad de probabilidad de t'' y $P''(t)$ es la probabilidad de que el núcleo se encuentre en el estado de interés cuando ha transcurrido un tiempo t desde el instante de su creación (no de poblamiento del estado de interés).

El intervalo de duración t'' se dividirá en dos etapas: la primera es el intervalo de tiempo que va desde el instante de creación del núcleo hasta el instante de poblamiento del estado de interés. A la duración de esta etapa se le llamará t^* . La segunda etapa va desde el poblamiento del estado de interés hasta su decaimiento, su duración es t' . Desde luego

$$t'' = t^* + t'. \quad (2.25)$$

Al comparar (2.25) con (2.22) se concluye que

$$t^* = t_1 + t_2 + \dots + t_n. \quad (2.26)$$

Esta subdivisión del intervalo de duración t'' se ilustra en la figura 2.2. En ella, se ha representado con una barra delgada el intervalo de duración t^* , y con una barra gruesa el intervalo de duración t' . El tiempo t en el cual se quiere calcular $P''(t)$ se ha representado con una línea vertical discontinua. Para que el núcleo se encuentre en el estado de interés en t , es decir, para que la línea discontinua toque una barra gruesa, se requiere que $t^* < t$ y que $t'' > t$.

Sea Δq la probabilidad de que

$$t^* \text{ tome un valor en el intervalo } (t_a, t_a + \Delta t_a), \quad (2.27)$$

con Δt_a muy pequeño. Por la definición de la densidad de probabilidad de t^* , $f^*(t)$,

$$\Delta q = f^*(t_a) \Delta t_a. \quad (2.28)$$

Sea $q^*(t_a)$ la probabilidad de que

$$t'' > t \text{ cuando } t^* = t_a. \quad (2.29)$$

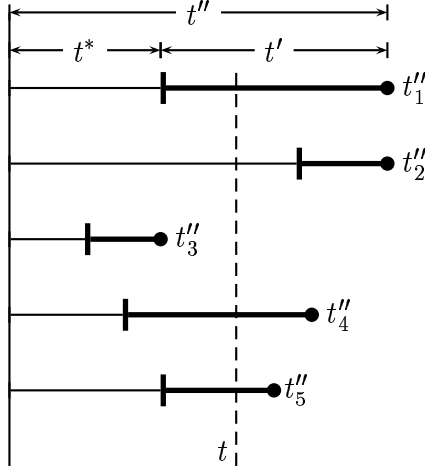


Figura 2.2: Cálculo de $P''(t)$ a partir de una muestra

Usando la ecuación (2.25) la condición (2.29) puede expresarse en la forma

$$t_a + t' > t. \quad (2.30)$$

Al despejar t' de la desigualdad se llega a

$$t' > t - t_a. \quad (2.31)$$

Luego,

$$q^*(t_a) = \left(\begin{array}{l} \text{Probabilidad de que} \\ t' \in (t - t_a, \infty) \end{array} \right). \quad (2.32)$$

Por la definición de la densidad de probabilidad de t' , $f'(t)$,

$$q^*(t_a) = \int_{t-t_a}^{\infty} f'(t_b) dt_b. \quad (2.33)$$

La probabilidad, ΔP , de que se cumplan simultáneamente las condiciones (2.27) y (2.29) es

$$\Delta P = \Delta q q^*(t_a) \quad (2.34)$$

$$= f^*(t_a) \Delta t_a \int_{t-t_a}^{\infty} f'(t_b) dt_b. \quad (2.35)$$

Para encontrar $P''(t)$ se debe sumar ΔP sobre todos los valores de t_a , tales que $t_a < t$.

$$P''(t) = \sum_{t_a < t} \Delta P \quad (2.36)$$

$$= \int_0^t f^*(t_a) dt_a \int_{t-t_a}^{\infty} f'(t_b) dt_b \quad (2.37)$$

Al reemplazar (2.2) en (2.37) se llega a

$$P''(t) = \int_0^t dt_a f^*(t_a) \int_{t-t_a}^{\infty} dt_b \frac{1}{\tau} e^{-t_b/\tau} dt_b. \quad (2.38)$$

Al realizar la integración sobre t_b ,

$$P''(t) = e^{-t/\tau} \int_0^t dt_a f^*(t_a) e^{t_a/\tau}. \quad (2.39)$$

En seguida se procede la cálculo de $f''(t)$ con base en $f^*(t)$ y $f'(t)$. Para ver cómo se calcula la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que es la suma de dos variables aleatorias se mostrará primero un ejemplo con variables discretas. Sean m y n dos variables aleatorias discretas, independientes, con distribuciones de probabilidad $p_m(m)$ y $p_n(n)$ respectivamente. Se quiere hallar la probabilidad de que la suma de estas dos variables, a la que se llamará l tenga un valor determinado, por ejemplo, $l = 5$. Esta condición se cumple cuando $m = 2$ y $n = 3$. Como m y n son independientes, la probabilidad de que esto ocurra es

$$p(m = 2, n = 3) = p_m(2)p_n(3) \quad (2.40)$$

Sin embargo ésta no es la probabilidad de que l sea igual a 5 dado que existen otras combinaciones de valores de m y n que dan este resultado, por ejemplo $(m = 1, n = 4)$, $(m = 3, n = 2)$. Para obtener la probabilidad de $l = 5$ deben sumarse las probabilidades $p_m(m)p_n(n)$ de todas la combinaciones tales que $n + m = 5$,

$$p(l = 5) = \sum_{m+n=5} p_m(m)p_n(n), \quad (2.41)$$

en general, para un valor de l cualquiera,

$$p(l) = \sum_{m+n=l} p_m(m)p_n(n) \quad (2.42)$$

Despejando n de la ligadura $m + n = l$ y reemplazándola en (2.42) se llega a

$$p(l) = \sum_{m=0}^l p_m(m)p_n(l - m). \quad (2.43)$$

En la ecuación anterior se ha supuesto que m y n sólo pueden tomar valores no negativos.

Ahora se considerará un problema análogo al anterior pero con variables aleatorias continuas. Sean x e y dos variables aleatorias continuas, independientes, con densidades de probabilidad $f_x(x)$ y $f_y(y)$, respectivamente. Se desea conocer la densidad de probabilidad de la variable z definida por $z = x + y$. En vez de mostrar la deducción de la expresión que permite calcular f_z con base en f_x y f_y se indicará una regla nemotécnica para obtenerla a partir de su versión discreta (ecuación 2.43).

Remplácense en la ecuación (2.43) las probabilidades por densidades de probabilidad y cámbiense el símbolo de suma por un símbolo de integración. Al ejecutar estos cambios se obtiene

$$f_z(z) = \int_0^z f_x(x)f_y(z-x)dx \quad (2.44)$$

Al aplicar al ecuación (2.44) a t'' (ecuación (2.25)) se llega a

$$f''(t) = \int_0^t f^*(t_a)f'(t-t_a)dt_a \quad (2.45)$$

donde f'' , f^* y f' son las densidades de probabilidad de t'' , t^* y t' respectivamente. Al remplazar (2.2) en (2.45) se llega a

$$f''(t) = \int_0^t dt_a f^*(t_a) \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t-t_a}{\tau}\right) \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t dt_a f^*(t_a) e^{t_a/\tau} \quad (2.47)$$

Al comparar (2.39) con (2.47) se concluye que

$$f''(t) = \frac{P''(t)}{\tau}. \quad (2.48)$$

Nótese que este resultado es independiente de la forma funcional de $f^*(t)$.

Sea N_T el número total de ensayos del experimento. Sea N el número de ensayos para los cuales el núcleo se halla en el estado de interés en el tiempo t . De ahora en adelante debe darse por sentado que t se mide desde el instante de creación del núcleo. A $N(t)$ se le llamará *población del estado en función del tiempo*. Sea ΔN_- el número de núcleos que abandonan el estado de interés en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$, con Δt muy pequeño. Si $N_T \rightarrow \infty$,

$$\left(\begin{array}{l} \text{Probabilidad de que un núcleo} \\ \text{abandone el estado de interés en} \\ (t, t + \Delta t) \end{array} \right) = \frac{\Delta N_-}{N_T} \quad (2.49)$$

y

$$P''(t) \equiv \left(\begin{array}{l} \text{Probabilidad de que el núcleo se} \\ \text{halle en el estado de interés en } t \end{array} \right) = \frac{N}{N_T}. \quad (2.50)$$

Con base en la ecuación (2.49) y la definición de densidad de probabilidad se encuentra que

$$\frac{\Delta N_-}{N_T} = f''(t)\Delta t. \quad (2.51)$$

Despejando ΔN_- ,

$$\Delta N_- = N_T f''(t)\Delta t \quad (2.52)$$

Al remplazar (2.48) en (2.52) se llega a

$$\Delta N_- = N_T \frac{P''(t)}{\tau} \Delta t. \quad (2.53)$$

Al sustituir (2.50) en (2.53) se tiene

$$\Delta N_- = \frac{N}{\tau} \Delta t. \quad (2.54)$$

Se desea conocer el cambio del número de núcleos en el estado de interés, ΔN , en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$. ΔN es la diferencia entre el número de núcleos que abandonan el estado de interés y el número de núcleos que llegan al estado de interés, ΔN_+ ,

$$\Delta N = \Delta N_+ - \Delta N_-. \quad (2.55)$$

Los núcleos que llegan al estado de interés lo hacen a través de transiciones desde otros estados. La figura 2.3 ilustra esta situación. En ella se muestran tres estados, $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle$ (estados pobladores), que decaen mediante transiciones al estado de interés, $|\phi_n\rangle$. El número de decaimientos de cada estado poblador obedece la ecuación (2.54). Sin embargo, no todos los núcleos que abandonan alguno de los estados pobladores llegan al estado de interés. Sólo una fracción lo hace. A esta fracción se le llama *razón de ramificación* b_{ij} . El primer índice, i , corresponde al estado poblado por la transición, el segundo índice, j , corresponde al estado que decae. De lo dicho anteriormente se infiere que

$$\Delta N_+ = \sum_j b_{nj} \frac{N_j}{\tau_j} \Delta t, \quad (2.56)$$

donde el índice j corre sobre todos los estados pobladores y el índice n corresponde al estado de interés. Al remplazar (2.54) y (2.56) en (2.55) y dividir ambos lados de la ecuación resultante entre el tiempo, se llega a

$$\frac{\Delta N_n}{\Delta t} = -\frac{N_n}{\tau_n} + \sum_j b_{nj} \frac{N_j}{\tau_j}. \quad (2.57)$$

τ_n y τ_j son las vidas medias del estado de interés y los estados pobladores respectivamente. Al tomar el límite de esta ecuación cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se tiene

$$\frac{dN_n}{dt} = -\frac{N_n}{\tau} + \sum_j b_{nj} \frac{N_j}{\tau_j}. \quad (2.58)$$

A la anterior ecuación se le llama *ecuación de Bateman*. Para conocer la población del estado de interés $N_n(t)$ a partir de (2.58) deben conocerse las poblaciones de los estados pobladores $N_j(t)$. Dado que, en general, los estados pobladores pueden ser poblados por otros estados, cada uno de las poblaciones $N_j(t)$ debe cumplir una ecuación de la forma (2.58). Para resolver estas ecuaciones es necesario conocer las poblaciones de los estados que pueblan a los estados pobladores, llámeseles

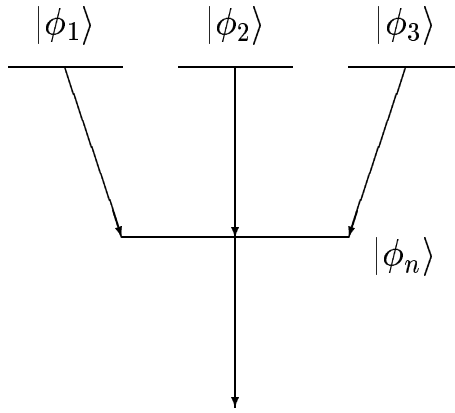


Figura 2.3:

N_{j_2} . Para hallar las poblaciones N_{j_2} deben conocerse las poblaciones de los estados pobladores de los estados j_2 , llámeseles N_{j_3} . Este proceso continúa hasta que se llega a un conjunto de estados j_m que son poblados únicamente por la reacción. En las ecuaciones de Bateman, (2.58), de estos estados está ausente la suma en el lado derecho,

$$\frac{dN_{j_m}}{dt} = -\frac{N_{j_m}}{\tau_{j_m}} \quad (2.59)$$

Las poblaciones N_{j_m} , soluciones de (2.59), son de la forma

$$N_{j_m}(t) = N_{j_m0} e^{-t/\tau_{j_m}}, \quad (2.60)$$

donde N_{j_m0} son sus poblaciones iniciales. Resumiendo, el conocimiento de la población del estado de interés involucra el conocimiento de las poblaciones de todos los estados que estén conectados a él a través de cualquier secuencia de transiciones físicamente permitidas, a este conjunto de estados se le llama el *patrón de poblamiento*. El cálculo de las poblaciones de los estados del patrón de poblamiento debe iniciarse desde los estados j_m en orden descendente hasta llegar al estado de interés. En seguida se explica un método para llevar a cabo este procedimiento. Se enumera a todos los estados del patrón de poblamiento con un único índice, de modo que si el estado i -ésimo puebla al estado j -ésimo entonces $i < j$. Para la solución de (2.58) se propone el siguiente Ansatz

$$N_i(t) = \sum_{j=1}^i C_{ij} e^{-\lambda_j t}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.61)$$

donde las constantes λ_j son los recíprocos de las vidas medias,

$$\lambda_j = \frac{1}{\tau_j}. \quad (2.62)$$

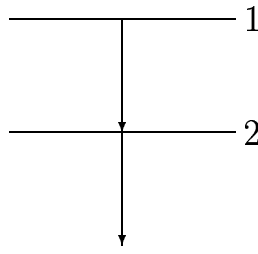


Figura 2.4: Cascada de dos estados con vidas medias iguales.

Al remplazar (2.61) en ambos lados de (2.58) se llega a las siguientes fórmulas de recurrencia para los coeficientes C_{ij} ,

$$C_{nj} = \frac{\sum_{i=j}^{n-1} C_{ij} \lambda_i b_{ni}}{\lambda_n - \lambda_j}, \quad j \leq n-1, \quad (2.63)$$

$$C_{nn} = N_n(t=0) - \sum_{j=1}^{n-1} C_{nj}. \quad (2.64)$$

El índice n hace referencia a cualquier estado del patrón de poblamiento. Al aplicar las fórmulas (2.63) y (2.64) desde el estado 1 del patrón de poblamiento, pueden conocerse los coeficientes de las poblaciones de los demás estados.

La ecuación (2.63) es válida sólo si $\lambda_n \neq \lambda_j$, pues en caso contrario el denominador se anularía. Por tal razón, el anzats (2.61) sólo es aplicable si en el patrón de poblamiento no hay una secuencia de transiciones que conecte dos estados con la misma vida media. Si esta situación se presenta ($\lambda_n = \lambda_j$), la ecuación (2.58) es aún soluble analíticamente. Si en (2.58) se pasa el primer término del lado derecho a la izquierda, se obtiene una ecuación diferencial inhomogénea de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \quad (2.65)$$

$$\frac{dN_n}{dt} + \frac{N_n}{\tau} = \sum_j b_{nf} \frac{N_j}{\tau_j}. \quad (2.66)$$

La solución general de (2.65) es [7]

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} f(x) dx. \quad (2.67)$$

Al usar (2.67) para resolver la ecuación de Bateman del estado 2 del patrón de poblamiento mostrado en la figura (2.4), con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda N_2 = \lambda N_1(t), \quad (2.68)$$

con condiciones iniciales

$$N_1(t=0) = N_0, \quad (2.69)$$

$$N_2(t=0) = 0, \quad (2.70)$$

considerando que

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (2.71)$$

se tiene como resultado

$$N_2(t) = N_0 \lambda t e^{-\lambda t}. \quad (2.72)$$

La discusión, realizada anteriormente, que condujo a los procedimientos para el cálculo de $N(t)$ tuvo como motivación la búsqueda de la distribución $f''(t)$. No hay en la vía de razonamiento seguida nada contradictorio. Al observar las ecuaciones (2.48) y (2.50) se concluye que las función $f''(t)$, $P''(t)$ y $N(t)$ son proporcionales. Luego, para hallar $f''(t)$ basta con normalizar a uno el área bajo la curva de $N(t)$. Aprovechando la proporcionalidad entre $f''(t)$, $P''(t)$ y $N(t)$ y permitiendo alguna flexibilidad en la terminología, en ocasiones, en este trabajo, se llama *población en función del tiempo* a cualquiera de estas tres funciones.

2.4 ¿Con qué reloj se mide t'' ?

La vida media de los estados tratados en este trabajo es tan corta, entre centésimas y unidades de picosegundo, que no hay dispositivos electrónicos capaces de resolver dos eventos que ocurran con una diferencia temporal de ese orden. Es decir, no es posible medir t'' . En el método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler, esta dificultad se elude mediante la medición de una cantidad que es función de t'' : el corrimiento por efecto Doppler ΔE de la energía del fotón emitido en el momento del decaimiento del estado. Dado que se conoce la expresión que liga t'' con ΔE , puede obtenerse la densidad de probabilidad de una de estas variables con base en la densidad de probabilidad de la otra. Las circunstancias experimentales que hacen esto posible se discuten en el capítulo 3.

Capítulo 3

El método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler

3.1 Reacción de fusión evaporación

El método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler (Doppler Shift Attenuation, DSA) permite medir vidas medias (del orden de los picosegundos a las centésimas de picosegundo) de estados poblados en reacciones de fusión-evaporación.

Para producir esta reacción [8, 9] se envía un núcleo en movimiento respecto al marco de referencia del laboratorio (proyectil) contra un núcleo en reposo (blanco). Los dos núcleos se fusionan y dan origen a un núcleo compuesto que luego decae por emisión de nucleones individuales y núcleos pequeños (evaporación). Cuando la evaporación cesa el núcleo resultante (núcleo residual) surge en un estado excitado desde el cual decae por emisión de rayos gamma. Son los estados del núcleo residual aquellos cuya vida media se pretende medir en el método DSA. La figura 3.1 muestra la reacción de fusión-evaporación $^{32}\text{S}(^{58}\text{Ni}, \alpha 3\text{p})^{83}\text{Y}$. ^{32}S es el proyectil, ^{58}Ni es el blanco, ^{90}Ru es el núcleo compuesto y ^{83}Y es el núcleo residual. Esta reacción, con energía del proyectil de 135 MeV fue usada en las referencias [6, 10, 11].

Puesto que debe conservarse el momento lineal, el núcleo residual presenta cierta velocidad inicial en el marco de referencia del laboratorio, al cual se hallan fijos los detectores de rayos gamma. En virtud de esta velocidad relativa entre el núcleo residual y los detectores, los rayos gamma emitidos por éste, son detectados con un corrimiento en su energía por efecto Doppler, ΔE , definido por la ecuación

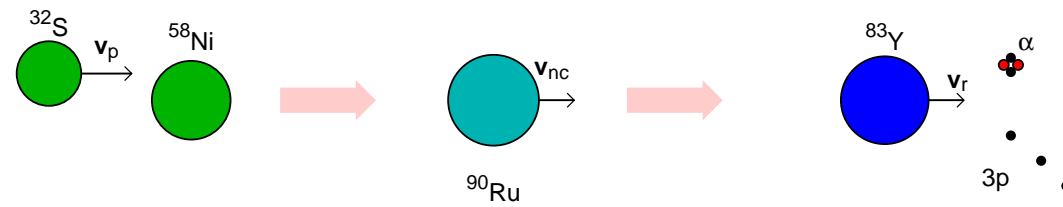
$$E_{\gamma,l} = E_{\gamma} + \Delta E, \quad (3.1)$$

donde $E_{\gamma,l}$ es la energía del fotón vista en el marco de referencia del laboratorio y E_{γ} es la energía de la transición. El corrimiento está dado, a primer orden en v/c (ver sección 5.4), por

$$\Delta E = E_{\gamma} \frac{v}{c} \cos \theta \quad (3.2)$$

donde v es la velocidad del núcleo en el instante de la emisión del fotón, c es la velocidad de la luz y θ es el ángulo entre el vector de onda del fotón y la velocidad del núcleo (figura 3.2).

Reacción de fusión–evaporación

Figura 3.1: Reacción de fusión-evaporación $^{32}\text{S}(^{58}\text{Ni},\alpha 3p)^{83}\text{Y}$.

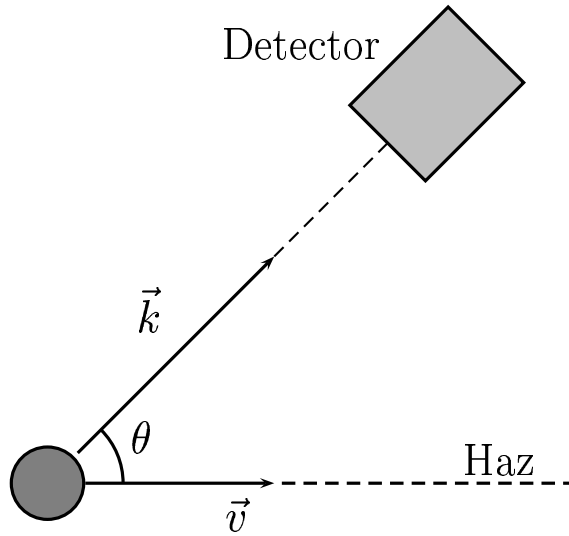


Figura 3.2: Detección de un fotón emitido por un núcleo residual. El círculo gris representa al núcleo residual, \vec{k} es el vector de onda del fotón emitido, \vec{v} es la velocidad del núcleo residual y θ es el ángulo entre \vec{k} y \vec{v} . Se ha asumido que \vec{v} es paralela al haz de proyectiles y que la dirección de \vec{k} coincide con la del detector.

Los núcleos blanco se encuentran dentro de una película depositada sobre un sustrato (figura 3.3). Los núcleos residuales, producidos dentro de la película, ingresan al sustrato y en él se frenan gradualmente. Dado que el tiempo que transcurre entre el instante de creación del núcleo y el instante de decaimiento del estado de interés, t'' , es una variable aleatoria, es posible que algunos núcleos abandonen este estado, mediante la emisión de un fotón, cuando el núcleo residual presenta una velocidad alta. En consecuencia, la energía del fotón emitido presenta un corrimiento por efecto Doppler alto. Por otra parte, algunos núcleos pueden emitir el fotón tardíamente, cuando el núcleo ha penetrado más profundamente dentro del sustrato y presenta una velocidad baja, razón por la cual, el corrimiento por efecto Doppler es menor. Como consecuencia de esta “atenuación” del corrimiento por efecto Doppler, las formas de línea de las transiciones en el espectro de energías se ensanchan desde la energía con corrimiento cero hasta el corrimiento correspondiente a la velocidad más alta (figuras 7.5-7.12).

3.2 Cálculo de las formas de línea

Con el propósito de llegar a una primera regla aproximada para el cálculo de la forma de línea se supondrá que:

1. La velocidad de todos los núcleos residuales producidos es, en todo tiempo, paralela al haz de proyectiles (figura 3.2).

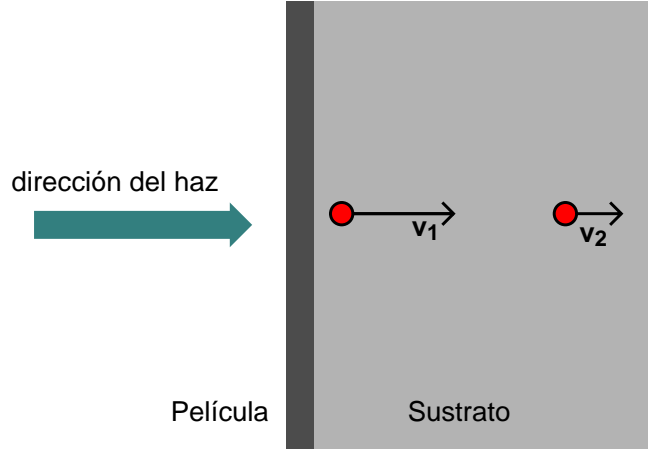


Figura 3.3: Los núcleos residuales se forman en la película.. Luego ingresan al sustrato en el cual se frenan gradualmente. Los círculos representan un núcleo residual en dos instantes diferentes. La velocidad es más baja cuanto más profundamente ha penetrado el núcleo dentro del sustrato.

2. La velocidad de todos los núcleos residuales evoluciona en el tiempo de acuerdo con la misma curva $v(t)$, donde t es medido desde el instante de creación del núcleo.
3. La dirección del vector de onda de los fotones detectados coincide con la dirección del eje del detector (figura 3.2).

De acuerdo con la suposición 2 la velocidad v en la ecuación del corrimiento, (3.2), es la función $v(t)$ evaluada en el instante de decaimiento del estado de interés t'' ,

$$v = v(t''). \quad (3.3)$$

Según la ecuación (3.2), ΔE es función de v , la cual a la vez es función de t'' . Luego, ΔE es función de t'' . Al ser el corrimiento ΔE función de una variable aleatoria, t'' , es, él mismo, también, una variable aleatoria (este es el método de “medición” de t'' anticipado en la sección 2.4). La forma de línea de la transición es la densidad de probabilidad del corrimiento, $f(\Delta E)$, trasladada sobre el rango de energías de modo que el cero de corrimiento coincide con la energía de la transición E_γ . En seguida se deduce una ecuación con la que puede calcularse $f(\Delta E)$ con base en $f''(t)$.

El área bajo la curva $f''(t)$ en el intervalo $(t, t + \Delta t)$, con Δt muy pequeño, está dada por $f''(t)\Delta t$. Esta área, ubicada sobre el intervalo $(t, t + \Delta t)$ en el dominio del tiempo, es aplicada en el dominio del corrimiento a través de la función que liga las variables ΔE y t , $\Delta E = \Delta E(t)$, sobre el intervalo $(\Delta E(t), \Delta E(t + \Delta t))$. Puesto que la probabilidad debe conservarse, el área bajo la curva $f(\Delta E)$ en este intervalo, $f(\Delta E)\delta(\Delta E)$, donde $\delta(\Delta E) = \Delta E(t + \Delta t) - \Delta E(t)$, debe ser igual al área bajo la curva $f''(t)$ en el intervalo de tiempo respectivo

$$f(\Delta E)\delta(\Delta E) = f''(t)\Delta t. \quad (3.4)$$

Para intervalos de tiempo y corrimiento infinitesimales,

$$f(\Delta E)d(\Delta E) = f''(t)dt. \quad (3.5)$$

Al despejar $f(\Delta E)$ se tiene

$$f(\Delta E) = \frac{f''(t)}{|d(\Delta E)/dt|}. \quad (3.6)$$

Sólo en un caso especial (ver apéndice A) $f(\Delta E)$ puede hallarse analíticamente mediante la ecuación (3.6). En el caso general esta distribución puede calcularse numéricamente a través de un algoritmo basado en la secuencia de razonamientos que condujo al planteamiento de (3.5):

1. Divídase el rango de tiempo en intervalos de longitud Δt .
2. Para cada intervalo calcúlese el área bajo la curva $f''(t)$, A_i ,

$$A_i = \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} f''(t)dt. \quad (3.7)$$

3. Hállese la imagen de $(t_i, t_i+\Delta t)$ en el dominio del corrimiento, $(\Delta E_i, \Delta E_i + \delta(\Delta E)_i)$.
4. Dése a $f(\Delta E)$ en ese intervalo el valor constante

$$f(\Delta E) = \frac{A_i}{\delta(\Delta E)_i}. \quad (3.8)$$

Por la naturaleza del proceso de frenado de los núcleos, para un valor dado de t'' , éstos no presentan exactamente la misma velocidad, sino que ésta se distribuye de acuerdo con cierta densidad de probabilidad que evoluciona con el tiempo, $f(\vec{v}, t)$. Por otra parte, dado que el detector abarca un ángulo sólido finito, la dirección del vector de onda de los fotones detectados no es única (figura 3.4). En cambio, se distribuye según cierta densidad de probabilidad.

La ecuación (3.2) se puede escribir en la forma

$$\Delta E = E_\gamma \beta_k, \quad (3.9)$$

donde β_k es la componente de la velocidad del núcleo residual en la dirección del vector de onda \vec{k} del fotón emitido, dividida entre la velocidad de la luz

$$\beta_k \equiv \frac{v}{c} \cos \theta. \quad (3.10)$$

La dispersión de la velocidad del núcleo residual y la dispersión de la dirección del vector de onda de los fotones detectados para un valor dado de t'' implican una dispersión en el valor de β_k y, por ende (ecuación (3.9)) en el de ΔE . Es decir, ΔE ya no es función de t'' . El área bajo la curva $f''(t)$ en un intervalo de longitud infinitesimal dt ya no es aplicada en un intervalo de longitud infinitesimal

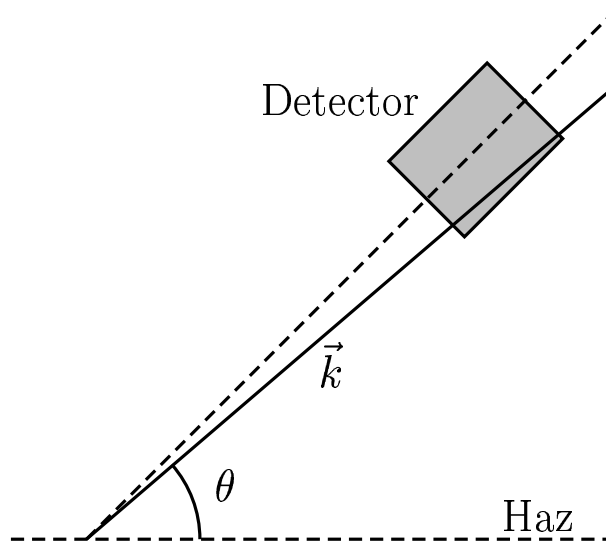


Figura 3.4: La dirección del vector de onda del fotón \vec{k} , representada por la línea continua, puede ser cualquiera dentro del ángulo sólido abarcado por el detector.

$d(\Delta E)$ en el dominio del corrimiento, sino sobre todo el dominio del corrimiento, de acuerdo con la densidad de probabilidad de β_k en algún instante t en dicho intervalo de tiempo, $f_\beta(\beta_k, t)$. Por esta razón el algoritmo para el cálculo de la forma de línea $f(\Delta E)$, descrito anteriormente, debe modificarse a partir del paso 3. El nuevo algoritmo para el cálculo de la forma de línea es

1. Divídase el rango de tiempo en intervalos $(t_i, t_i + \Delta t)$.
2. Para cada intervalo calcúlese el área bajo la curva $f''(t)$, A_i ,

$$A_i = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} f''(t) dt. \quad (3.11)$$

3. Divídase el rango de corrimiento en intervalos $(\Delta E_j, \Delta E_j + \delta(\Delta E))$. Para efectos de la acumulación de cuentas, asóciase a cada intervalo un elemento de un arreglo a_j inicializado en cero.
4. Numéricamente, la densidad de probabilidad $f_\beta(\beta_k, t)$ es representada por una distribución discreta $f_\beta(\beta_{kl}, t_m)$. Para cada β_{kl} , identifíquese j' tal que

$$\Delta E_{j'} \leq E_{\gamma\beta_{kl}} < \Delta E_{j'} + \delta(\Delta E).$$

5. Súmese a $a_{j'}$ la cantidad $A_i f_\beta(\beta_{kl}, t_m = t_i)$.

Luego de realizar todas las iteraciones sobre i y l , el arreglo a_j contiene un histograma de $f(\Delta E)$, es decir,

$$a_j = \int_{\Delta E_j}^{\Delta E_j + \delta(\Delta E)} f(\Delta E) d(\Delta E). \quad (3.13)$$

Cuando $\delta(\Delta E)$ es suficientemente pequeño

$$a_j \simeq f(\Delta E_i). \quad (3.14)$$

Ahora se fijará la atención sólo en un intervalo de corrimiento, $\delta(\Delta E)$. Si en el algoritmo anterior se trabajara con la función $f_\beta(\beta_k, t_m)$ continua en β_k , no con su representación discreta $f_\beta(\beta_{kl}, t_m)$, en el paso 5 debería sumarse al área bajo la curva $f(\Delta E)$ en el intervalo $\delta(\Delta E)$ la cantidad

$$A_i f_\beta(\beta_k, t_i) \Delta \beta_k, \quad (3.15)$$

donde $\Delta \beta_k$ es la longitud del intervalo de β_k que se aplica en el intervalo $\delta(\Delta E)$,

$$\delta(\Delta E) = E_\gamma \Delta \beta_k. \quad (3.16)$$

El área bajo la curva $f(\Delta E)$ en $\delta(\Delta E)$ es el resultado de la suma de (3.15) para todos los valores de t_i ,

$$f(\Delta E) \delta(\Delta E) = \sum_i A_i f_\beta(\beta_k, t_i) \Delta \beta_k \quad (3.17)$$

Si Δt es suficientemente pequeño, por la ecuación 3.11, se tiene que

$$A_i \simeq f''(t_i) \Delta t. \quad (3.18)$$

Al reemplazar (3.18) en (3.17) se tiene

$$f(\Delta E) \delta(\Delta E) = \sum_i f''(t_i) \Delta t f_\beta(\beta_k, t_i) \Delta \beta_k. \quad (3.19)$$

Al despejar $\Delta \beta_k$ de (3.16) y reemplazarlo en (3.19),

$$f(\Delta E) \delta(\Delta E) = \sum_i f''(t_i) \Delta t f_\beta(\beta_k, t_i) \frac{1}{E_\gamma} \delta(\Delta E). \quad (3.20)$$

Cancelando $\delta(\Delta E)$ en ambos lados,

$$f(\Delta E) = \sum_i \Delta t f''(t_i) \frac{1}{E_\gamma} f_\beta(\beta_k, t_i). \quad (3.21)$$

Tomando el límite de la suma cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y escribiendo β_k en términos de ΔE

$$\boxed{f(\Delta E) = \int_0^\infty dt f''(t) \frac{1}{E_\gamma} f_\beta\left(\frac{\Delta E}{E_\gamma}, t\right)}. \quad (3.22)$$

La ecuación anterior puede considerarse como la definición de una transformada integral que convierte una función en el dominio del tiempo $f''(t)$ en una función en

el dominio del corrimiento $f(\Delta E)$. Al observar (3.22) se infiere que el kernel de esta transformada es

$$\frac{1}{E_\gamma} f_\beta\left(\frac{\Delta E}{E_\gamma}, t\right). \quad (3.23)$$

La ecuación (3.22) es consistente con la ecuación (3.6). Suponer que todos los núcleos se mueven de acuerdo con la misma función de velocidad en el tiempo $v(t)$, equivale a suponer una distribución de β_k tipo delta de Dirac,

$$f_\beta(\beta_k, t) = \delta(\beta_k - \beta_k^0(t)), \quad (3.24)$$

donde

$$\beta_k^0 = \frac{v(t)}{c} \cos \theta. \quad (3.25)$$

Al reemplazar (3.24) en (3.22) se tiene

$$f(\Delta E) = \int_0^\infty dt f''(t) \frac{1}{E_\gamma} \delta(\beta_k - \beta_k^0(t)). \quad (3.26)$$

Usando la propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|} \delta(x - x_i), \quad (3.27)$$

donde $f(x_i) = 0$, la ecuación (3.26) puede escribirse como

$$f(\Delta E) = \int_0^\infty dt_a f''(t_a) \frac{1}{E_\gamma} \frac{1}{\left| \frac{d\beta_k^0}{dt_a}(t) \right|} \delta(t_a - t). \quad (3.28)$$

En la ecuación anterior, por conveniencia, se ha llamado t_a a la variable de integración y se ha usado t para la solución de la ecuación

$$\beta_k - \beta_k^0(t) = 0. \quad (3.29)$$

Al llevar a cabo la integración sobre t_a se llega a la ecuación (3.6), escrita de nuevo aquí,

$$f(\Delta E) = \frac{f''(t)}{|d(\Delta E)/dt|}. \quad (3.30)$$

3.3 Efecto de la función de respuesta a impulso del detector

La distribución de energías, tipo delta de Dirac, de un haz de fotones monoenergético es registrada como una distribución con un ancho finito por un detector de rayos gamma [12]. A la distribución registrada en este caso se le llama función de respuesta a impulso del detector. Para simular este efecto del proceso de detección,

las formas de línea generadas con base en la aplicación de la ecuación (3.22) deben convolucionarse con la función de respuesta a impulso del detector.

En los experimentos de DSA típicamente se usan detectores de Germanio. La función de respuesta a impulso de estos detectores se caracteriza por presentar un fotopico alto y estrecho precedido por una distribución Compton continua relativamente pequeña [12]. El predominio del fotopico sobre la distribución Compton puede ser acentuado por el uso de un sistema de supresión de efecto Compton. Un ejemplo del empleo de este sistema se encuentra en el arreglo de detectores Gamma-sphere [13]. En consecuencia, resulta razonable aproximar la función de respuesta a impulso del detector de Germanio por su fotopico gaussiano únicamente. El ancho del fotopico a la mitad de la altura máxima, FWHM (Full Width at Half Maximun), es función de la energía del haz monoenergético E_γ . La dependencia funcional de FWHM respecto a E_γ puede ser ajustada por un polinomio de grado 2,

$$\text{FWHM} = a_0 + a_1 E_\gamma^2 + a_2 E_\gamma^2. \quad (3.31)$$

Los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 son hallados experimentalmente.

3.4 La medición de la vida media

La forma de línea generada teóricamente depende del valor dado a la vida media del estado de interés, τ . Esta dependencia se puede indicar de manera explícita escribiendo la forma de línea teórica como $f(\Delta E, \tau)$. Para encontrar el valor real de la vida media se compara $f(\Delta E, \tau)$ con la forma de línea experimental para los valores de τ en el rango de 0.0001 ps a 1000 ps. Fuera de este rango la forma de línea permanece constante. Se toma como medida de la vida media, τ_0 , aquel valor de τ que corresponda a la forma de línea que mejor se ajuste a la forma de línea experimental. $f(\Delta E, \tau)$ presenta mayor similitud con la forma de línea experimental cuanto menor sea la cantidad $\chi_r^2(\tau)$ (chi cuadrado reducido),

$$\chi_r^2(\tau) = \frac{1}{n} \sum_i \frac{(y_i - C h_i(\tau))^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.32)$$

donde y_i es el número de cuentas en el canal i -ésimo de la forma de línea experimental y

$$h_i(t) = \int_{E_i - E_\gamma}^{E_i - E_\gamma + \delta E} f(\Delta E, \tau) d(\Delta E), \quad (3.33)$$

con $(E_i, E_i + \delta E)$ el rango de energías abarcado por el canal i -ésimo. σ_i es la desviación estándar de la distribución de probabilidad de y_i , n es el número de canales de la forma de línea experimental y C es una constante de normalización cuyo valor se discute más adelante. Por lo anterior, τ_0 es el valor para el cual $\chi_r^2(\tau)$ toma el valor mínimo posible χ_{min}^2 . Los extremos del intervalo de incertidumbre son los valores $\tau_a < \tau_0$ y $\tau_b > \tau_0$ tales que

$$\chi_r^2(\tau_a) = \chi_r^2(\tau_b) = \chi_{min}^2 + 1. \quad (3.34)$$

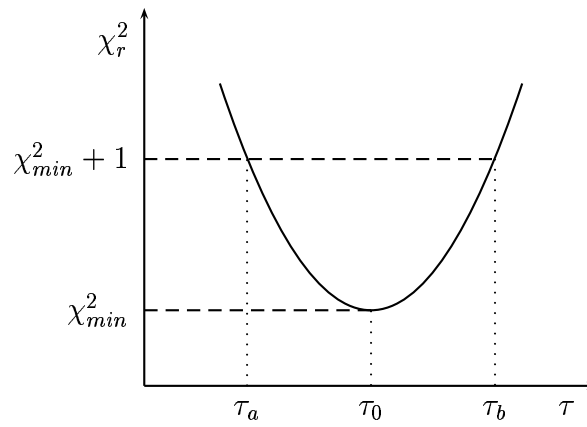


Figura 3.5: Establecimiento del valor central τ_0 y de los extremos, τ_a y τ_b , del intervalo de incertidumbre de la medida de τ .

Ver figura 3.5. La justificación de este criterio para la determinación del intervalo de incertidumbre se encuentra en la referencia [14]. El número de cuentas en un canal, y_i , presenta una distribución de Poisson (para la explicación de este hecho ver apéndice C) cuya desviación estándar es $\sigma_i = \sqrt{y_i}$ [15].

El valor dado a la constante C es aquel que minimiza χ_r^2 para un τ fijo. Al minimizar (3.32) considerando a C como único parámetro variable, esto es, derivar (3.32) respecto a C , igualar la derivada a cero y luego despejar C , se llega a

$$C = \frac{\sum_i y_i h_i(\tau)}{\sum_i h_i^2(\tau)}. \quad (3.35)$$

A veces, las formas de línea a ajustar se toman de espectros que han resultado de la resta de dos espectros. Este es el caso de las formas de línea experimentales mostradas en el capítulo 7. En estas circunstancias, la distribución de probabilidad del número de cuentas en cada canal y_i no es de tipo Poisson. Un hecho que delata esta situación es la presencia de un número de cuentas negativo en algunos canales. No obstante, el programa de medición de las vidas medias, `ajuste16` (ver capítulo 6), usa la regla $\sigma_i = \sqrt{y_i}$, excluyendo los canales con cuentas negativas de la suma en (3.32), por dos razones. Primera: esta misma regla es usada por `fits` y, para su comparación con `ajuste16`, se requería incorporarla en este último. Segunda: hace falta un estudio del problema, que indique una regla más apropiada.

Por otra parte, las formas de línea experimentales suelen estar montadas sobre un fondo. `fits` maneja la sustracción del fondo de forma inconsistente. Las cuentas y_i usadas en la ecuación (3.32) son las resultantes de la resta del fondo. Pero las cuentas empleadas en la regla $\sigma_i = \sqrt{y_i}$, lo incluyen. Es decir, $\sigma_i = \sqrt{y_i + y_0}$, donde y_0 son las cuentas del fondo. Por las razones ya explicadas, esta forma de proceder también se sigue en `ajuste16`.

Capítulo 4

Modelo usado para el cálculo de $f_{\beta}(\beta_k, t)$

4.1 Modelo usado para el cálculo de $f(\vec{v}, t)$

Para el cálculo de $f(\vec{v}, t)$ se usará un modelo basado en los siguientes supuestos:

- La dirección de la velocidad de todos los núcleos residuales, en todo tiempo, coincide con la dirección del haz de proyectiles.
- La magnitud de la velocidad inicial de los núcleos residuales presenta una densidad de probabilidad gaussiana.
- La variación de la velocidad de los nucleos es dictada por la ecuación [12]

$$\Delta T = -S(T)\Delta x \quad (4.1)$$

donde T es la energía cinética del núcleo y ΔT es el cambio de la energía cinética al recorrer una distancia muy pequeña Δx dentro del sustrato. Al factor $S(T)$ se le llama poder de frenado (stopping power).

Este modelo es el mismo usado por el programa `fits` [16].

Se escoge el eje x en la dirección del haz. Es claro que las componentes de la velocidad perpendiculares al haz son nulas

$$v_y = 0, \quad (4.2)$$

$$v_z = 0, \quad (4.3)$$

y que la componente x de la velocidad es igual a su magnitud,

$$v_x = v. \quad (4.4)$$

Luego, la distribución de velocidades, en principio una distribución de tres variables, $f(\vec{v}, t) = f(v_x, v_y, v_z, t)$, en este modelo se reduce a una distribución de una

sola variable, $f(v, t)$ (téngase en cuenta que, en esta distribución, el tiempo es un parámetro, no otra variable aleatoria).

Si en la ecuación (4.1) se pasa Δx al lado izquierdo a dividir y se toma el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se llega a

$$\frac{dT}{dx} = -S(T). \quad (4.5)$$

Esta ecuación puede integrarse numéricamente para obtener la energía cinética como función de la distancia recorrida $T(x)$. Usando la definición de la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (4.6)$$

puede calcularse la velocidad en función de la distancia, $v(x)$,

$$v(x) = \sqrt{\frac{2T(x)}{m}}. \quad (4.7)$$

Integrando numéricamente la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad (4.8)$$

se puede calcular $x(t)$. Finalmente, al derivar respecto al tiempo $x(t)$ se consigue $v(t)$. En el apéndice B se discute otra forma de calcular $v(t)$.

Dentro del código fuente del programa `fits`, la velocidad es multiplicada por el coseno promedio del ángulo de dispersión de la velocidad respecto al haz de proyectiles, ϕ , calculado según la aproximación de Blaugrund [17]. Esta multiplicación se efectúa sólo cuando la energía cinética es menor que 500 keV. Esta forma de incluir la dispersión de las velocidades en la simulación del frenado es bastante dudosa, pues en ella se está reemplazando la distribución de $\cos \phi$ por una delta de Dirac ubicada en su media, $\overline{\cos \phi}$. También surge la pregunta por los criterios usados en la escogencia de la energía 500 keV como umbral para la inclusión de la dispersión angular. No obstante las objeciones planteadas, en el programa de cálculo de $f(v, t)$, `stopping9` (capítulo 6), se sigue este procedimiento, dado que, como se anunció en la introducción, la reproducción de los resultados de `fits` son un primer criterio de prueba de la confiabilidad de los programas escritos.

El efecto de la multiplicación por $\overline{\cos \phi}$ se hace notorio especialmente en las formas de línea generadas para vidas medias largas ($\tau \geq 1$ ps). La multiplicación por $\overline{\cos \phi}$ se puede eliminar fácilmente en el programa de cálculo de $f(v, t)$ editando una sola de sus líneas de código.

Para calcular $f(v, t)$ se aproxima la distribución de velocidades iniciales con una distribución discreta (v_{0i}, p_i) , donde p_i es la probabilidad de que se presente la velocidad inicial v_{0i} . Para cada una de esta velocidades iniciales se halla la velocidad para tiempos posteriores, $v_i(t)$, según el procedimiento descrito anteriormente. Se representa $f(v, t)$ con un arreglo de dos índices j, k . El primer índice enumera los intervalos, $(v_j, v_j + \Delta v)$, en que se divide el rango de velocidad. El segundo índice enumera los tiempos para los que se calculará $f(v) = f(v, t_k)$. El arreglo se inicializa

en cero. Para cada t_k , se llevan a cabo las siguientes operaciones, sobre todas las velocidades $v_i(t)$: se identifica el valor j' tal que $v_{j'} \leq v_i(t_k) < v_{j'} + \Delta v$. Se suma la probabilidad p_i al elemento del arreglo con índices j', k .

Como media de las distribución de energías cinéticas iniciales, T_{nr}^0 , se toma la energía cinética que tendría el núcleo residual si su velocidad fuera igual a la del núcleo compuesto. Ésta es la velocidad inicial del núcleo residual si se supone que el proceso de evaporación no afecta la velocidad del núcleo emisor de nucleones. Estrictamente hablando esto es falso, sin embargo es válido como primera aproximación si el momento lineal que llevan las partículas evaporadas es pequeño comparado con el del núcleo residual. A continuación se procede al cálculo de T_{nr}^0 .

Por la conservación del momento lineal,

$$p_p = p_{nc}, \quad (4.9)$$

donde p_p es el momento lineal del proyectil y p_{nc} es el momento lineal del núcleo compuesto. Por otra parte

$$p_{nc} = (m_p + m_b)v_{nc}, \quad (4.10)$$

donde m_p es la masa del proyectil, m_b es la masa del blanco y v_{nc} es la velocidad del núcleo compuesto. La energía cinética del núcleo residual es

$$T_{nr}^0 = \frac{1}{2}m_{nr}v_{nr}^2, \quad (4.11)$$

donde m_{nr} y v_{nr} son su masa y su velocidad respectivamente. Al usar la aproximación anteriormente justificada,

$$v_{nr} \simeq v_{nc}, \quad (4.12)$$

despejar v_{nc} de (4.10) y reemplazarlo en (4.11), teniendo en cuenta (4.9), se llega a

$$T_{nr}^0 = \frac{1}{2}m_{nr} \frac{p_p^2}{(m_p + m_b)^2}. \quad (4.13)$$

El momento lineal del proyectil se relaciona con su energía cinética a través de

$$T_p = \frac{p_p^2}{2m_p}. \quad (4.14)$$

Al despejar p_p^2 de (4.14) y reemplazarlo en (4.13) se obtiene

$$\boxed{T_{nr}^0 = T_p \frac{m_{nr}m_p}{(m_p + m_b)^2}}. \quad (4.15)$$

La aplicación de la ecuación (4.15) a la reacción mencionada en la sección 3.1, $^{32}\text{S}(^{58}\text{Ni},)^{83}\text{Y}$, con energía del proyectil de 135 MeV, conduce al valor

$$T_{nr}^0 = 44.3 \text{ MeV}. \quad (4.16)$$

El ancho de la distribución de energías cinéticas iniciales se escogió según lo recomendado en la referencia [18]:

$$\text{FWHM} = 0.1 T_{nr}^0. \quad (4.17)$$

La distribución $f(v, t)$, para algunos tiempos, calculada con el programa `stopping9` que implementa el algoritmo descrito, se muestra en la figura 4.1.

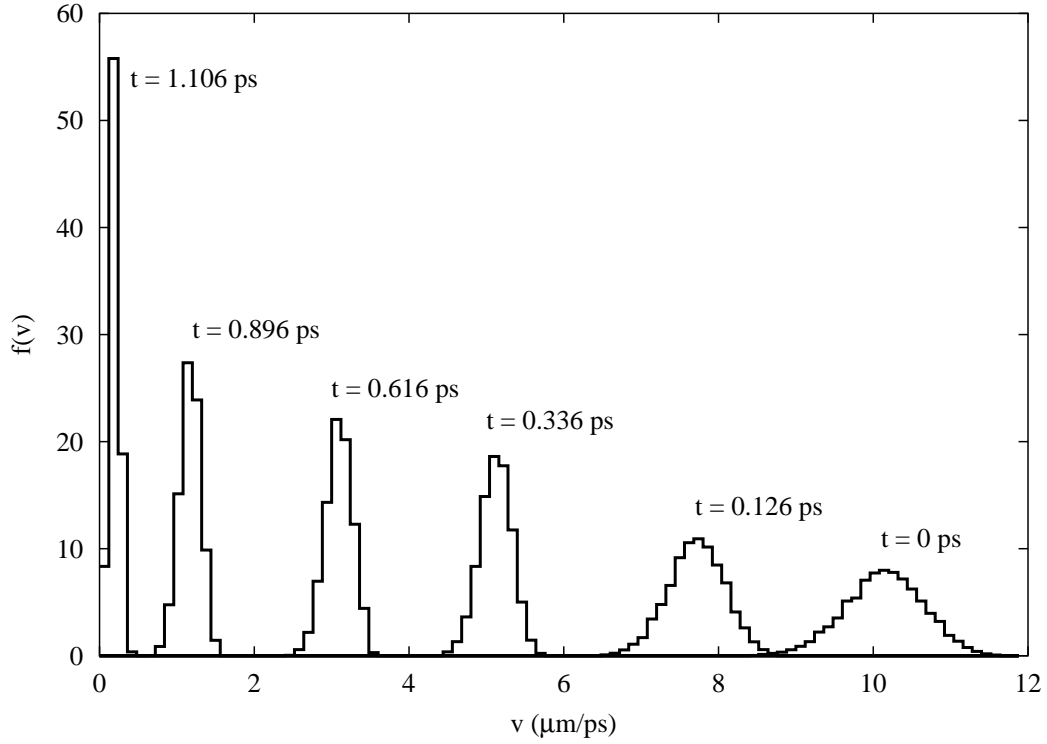


Figura 4.1: Distribución de velocidades de los núcleos residuales para diferentes tiempos, $f(v, t)$. La distribución de velocidades para un tiempo en particular se representa con $f(v)$.

4.2 Cálculo de la distribución de $\cos \theta$, $f(\cos \theta)$

La probabilidad P de que un fotón recorra una distancia x dentro de un material sin ser absorbido es [12]

$$P(x) = e^{-\mu x}. \quad (4.18)$$

A la constante μ se le llama coeficiente de absorción del material. La probabilidad P_a de que el fotón sea absorbido en un trayecto de longitud x es, por tanto,

$$P_a(x) = 1 - e^{-\mu x}. \quad (4.19)$$

El trayecto máximo S que puede recorrer un fotón dentro de un detector (figura 4.3) depende de la geometría del detector y de la dirección de incidencia del fotón, caracterizada por dos ángulos θ' , ϕ' , medidos respecto a un sistema de ejes rectangulares $x'y'z'$ orientados de modo que el eje z' coincide con la dirección del eje del detector, como se muestra en las figuras 4.3 y 4.2. Es decir,

$$S = S(\theta', \phi'). \quad (4.20)$$

Luego, la probabilidad de que un fotón sea absorbido, o sea, detectado, cuando se propaga en la dirección θ' , ϕ' es

$$P_a(\theta', \phi') = 1 - e^{-\mu S(\theta', \phi')}. \quad (4.21)$$

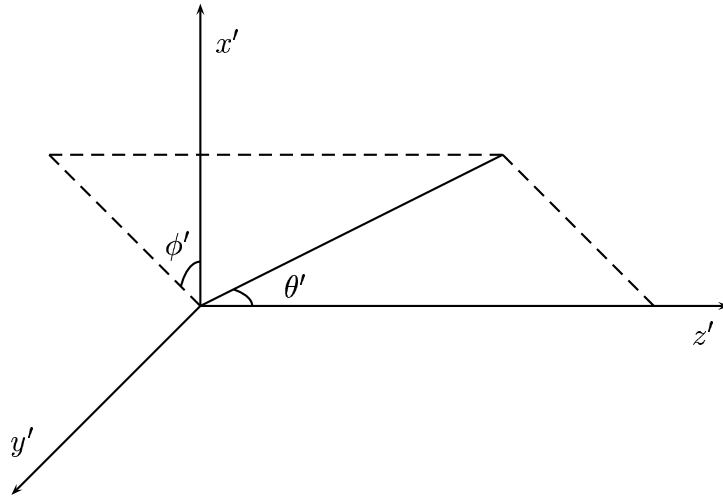


Figura 4.2: Definición de los ángulos θ' y ϕ' .

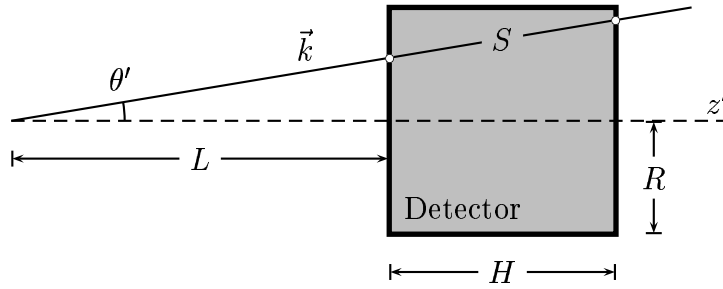


Figura 4.3: El trayecto máximo que puede recorrer un fotón dentro del detector, S , es la longitud del segmento de recta entre los dos círculos.

La probabilidad dP de que uno de los fotones detectados haya incidido en el detector con dirección dentro del ángulo sólido $d\Omega$, alrededor de la dirección θ', ϕ' , es proporcional a $P_a(\theta', \phi')$ y al ángulo sólido,

$$dP \propto P_a(\theta', \phi') d\Omega. \quad (4.22)$$

Por otra parte, la definición de la densidad de probabilidad de la dirección de los fotones detectados, $f(\theta', \phi')$, es

$$dP = f(\theta', \phi') d\Omega. \quad (4.23)$$

Al comparar (4.22) con (4.23) se infiere que

$$f(\theta', \phi') \propto P_a(\theta', \phi'). \quad (4.24)$$

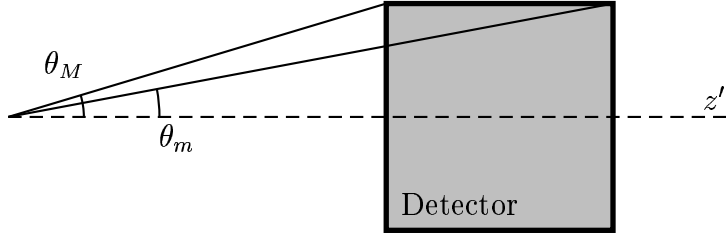


Figura 4.4: Definición de los ángulos θ_M y θ_m .

A partir de la figura 4.3, mediante razonamientos de geometría elemental, se deduce que

$$S = \frac{H}{\cos \theta'}, \quad (4.25)$$

si $0 \leq \theta' \leq \theta_m$, donde θ_m es el ángulo indicado en la figura 4.4, y

$$S = L \sqrt{\left(\frac{\tan \theta_M}{\tan \theta'} - 1\right)^2 + (\tan \theta_M - \tan \theta')^2} \quad (4.26)$$

si $\theta_m \leq \theta' \leq \theta_M$, donde θ_M es el máximo valor que puede tomar θ' (figura 4.4).

Sea \hat{n} un vector unitario en la dirección del vector de onda. La dirección de este vector puede ser descrita por los ángulos θ, ϕ , medidos respecto a un sistema de ejes rectangulares xyz orientados de modo que el eje z coincide con la dirección del haz de proyectiles, de manera análoga a la indicada en la figura 4.2. De acuerdo con el modelo usado para las velocidades (sección 4.1), el ángulo θ , medido de esta manera, es también el ángulo entre la velocidad y el vector de onda. La componente z de \hat{n} es $\cos \theta$. La distribución de probabilidad de \hat{n} se puede conocer fácilmente en términos de θ', ϕ' , reemplazando $S(\theta')$ (ecuaciones (4.25) y (4.26)) en (4.21).

Para encontrar la distribución de probabilidad de $\cos \theta$, debe expresarse esta cantidad como función de θ' y ϕ' . Para ello, es necesario conocer la ecuaciones de transformación de las coordenadas $x'y'z'$ a las coordenadas xyz .

Si la dirección de \hat{n} es θ', ϕ' , sus componentes $x'y'z'$ están dadas por

$$\hat{n} = \sin \theta' \cos \phi' \hat{i}' + \sin \theta' \sin \phi' \hat{j}' + \cos \theta' \hat{k}', \quad (4.27)$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \sin \theta' \cos \phi' \\ \sin \theta' \sin \phi' \\ \cos \theta' \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Los ejes $x'y'z'$ se obtienen a partir de los ejes xyz aplicando dos rotaciones sucesivas a estos últimos. Primero una rotación, $R_{\hat{j}, \theta_d}$, en un ángulo θ_d alrededor de y . Luego, una rotación, $R_{\hat{k}, \phi_d}$, en un ángulo ϕ_d alrededor de z . Los ángulos θ_d, ϕ_d , medidos respecto a xyz , indican la orientación del eje del detector. Las coordenadas xyz de

cualquier vector pueden calcularse mediante la aplicación de las matrices de las dos rotaciones a las coordenadas $x'y'z'$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_{\hat{k},\phi_d} R_{\hat{j},\theta_d} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

con

$$R_{\hat{j},\theta_d} = \begin{bmatrix} \cos \theta_d & 0 & \sin \theta_d \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_d & 0 & \cos \theta_d \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$R_{\hat{k},\phi_d} = \begin{bmatrix} \cos \phi_d & -\sin \phi_d & 0 \\ \sin \phi_d & \cos \phi_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Al efectuar estas operaciones sobre las coordenadas primadas del vector \hat{n} (ecuación (4.28)) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{n} = & (\cos \phi_d \cos \theta_d \cos \phi' \sin \theta' - \sin \phi_d \sin \phi' \sin \theta' + \cos \phi_d \sin \theta_d \cos \theta') \hat{i} + \\ & (\sin \theta_d \cos \theta_d \cos \phi' \sin \theta' + \cos \phi_d \sin \phi' \sin \theta' + \sin \phi_d \sin \theta_d \cos \theta') \hat{j} + \\ & (-\sin \theta_d \cos \phi' \sin \theta' + \cos \theta_d \cos \theta') \hat{k} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Al recordar que $\cos \theta$ es la componente z de \hat{n} se concluye que

$$\cos \theta = -\sin \theta_d \cos \phi' \sin \theta' + \cos \theta_d \cos \theta'. \quad (4.33)$$

En seguida se explica el algoritmo seguido para el cálculo de la distribución de probabilidad de $\cos \theta$, $f(\cos \theta)$. Para facilitar la explicación se usará la notación, $u \equiv \cos \theta$. Se parcela el rango de u en intervalos $(u_i, u_i + \Delta u)$. A cada intervalo se hace corresponder un elemento de un arreglo a_i . Se elijen direcciones θ' , ϕ' al azar, según una distribución uniforme, dentro del ángulo sólido abarcado por el detector. Para cada dirección se calcula $P_a(\theta')$ (ecuación (4.21)) y $u(\theta', \phi')$ (ecuación (4.33)). Se identifica i' tal que $u_{i'} \leq u(\theta', \phi') \leq u_{i'} + \Delta u$. Se suma $P_a(\theta')$ a $a_{i'}$. En la figura 4.5 se muestra un ejemplo de $f(\cos \theta)$ calculado con base en este algoritmo, a través del programa `prob_cos` (capítulo 6).

El programa `prob_cos` usa una aproximación también empleada por el programa `fits`. Ésta se basa en la sustitución de $e^{-\mu S}$ en la ecuación (4.21) por los términos hasta de orden 1 de su expansión en serie de potencias de μS , lo cual conduce a

$$P_a(S) = \mu S. \quad (4.34)$$

Esta aproximación es válida sólo si $\mu S_{max} \ll 1$. Donde S_{max} es el máximo valor posible de S . El valor de μ para el Germanio se puede consultar en la referencia [19].

La reacción de fusión-evaporación prefiere estados nucleares con momento angular en dirección perpendicular a la del haz de proyectiles. Por esta razón, la probabilidad de que un fotón sea emitido en cierta dirección no es isotrópica

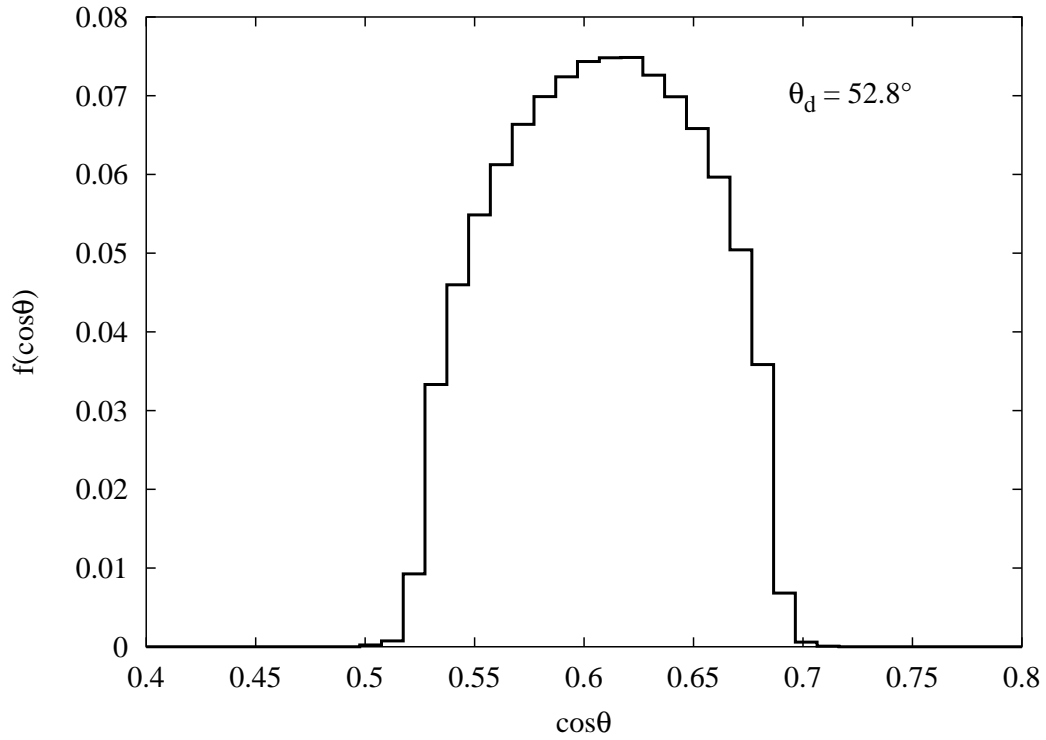


Figura 4.5: Distribución de $\cos\theta$, $f(\cos\theta)$, calculada con el programa `prob_cos`.

[20]. A la distribución de probabilidad de la dirección de los fotones emitidos en determinada transición se le llama *patrón angular de radiación*. En la referencia [6] se reporta que una forma de línea generada con un patrón angular típico de una transición entre estados poblados por una reacción de fusión-evaporación y una forma de línea generada con un patrón angular isotrópico, no son distinguibles. Considerando lo anterior, el programa `prob_cos` no incluye el efecto de un patrón angular de radiación anisotrópico.

4.3 Combinación de $f(v, t)$ con $f(\cos\theta)$ para encontrar $f_\beta(\beta_k, t)$

Para calcular $f_\beta(\beta_k, t)$ con base en $f(v, t)$ y $f(\cos\theta)$ se parcela el rango de β_k en intervalos $(\beta_{ki}, \beta_{ki} + \Delta\beta_k)$. A cada intervalo se hace corresponder un elemento de un arreglo a_i . Las distribuciones $f(v, t)$ y $f(u)$ han sido calculadas como distribuciones discretas $f(v_j, t_l)$, $f(u_m)$ (ver secciones 4.1 y 4.2). Para cada v_j y cada u_m se identifica i' tal que $\beta_{ki'} \leq v_j u_m \leq \beta_{ki'} + \Delta\beta_k$. Se suma $f(v_j, t_l) f(u_m)$ al elemento $a_{i'}$. En la figura 4.6 se muestra un ejemplo de $f_\beta(\beta_k, t)$ hallada mediante este procedimiento, con el programa `stopping9` (capítulo 6).

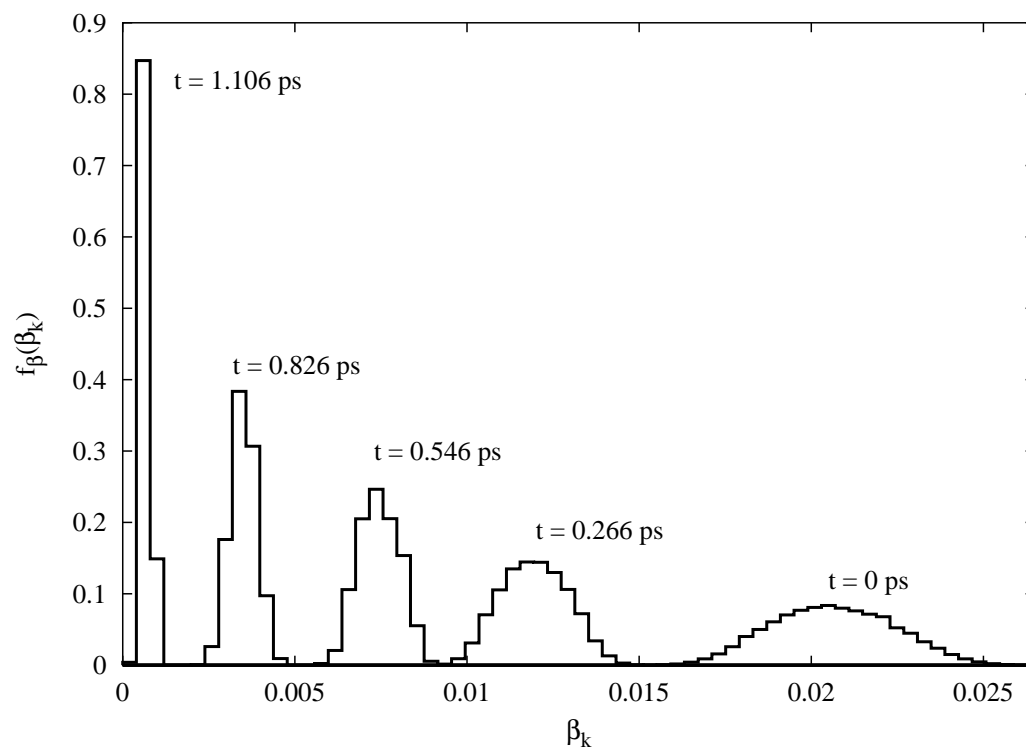


Figura 4.6: Distribución $f_{\beta}(\beta_k, t)$

Capítulo 5

Efectos relativistas

5.1 Error cometido en el cálculo de la velocidad al usar la ecuación clásica para la energía cinética

La energía cinética relativista se define como [21]

$$T = m_0 c^2 (\gamma - 1), \quad (5.1)$$

con

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad (5.2)$$

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (5.3)$$

Al despejar β^2 de (5.1) se llega a

$$\beta^2 = 1 - (1 + \epsilon)^{-2}, \quad (5.4)$$

donde

$$\epsilon = \frac{T}{m_0 c^2}. \quad (5.5)$$

Al expandir (5.4) en serie de potencias de ϵ , retener términos hasta de orden 2 y tomar la raíz cuadrada en ambos lados, se obtiene

$$\beta = \sqrt{2\epsilon + 3\epsilon^2}. \quad (5.6)$$

Cuando se desprecia el término $3\epsilon^2$ en el lado derecho de (5.6) se obtiene la ecuación clásica para la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (5.7)$$

A continuación se calcula el error relativo cometido en el cálculo de β al hacer esta aproximación. Al definir $u \equiv 2\epsilon + 3\epsilon^2$, la ecuación (5.6) se puede escribir en la forma

$$\beta = \sqrt{u} \quad (5.8)$$

Por la ecuación de propagación de las incertidumbres,

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i, \quad (5.9)$$

aplicada a (5.8),

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\Delta u}{u} \quad (5.10)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3\epsilon^2}{2\epsilon} \quad (5.11)$$

$$= \frac{3}{4} \epsilon, \quad (5.12)$$

con

$$\Delta u = 3\epsilon^2. \quad (5.13)$$

Para el ^{83}Y producido en la reacción de la referencia [11], la ecuación (4.15) da como resultado para la energía cinética inicial

$$T = 135 \text{ MeV} \times \frac{(83)(32)}{90^2} = 44.3 \text{ MeV}. \quad (5.14)$$

La masa del ^{83}Y es

$$m \simeq 83 \times 931.5 \text{ MeV}/c^2 = 7.73 \times 10^4 \text{ MeV}/c^2. \quad (5.15)$$

Luego,

$$\epsilon = 5.7 \times 10^{-4}. \quad (5.16)$$

Finalmente,

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = 4.3 \times 10^{-4} \quad (5.17)$$

5.2 Error cometido en el cálculo de E_γ al despre- ciar la energía cinética de retroceso del núcleo

Para que haya conservación del momento lineal cuando un núcleo emite un fotón, el primero debe adquirir cierto momento lineal durante la emisión. Esto implica que parte de la energía liberada en la transición se invierte como energía cinética de retroceso del núcleo. En consecuencia, la energía del fotón, E_γ , es menor que la energía de la transición, E_0 . Exactamente,

$$E_\gamma = E_0 \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon \right), \quad (5.18)$$

con

$$\epsilon = \frac{E_0}{mc^2}. \quad (5.19)$$

El error relativo cometido al hacer la aproximación

$$E_\gamma \simeq E_0, \quad (5.20)$$

es

$$\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (5.21)$$

Las energías de transición más altas registradas en el experimento de DSA de la referencia [11], correspondiente a fotones emitidos por el ^{83}Y , son del orden de 2 MeV. Luego,

$$\varepsilon = \frac{2 \text{ MeV}}{7.73 \times 10^4 \text{ MeV}} = 2.6 \times 10^{-5}. \quad (5.22)$$

Finalmente,

$$\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma} = 1.3 \times 10^{-5} \quad (5.23)$$

5.3 Diferencia en la medida de t'' en el marco de referencia del núcleo y en el marco de referencia del laboratorio por la dilatación del tiempo

Sea A un evento que sucede en cierto punto de un marco de referencia inercial O , en el tiempo t_A . Sea B otro evento que sucede en el mismo punto de O , en un tiempo posterior t_B . Sea O' otro marco de referencia que se mueve respecto a O con velocidad v . En O' los eventos mencionados suceden en tiempos t'_A y t'_B . De acuerdo con la cinemática relativista, el tiempo que transcurre entre los dos eventos en el marco O , $t_B - t_A$, es menor que aquel que transcurre entre los mismos, en el marco O' , $t'_B - t'_A$ [21],

$$t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A) \quad (5.24)$$

con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.25)$$

A este hecho se le conoce como *dilatación del tiempo*. Uno de los experimentos clásicos que comprobó esta predicción teórica fue el de la medición de la vida media de los muones provenientes de los rayos cósmicos [21, pág. 111]. El tiempo que transcurre entre la detección inicial de un muón y su decaimiento posterior es distinto si se le observa en el marco de referencia del muón o en el marco de referencia de la Tierra, respecto a la cual se mueve. De manera análoga, el tiempo que transcurre entre la creación de un núcleo compuesto y el decaimiento del estado de interés, medido en el marco de referencia del núcleo, t''_n , es distinto al tiempo transcurrido entre estos eventos en el marco de referencia del laboratorio, t''_l (en la discusión que sigue se suprimirán los superíndices $''$). A diferencia de lo que sucede con los muones, el núcleo residual no es un sistema inercial, debido a que su velocidad respecto al

marco de referencia del laboratorio cambia. Para eludir esta dificultad se divide en tiempo t_n en intervalos de tiempo muy cortos Δt_n . Durante cada uno de estos intervalos, la velocidad del núcleo permanece casi constante, de modo que se le puede considerar un marco de referencia inercial. Luego, es válido afirmar que

$$\Delta t_l = \gamma \Delta t_n, \quad (5.26)$$

$$\Delta t_n = \frac{\Delta t_l}{\gamma}. \quad (5.27)$$

Sumando sobre todos los intervalos de tiempo,

$$\int_0^{t_n} dt'_n = \int_0^{t_l} \frac{dt'_l}{\gamma(v(t'_l))}, \quad (5.28)$$

$$t_n = \int_0^{t_l} \sqrt{1 - \beta^2} dt'_l. \quad (5.29)$$

$v(t)$ es la velocidad del núcleo en el marco de referencia del laboratorio. Considerando que $\beta \leq 0.035$, se expande $\sqrt{1 - \beta^2}$ en serie de potencias y se retienen términos hasta de orden 2,

$$\sqrt{1 - \beta^2} = (1 - \beta^2)^{1/2} \quad (5.30)$$

$$\simeq 1 - \frac{1}{2}\beta^2. \quad (5.31)$$

Al remplazar (5.31) en (5.29) se llega a

$$t_n = t_l - \frac{1}{2} \int_0^{t_l} \beta^2 dt. \quad (5.32)$$

De acuerdo con (5.32), en el peor de los casos t_n y t_l difieren en

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \beta^2 dt. \quad (5.33)$$

Esta diferencia se calculó para ^{84}Zr , con velocidad inicial de $0.035c$, frenándose en ^{181}Ta . La función $\beta(t)$ usada en la integración fue obtenida por el procedimiento explicado en la sección 4.1. El resultado hallado fue

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \beta^2 dt = 7 \times 10^{-5} \text{ ps}. \quad (5.34)$$

Este tiempo es mucho menor que la más pequeña de las vidas medias a las que es aplicable el método DSA, 0.01 ps.

5.4 Error cometido en el cálculo del corrimiento ΔE al tomar términos hasta de orden 1 en la expansión en serie de potencias de la ecuación exacta del efecto Doppler

La energía de un fotón es observada en dos marcos de referencia inerciales que se desplazan uno respecto al otro con velocidad relativa v . Permítase que uno de los marcos de referencia sea el del núcleo, n , y que el otro sea el del laboratorio, l . La energía del fotón se transforma de un marco de referencia al otro a través de

$$E_{\gamma,l} = E_{\gamma,n} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta_l}, \quad (5.35)$$

donde $E_{\gamma,l}$ y $E_{\gamma,n}$ son la energía del fotón en l y n respectivamente, y θ_l es el ángulo entre la velocidad relativa entre n y l y el vector de onda del fotón visto en el marco l . Al expandir en serie de potencias el numerador y el denominador y retener términos hasta orden 2 se llega a

$$E_{\gamma,l} = E_{\gamma,n} \left[1 + \beta \cos \theta_l + \beta^2 \left(\cos^2 \theta_l - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.36)$$

El corrimiento por efecto Doppler, $E_{\gamma,l} - E_{\gamma,n}$, calculado con la aproximación de orden 2 en β , ΔE_2 , es

$$\Delta E_2 = E_{\gamma} \beta \cos \theta_l + E_{\gamma} \beta^2 \left(\cos^2 \theta_l - \frac{1}{2} \right). \quad (5.37)$$

Se ha suprimido la n en el subíndice de $E_{\gamma,n}$. Al despreciar el término de orden 2 se llega a la ecuación (3.2), usada a lo largo de este trabajo. Para efectos de la comparación con ΔE_2 , se llamará al corrimiento en la aproximación de orden 1, ΔE_1 .

$$\Delta E_1 = E_{\gamma} \beta \cos \theta_l. \quad (5.38)$$

La diferencia relativa entre ΔE_1 y ΔE_2 , $\delta(\Delta E)$, definida como

$$\delta(\Delta E) = \frac{|\Delta E_2 - \Delta E_1|}{\Delta E_1}, \quad (5.39)$$

puede hallarse con base en (5.38) y (5.37),

$$\delta(\Delta E) = \beta F(\theta_l), \quad (5.40)$$

con

$$F(\theta) = \frac{|1/2 - \cos^2 \theta_l|}{\cos \theta_l}. \quad (5.41)$$

$f(\theta) \rightarrow \infty$ cuando $\theta \rightarrow 90^\circ$, lo cual indica que ΔE_2 se vuelve enorme comparado con ΔE_1 . Luego, cerca de este ángulo la aproximación de orden 1 no es válida. Este

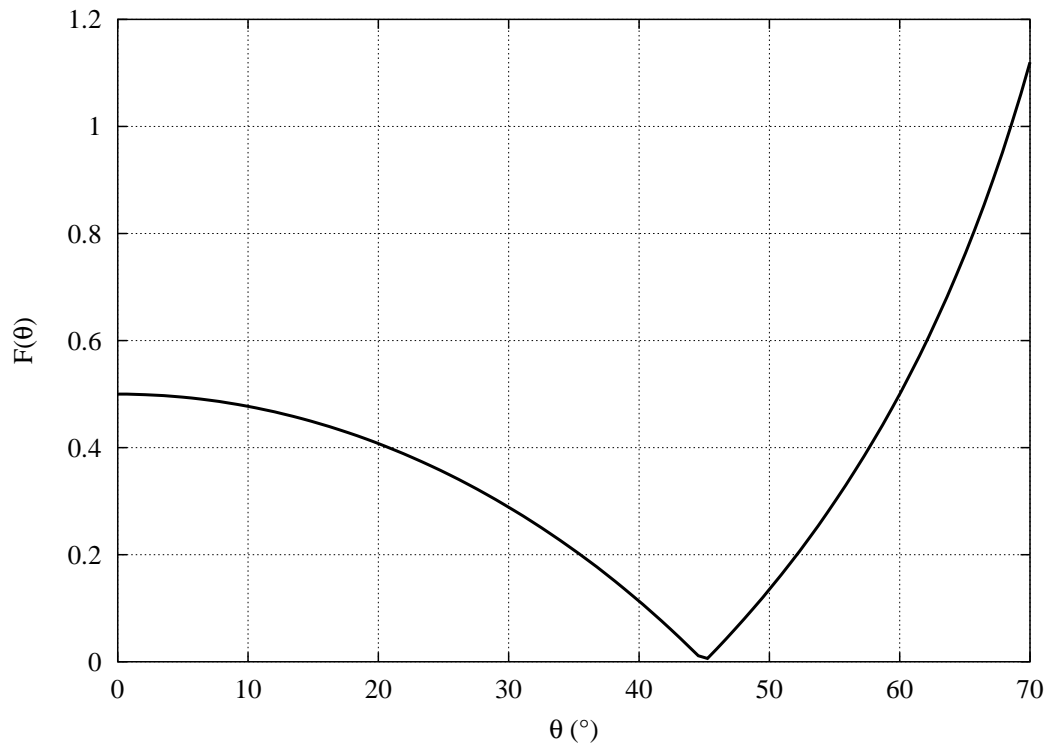


Figura 5.1: Gráfica de $F(\theta)$ (ver ecuación (5.41)).

hecho prohíbe la aplicación de los programas explicados en este trabajo, basados en la aproximación de orden 1, en la simulación de formas de línea detectadas a $\theta = 90^\circ$. Ésta es, sin embargo, una restricción menor. En la figura 5.1 se muestra la gráfica de $F(\theta)$ en el rango de 0° a 70° . El valor máximo de $F(\theta)$ en este rango es 1.1. Por la ecuación (5.40) puede verse que el error máximo cometido en el cálculo de ΔE , $\delta(\Delta E)$, al usar la aproximación de orden 1, en este rango, es del 4%.

Capítulo 6

Programas escritos en este trabajo

Los programas creados en este trabajo emplean los algoritmos expuestos en los capítulos anteriores. Fueron escritos en los lenguajes de programación C y C++. Para el entendimiento del contenido de este capítulo se requiere que el lector esté familiarizado con estos lenguajes de programación y con el sistema operativo UNIX.

Los programas se encuentran, ya compilados, en *rebeca* (uno de los computadores de la red de área local del Grupo de Física Nuclear) en el directorio

```
/home/alejandro/extracto_ajuste/
```

Si usted tiene una cuenta en *rebeca* y desea ejecutarlos, agregue este directorio a la variable `path` de su intérprete de comandos (*shell*).

Para quien esté interesado en instalarlos en su sistema, en seguida se presenta una guía. Después, en la exposición de la metodología de trabajo, se describe el funcionamiento de cada uno.

6.1 Instalación de los programas

Para instalar los programas siga estos pasos:

1. Copie el código fuente de los programas contenido en el archivo

```
rebeca:/home/alejandro/extracto_ajuste.tar
```

2. Expanda el archivo `extracto_ajuste.tar`. Al hacerlo se creará un único directorio llamado `extracto_ajuste` dentro del directorio que contiene al archivo `extracto_ajuste.tar`. Tenga en cuenta esto para la elección del directorio en que hará la expansión.

3. Copie las bibliotecas contenidas en el archivo

```
rebeca:/home/alejandro/bibliotecas.tar
```

4. Expanda el archivo `bibliotecas.tar`. Al realizar la expansión se creará un único directorio llamado `bibliotecas` dentro del directorio que contiene al archivo `biblioteca.tar`. Tenga en cuenta esto para la elección de este directorio.
5. Cree la variable de ambiente `BIB_PARENT` cuyo valor debe ser la ruta del directorio en el cual expandió `bibliotecas.tar`. Haga esto con `setenv BIB_PARENT directorio`. Atención: el último carácter del valor de esta variable no debe ser un `/`.
6. Cree la variable de ambiente `C_COMPILER` cuyo valor debe ser el nombre del compilador de lenguaje C de su sistema. Haga esto con `setenv C_COMPILER compilador`.
7. Cree la variable de ambiente `CPP_COMPILER` cuyo valor debe ser el nombre del compilador de lenguaje C++ de su sistema. Haga esto con `setenv CPP_COMPILER compilador`.
8. Al expandir `bibliotecas.tar` debe haberse creado el directorio `bibliotecas`. Dentro de este directorio se halla el archivo `compilar.scr` que es un script para la compilación de las bibliotecas. Ejecútelo. Las bibliotecas quedarán escritas en el directorio `bibliotecas/lib`. El éxito de este paso depende de la creación de las variables ambiente antes mencionadas. No incurra en el error de intentar hacer la compilación en un *shell* diferente a aquel en que definió las variables de ambiente.
9. Al expandir el archivo `extracto_ajuste.tar` debe haberse creado el directorio `extracto_ajuste`. Dentro de este directorio se hallan el código fuente de los programas en archivos `*.c` y `*.cpp`, los archivos de prototipos de funciones (*header files*) `*.h` y los archivos de compilación de los programas mediante el comando `make`, `*.mk`. Cada archivo `*.mk` contiene los pasos para la compilación de un único programa. Al ejecutar exitosamente `make -f programa.mk`, se crea el programa *programa*. Compilar los programas uno por uno puede ser conveniente para la ubicación de posibles errores. Si quiere compilarlos en un solo paso ejecute

```
foreach file(*.mk)
  make -f $file
end
```

Este paso también depende de la creación de las variables de ambiente de los pasos 5, 6, 7.

10. Antes de intentar ejecutar los programas compilados, agregue la ruta del directorio que los contiene, es decir `extracto_ajuste`, a la variable `path` del *shell*. Luego, ejecute `rehash`.

Programa	archivos de entrada	archivos de salida
ajuste15	in_ajuste.dat in_casc.dat	comptau.dat csptau.dat echtau.dat sptau.dat chisq11.dat
ajuste16	in_ajuste.dat in_casc.dat	comptau.dat csptau.dat echtau.dat sptau.dat chisq12.dat
no_h5	in_casc.dat	pobla.dat cum.dat var_tau.dat
prob_cos	in_cos.dat	pcos.dat
stopping9	in_stp.dat	velindice.dat d_vel.dat betak_runge.dat
stopping7_1	in_stp.dat	E_x.dat v_x.dat x_t.dat v_t.dat
stopping6_1	in_stp.dat	E_x.dat v_x.dat x_t.dat v_t.dat

Tabla 6.1: Archivos de entrada y de salida de los programas escritos en este trabajo. El contenido de los archivos se explica en la sección 6.2.

11. Ejecute los programas. Ejemplos de archivos de entrada para cada programa se encuentran en el directorio `extracto_ajuste/in_files`. La información sobre qué archivos corresponden a qué programas se muestra en la tabla 6.1

Las funciones ubicadas en el directorio `bibliotecas` llevan a cabo tareas que, el autor ha supuesto, son comunes a muchos de los proyectos de escritura de software que se llevan a cabo en el Grupo de Física Nuclear. Estas funciones se han ubicado en este directorio para fomentar su uso.

El desarrollo de los programas se llevó a cabo en el directorio

`rebeca:/home/alejandro/ajuste`

Los programas ubicados en `extracto_ajuste` son las versiones finales.

6.2 Metodología de trabajo para la medición de vidas medias

1. Genere una tabla de poder de frenado (*stopping power*) del núcleo residual en el sustrato.
2. Genere la distribución de probabilidad $f(\cos \theta)$ con el programa `prob_cos`.
3. Genere el archivo de $f(\beta_k, t)$ ejecutando `stopping9`.
4. Obtenga la vida media ejecutando `ajuste16`. Este programa genera las formas de línea teóricas, las compara con la forma de línea experimental, produce una curva de $\chi_r^2(\tau)$ y con base en ella determina el valor central y los extremos del intervalo de incertidumbre de la medida de τ .
5. Es posible que `ajuste16` localice un mínimo local de $\chi_r^2(\tau)$, en vez del mínimo absoluto. Use `ajuste15`, que puede calcular $\chi_r^2(\tau)$ para cualquier lista de valores de τ , para ubicar el mínimo absoluto. Repita la medición de la vida media con `ajuste16`, esta vez dentro del intervalo apropiado.

6.2.1 Obtención de la tabla de poder de frenado

La tabla de poder de frenado del núcleo residual en el sustrato puede calcularse con el programa `trim` [22]. Esta tabla debe quedar escrita en un archivo de dos columnas. La primera columna debe ser la energía en keV. La segunda columna debe ser el poder de frenado en keV/ μm . La tabla debe abarcar energías desde cero hasta una energía mayor que el máximo valor posible de la energía inicial del núcleo residual. El poder de frenado calculado con `trim` para ^{83}Y propagándose dentro de ^{181}Ta se muestra en la figura 6.1.

6.2.2 Generación de la distribución de cosenos

La distribución de $\cos \theta$ se calcula, a través del procedimiento explicado en la sección 4.2, con el programa `prob_cos`. El archivo `in_cos.dat` del directorio `~/83y1` (`~` es `/home/alejandro`), mostrado en la figura 6.2 es un ejemplo de archivo de entrada para este programa. El programa escribe la distribución de cosenos en el archivo `pcos.dat`. En éste los datos están escritos en caracteres ascii y pueden ser graficados con `gnuplot`.

6.2.3 `stopping9`

Escriba el archivo de entrada para el programa `stopping9` que genera la densidad de probabilidad de β_k como función del tiempo, $f(\beta_k, t)$, por medio del algoritmo

¹En adelante, si no se indica explícitamente el nombre del computador, debe asumirse que es rebecca.

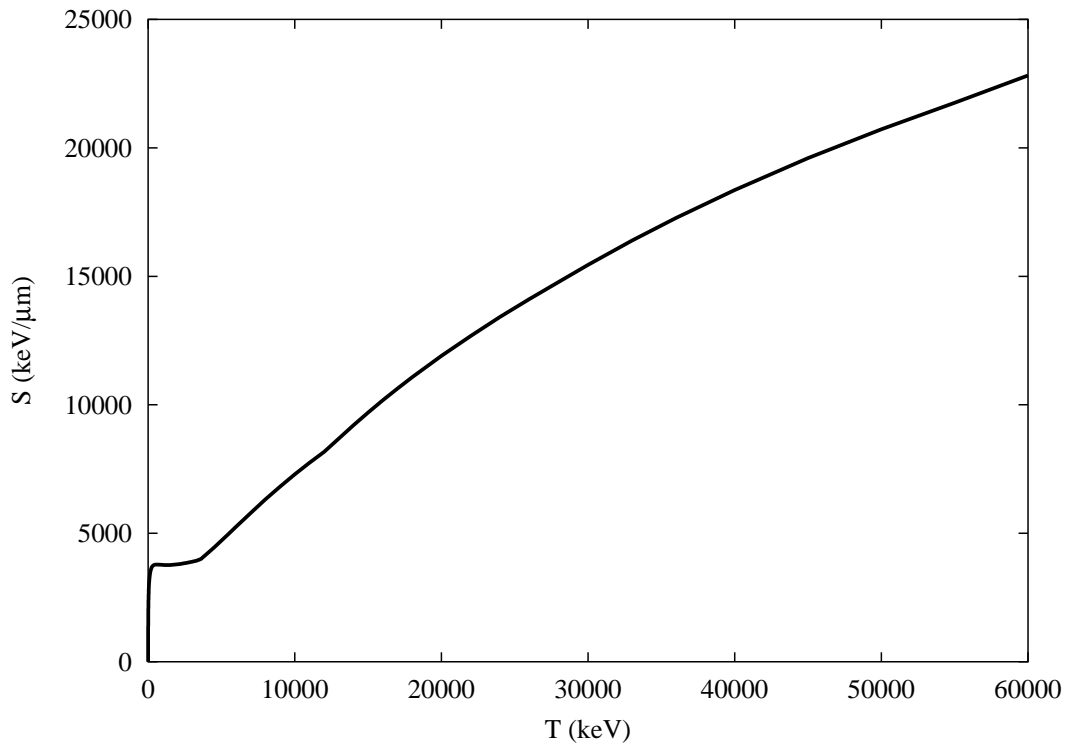


Figura 6.1: Poder de frenado S en función de la energía cinética. ^{83}Y frenándose en ^{181}Ta . Curva calculada con el programa `trim` [22].

explicado en la sección 4.3. El archivo `in_stp.dat` del directorio `~/83y/1bd1606`, mostrado en la figura (6.3), es un ejemplo de archivo de entrada. En éste, la información referente a cada parámetro de entrada está dividida en tres campos. El primer campo es una etiqueta que le indica al programa de qué parámetro de entrada es el valor escrito en el segundo campo. El tercer campo es una descripción del parámetro de entrada. En el código fuente de `stopping9` cada etiqueta está asociada a una variable. Por ello, si se modifica el nombre de una etiqueta en el archivo de entrada, esta modificación debe hacerse también en el código fuente de `stopping9` (y de otros programas que lean el mismo archivo) para no afectar su funcionamiento. Por lo anterior se recomienda no modificar los nombres de las etiquetas. Note que en el campo con etiqueta `stp_file` debe escribirse el nombre del archivo con la tabla de poder de frenado, y en el campo con etiqueta `cosfile` debe escribirse el nombre del archivo con la distribución $f(\cos\theta)$.

Genere el archivo de $f(\beta_k, t)$ ejecutando `stopping9`. El programa escribe la distribución $f(\beta_k, t)$ en el archivo `betak_runge.dat`. Este archivo está escrito en formato `ascii`, es decir, puede ser leído con un editor de texto; sus líneas pueden presentar muchos caracteres, por lo que, si se le lee con el modo por defecto de `emacs`, cada línea de texto será mostrada en varias líneas de la ventana del editor. Este hecho puede dificultar el entendimiento del formato del archivo. Para evitar este problema active la opción de truncamiento de líneas de `emacs`. Para ello, seleccione en el menú principal: `help` \rightarrow `options` \rightarrow `line truncation`. En el editor `xemacs` la

```
#####
#                                                                 #
#           Parametros de entrada para prob_cos                 #
#                                                                 #
#####

3.55          # radio del detector en cm
8.0           # altura del detector en cm
25.5          # distancia del detector al target en cm
52.8          # angulo (grados) entre la direccion del haz y
              # el eje del detector
```

Figura 6.2: Ejemplo de archivo de entrada para prob_cos.

misma opción puede activarse seleccionando en el menú principal: *options* → *frame appearance* → *truncate lines*. En el *shell* se puede conseguir un efecto similar usando el filtro `cut`. Las primeras líneas del archivo, que empiezan con el caracter `#`, son una explicación de su formato. En las líneas siguientes, la primera columna es el punto medio de cada intervalo de β_k . La columna dos y las siguientes son la distribución de β_k para diferentes tiempos, es decir las cuentas en cada uno de los intervalos representados en la columna uno. La línea cuatro del archivo informa qué tiempo corresponde a cada columna. Para ver cómo cambia en el tiempo la distribución de β_k grafique en `gnuplot`, simultáneamente, varias de las columnas del archivo.

`stopping9` escribe la distribución de la velocidades en función del tiempo, $f(v, t)$ en el archivo `d_vel.dat`, y la velocidad como función del tiempo para cada una de las velocidades iniciales en archivos `velindice.dat`. Dentro de `stopping9` las velocidades iniciales se escriben en un arreglo. *indice* es el índice que le corresponde a cada velocidad inicial en ese arreglo.

6.2.4 Los programas auxiliares `stopping6_1` y `stopping7_1`

El programa `stopping6_1` calcula la curva de $v(t)$ para una única velocidad inicial, por el procedimiento explicado en la sección 4.1. La curva de $v(t)$ es escrita en el archivo `v_t.dat`. Las funciones $T(x)$, $v(x)$ y $x(t)$ halladas como pasos intermedios en el cálculo de $v(t)$ son escritas en los archivos `E_x.dat`, `v_x.dat` y `x_t.dat`, respectivamente. Las figuras 6.4 a 6.7 muestran las gráficas de estas funciones, calculadas a partir de la tabla de poder de frenado de la figura 6.1, con energía inicial de 44.3 MeV (ecuación 4.16).

Este programa toma el mismo archivo de entrada usado por `stopping9`.

El programa `stopping7_1` a diferencia de `stopping6_1` que halla $v(t)$ hasta un tiempo final predeterminado, calcula esta función hasta que se hace menor que cierto umbral preestablecido. Si el umbral es muy bajo y, como consecuencia del poder de frenado usado, la curva $v(t)$ decae lentamente, la ejecución de este programa puede tomar mucho tiempo. La curva $v(t)$ es almacenada en un objeto que simula un

```

#####
#                                                                 #
#           Parametros para stopping9/6_1/7_1                    #
#                                                                 #
#####

#etiqueta  valor  descripcion

Ap    32          # Numero de masa del proyectil, adimensional
At    58          # Numero de masa del target,      adimensional
Ar    83          # Numero de masa de nuc. residual, adimensional
Ab    181         # Numero de masa del backing, adimensional

Zr    39          # Numero atomico del nuc. residual, adimensional
Zb    73          # Numero atomico del backing, adimensional

E_p   135000      # energia del proyectil, keV

                    # parametros para el calculo de E(x)
xf    5           # x final, micrometros
nx    200         # numero de pasos integracion stop. power

                    # parametros para el calculo de x(t)
tf    2           # t final, picosegundos
nt    200         # pasos para la integracion de v(x)

stp_file yta.dat # archivo con tabla de stopping power

nsig   100        # 2*nsig + 1 = (numero de intervalos
                    #                distribucion energias iniciales)
fsig   0.1        # fsig*E_p es sigma de la distribucion
                    # gaussiana de energias iniciales

tm     1.4        # extremo superior del rango de tiempo, picosegundo(ps)
vm     12         # extremo superior del rango de velocidad, micrometro/ps
ntt    200        # numero de subintervalos del rango de tiempo
nv     100        # numero de subintervalos del rango de velocidad

cosfile pcos52.8.dat
                    # archivo con distribucion de cosenos

nbk    100        # El rango de beta_k (-vm/300,vm/300)
                    # se divide en 2*nbk+1 subintervalos

```

Figura 6.3: Ejemplo de archivo de entrada para stopping9.

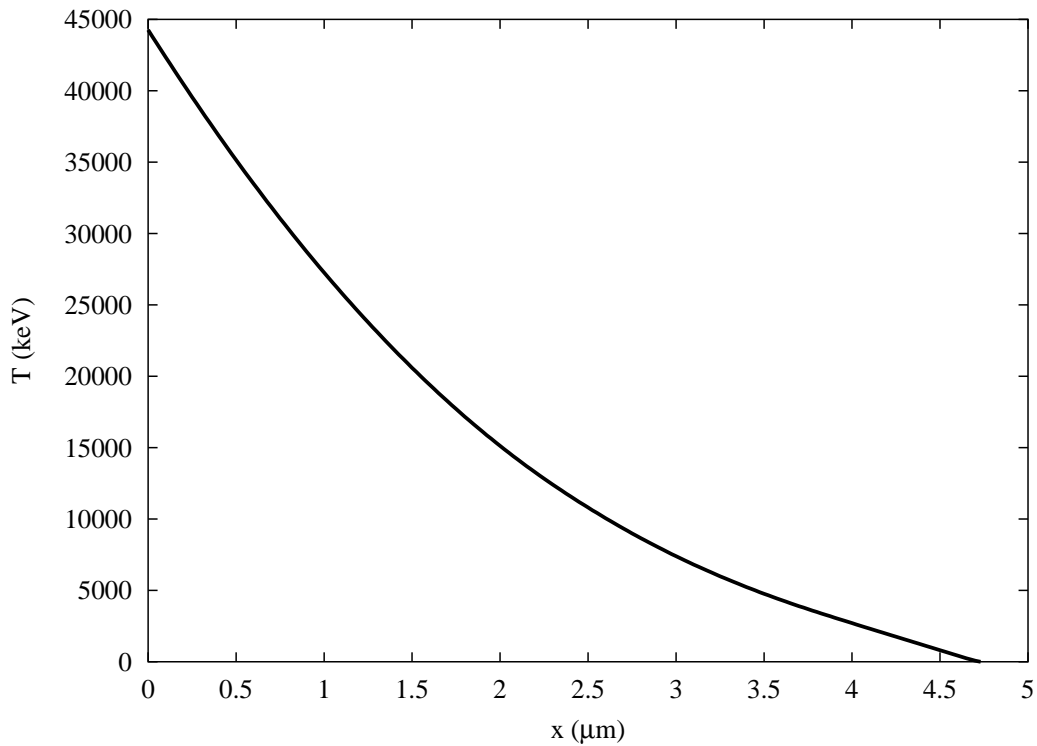


Figura 6.4: Energía cinética del núcleo residual T en función de la profundidad dentro del sustrato x . Curva calculada con el programa `stopping6_1`.

arreglo infinito, ubicando memoria durante el tiempo de ejecución.

`stopping6_1` y `stopping7_1` usan algoritmos similares (salvo la multiplicación por $\cos \phi$, página 29) a los que emplea `stopping9` para el cálculo de $v(t)$. Estos algoritmos se basan en el método de Runge-Kutta de orden cuatro para la integración de ecuaciones diferenciales [23].

6.2.5 ajuste15

Genere las formas de línea y compárelas con la forma de línea experimental con `ajuste15`. Este programa solicita dos archivos de entrada. El primero es solicitado como “Archivo con parámetros”. El archivo `in_ajuste.dat` del directorio `~/83y/1fd1606`, mostrado en la figura 6.8, es un ejemplo de este tipo de archivo. La última variable de este archivo es el nombre del archivo que contiene la distribución de $f(\beta_k, t)$. El segundo archivo es solicitado como “archivo con patrón de poblamiento”. Los archivos `in_casc*.dat` son ejemplos de este tipo de archivo. El contenido del archivo `in_casc.dat` del directorio `~/83y/1fd1606` se muestra en figura 6.9. Su formato se explica en seguida. La primera línea contiene el número de estados del patrón de poblamiento, n (en este caso $n = 5$). Los estados se enumeran desde 1 hasta n , de modo que si $|\phi_i\rangle$ puebla a $|\phi_j\rangle$ entonces $i < j$. El estado de interés debe ser el de más baja energía del patrón de poblamiento. A éste se le debe asignar el índice $i = n$. La segunda línea del archivo debe contener las vidas medias

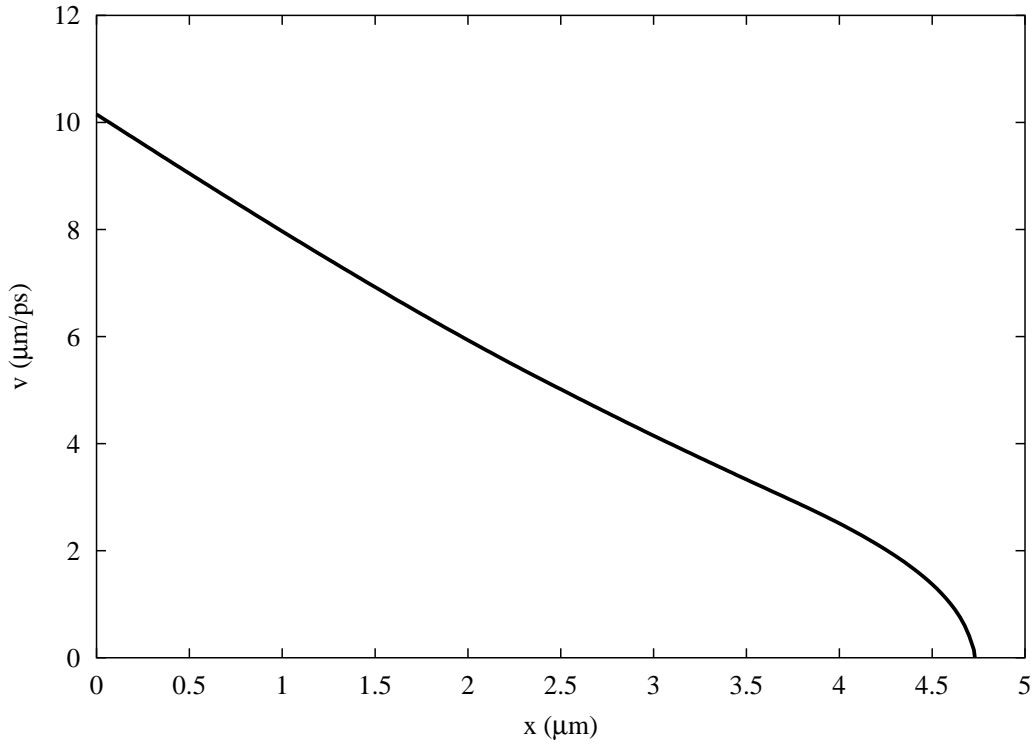


Figura 6.5: Velocidad v del núcleo residual en función de la profundidad dentro del sustrato x . Curva calculada con el programa `stopping6_1`. Para la velocidad se escogió como unidad $\mu\text{m/ps}$. La velocidad de la luz en estas unidades es $c = 300 \mu\text{m/ps}$.

de los estados (en picosegundos). En este caso $\tau_1 = 0.11$, $\tau_2 = 0.023$, $\tau_3 = 0.084$ y $\tau_4 = 0.035$. Aunque el valor de τ_n , en este ejemplo τ_5 , escrito en el archivo y leído por `ajuste15`, es ignorado (recuérdese que éste es precisamente la cantidad que se quiere medir), éste debe estar presente al final de la segunda línea, para la apropiada lectura del resto del archivo.

Las siguientes n líneas del archivo son la matriz de razones de ramificación del patrón de poblamiento. Ésta es una matriz triangular $n \times n$, cuyo elemento b_{ij} es la razón de ramificación (definida en la página 14) del estado inicial j al estado final i . Los elementos sobre la diagonal están dados por $b_{ii} = -1$.

La última línea del archivo contiene las poblaciones iniciales de los estados.

El patrón de poblamiento representado por el archivo mostrado en la figura 6.9 se ilustra en la figura 6.10.

La población de los estados en función del tiempo es calculada por el objeto `Pobla` de clase `Pobla6`, mediante el algoritmo indicado por las ecuaciones (2.61-2.64). Por las razones expuestas en la página 16, este algoritmo sólo es aplicable si no hay dos estados con vidas medias iguales en las cascadas del patrón de poblamiento. Antes del cálculo de las poblaciones, el objeto `Pobla` examina el cumplimiento de esta condición. La vida media de ninguno de los estados puede valer cero, pues esto produciría un error de división por cero al intentar calcular las constantes de decaimiento $\lambda = 1/\tau$.

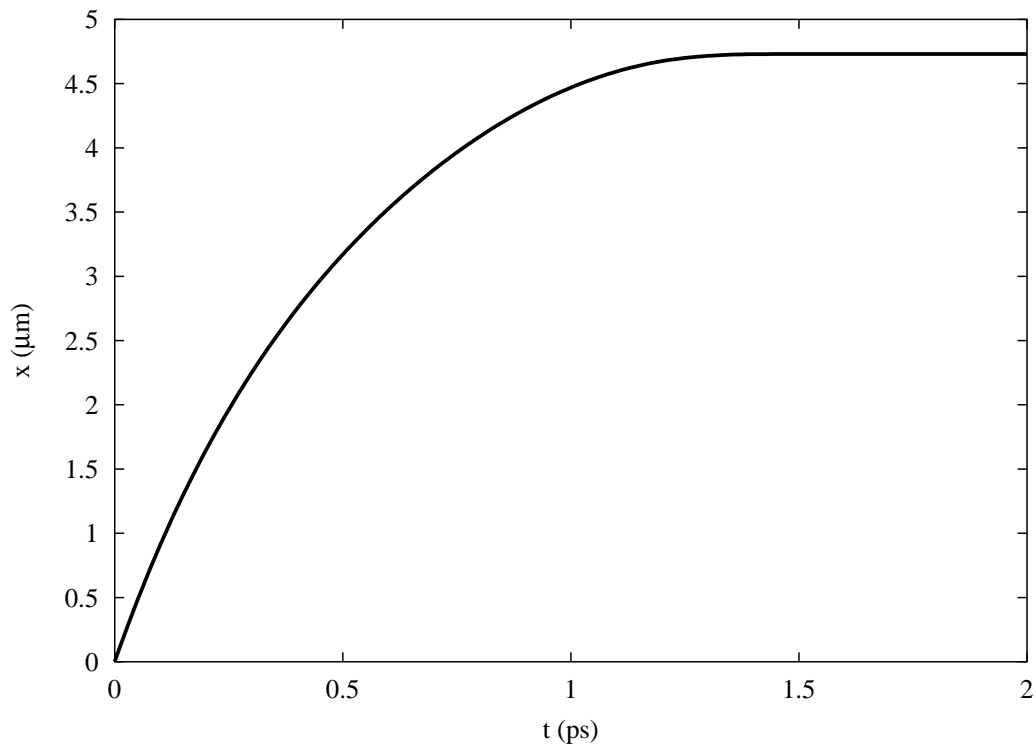


Figura 6.6: Profundidad del núcleo residual dentro del sustrato x en función del tiempo t . Curva calculada por el programa `stopping6_1`.

Después de leer los dos archivos de entrada, `ajuste15` escribe el mensaje

Vida media en los formatos ('q' to abort):

```

tau
{tau1, tau2, ... , tauN}
[tau_l, tau_h] / numero_de_subintervalos
[tau_l, tau_h] + incremento

```

con el que solicita las vidas medias para las que se quiere calcular la forma de línea. Este mensaje muestra una explicación abreviada de los cuatro formatos en que pueden entregarse los valores de la vida media. Enseguida se explican éstos detalladamente.

- Si quiere indicar sólo un valor para la vida media, escriba dicho valor y oprima ENTER.
- Para entregar una lista de valores, preceda el primer valor de la lista por un corchete de apertura `{`, separe los valores de la lista por comas, y finalice la lista con un corchete de cierre `}`. Después de escribir la lista oprima ENTER. Por ejemplo, para darle al programa la lista de valores 0.01 ps, 0.1 ps y 1 ps, debe escribir

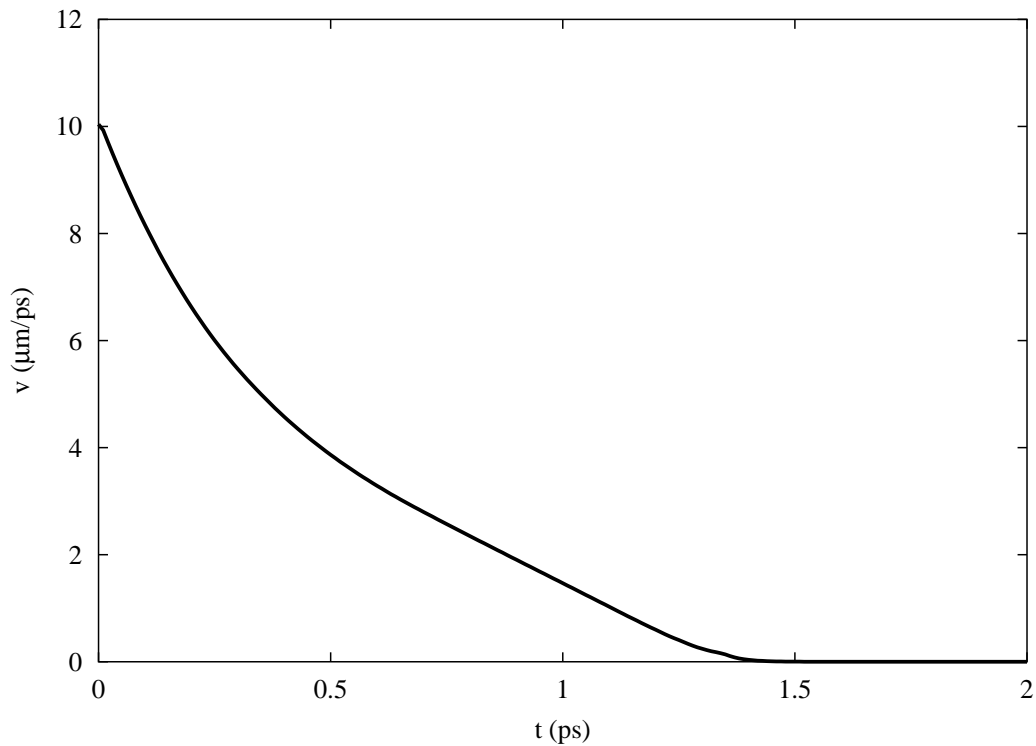


Figura 6.7: Velocidad v del núcleo residual en función del tiempo t . Curva calculada por el programa `stopping6.1`. Para la velocidad se escogió como unidad $\mu\text{m}/\text{ps}$. La velocidad de la luz en estas unidades es $c = 300 \mu\text{m}/\text{ps}$.

{0.01, 0.1, 1}

- Se pueden indicar las vidas medias resultantes de dividir cierto intervalo en un número entero de subintervalos. Para especificar el intervalo escriba sus extremos inferior y superior, separados por una coma (,) y rodeados por corchetes cuadrados []. Para indicar que se quiere dividir ese intervalo en n subintervalos, se debe escribir, después del corchete cuadrado de cierre, un signo de división / seguido por n (se pueden escribir espacios entre los números y los signos). Luego, oprima ENTER. Por ejemplo, para indicar la vidas medias que resultan de dividir el intervalo que va de 0.1 ps a 0.2 ps en 10 subintervalos iguales (incluyendo los extremos), es decir, 0.1, 0.11, 0.12, ..., 0.19 y 0.2 ps, se debe escribir

[0.1, 0.2] / 10

- Finalmente, se le puede indicar al programa que tome, dentro de cierto intervalo, el conjunto de vidas medias que resulta de sumar un número entero de veces cierto incremento al extremo inferior del intervalo. Para tal efecto se debe escribir, después del corchete cuadrado de cierre, un signo + seguido por el valor del incremento. Enseguida, oprima ENTER. Así, para especificar las


```
#####
#                                                                 #
#           Parametros de entrada para ajuste15/16                #
#                                                                 #
#####

1606                # E_g
0 1.333             # cal0, cal1
10                 # nt

1.3953 0.14058e-2 -0.1895e-6 # reso0, reso1, reso2
                                     # FWHM = reso0 + reso1*E_g + reso2*E_g^2

in_1606.ch          # archivo con espectro experimental
20                 # background

                                     # archivo distribucion de betak en el tiempo
../betak52.8.dat
```

Figura 6.8: Ejemplo de archivo de entrada para los programas ajuste15 y ajuste16, solicitado como “archivo con parámetros”.

```
5
0.11 0.023 0.084 0.035 0.16
-1
0 -1
1 1 -1
0 0 0 -1
0 0 1 1 -1
8 6 0 11 0
```

Figura 6.9: Ejemplo de archivo de entrada para los programas ajuste15 y ajuste16, solicitado como “archivo con patrón de poblamiento”.

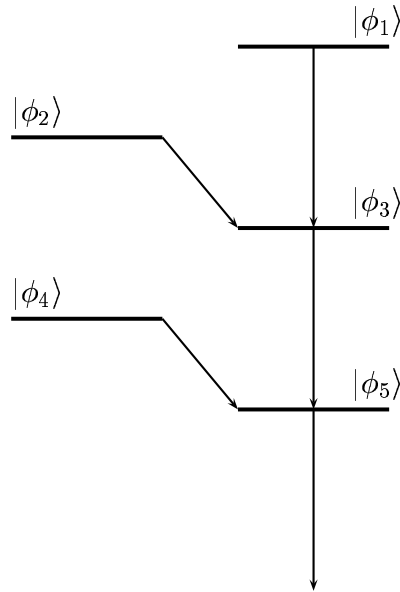


Figura 6.10: Patrón de poblamiento representado por el archivo mostrado en la figura 6.9.

vidas medias que van desde 0.1 ps hasta 0.2 ps en incrementos de 0.03 ps, es decir 0.1, 0.13, 0.16 y 0.19 ps se debe escribir

`[0.1, 0.2] + 0.03`

Luego de calcular la forma de línea, `ajuste15` compara ésta con la forma de línea experimental. Tal comparación consiste en el cálculo del χ_r^2 (ecuación (3.32)) asociado a las dos formas de línea. El χ_r^2 correspondiente a cada vida media especificada se escribe en el archivo `chisq11.dat`.

Para cada una de las vidas medias indicadas, `ajuste15` escribe cuatro archivos. Los nombres de estos archivos son `comptau.dat`, `csptau.dat`, `echtau.dat` y `sptau.dat`, donde `tau` es el valor de la vida media especificado. Así, si uno de los valores indicados es $\tau = 0.05$ ps, `ajuste15` escribe los archivos `comp0.05.dat`, `csp0.05.dat`, `ech0.05.dat` y `sp0.05.dat`.

Para el cálculo de la forma de línea teórica se llena un histograma cuyo ancho de canal es igual al ancho del canal experimental dividido entre un número entero, n_t . Dicho número es el cuarto parámetro de entrada escrito en el archivo `in_ajuste.dat`. El interés en la forma de línea teórica generada de esta manera yace en que, por tratarse de un histograma con un ancho de canal menor, constituye una mejor aproximación a la densidad de probabilidad del corrimiento $f(\Delta E)$. Este histograma de “canal estrecho” es escrito en `csptau.dat` y en `comptau.dat`. En `csptau.dat` la primera columna es el índice del arreglo que representa, dentro de `ajuste15`, al histograma. La segunda columna es proporcional al número de cuentas en cada canal. Este archivo se escribe únicamente para la verificación del adecuado funcionamiento del programa. En el segundo archivo, `comptau.dat`, la

primera columna es el número del canal y la segunda columna es el número de cuentas normalizado de acuerdo con lo indicado en la sección 3.4.

El histograma de canal estrecho es “vertido” sobre un histograma de ancho de canal igual al ancho del canal experimental. Este vertimiento consiste en remplazar n_t canales, cada uno abarcando un rango de energías $\delta(\Delta E)$, por un único canal que abarca un rango de energías $n_t \delta(\Delta E)$. El número de cuentas en este canal es la suma del número de cuentas en los n_t canales originales dividida entre n_t . Esta división se hace con el fin de conservar el área del histograma. Es esta forma de línea teórica con ancho de canal igual al del canal experimental la que se usa en el cálculo de χ_r^2 .

La forma de línea teórica con ancho del canal igual al del canal experimental es escrita en el archivo `echtau.dat`.

La forma de línea teórica de canal estrecho antes de ser convolucionada con la función de respuesta a impulso del detector es escrita en `sptau.dat`. La primera columna de este archivo es el índice del arreglo que representa a este histograma dentro de `ajuste15`. La segunda columna es el número de cuentas en cada canal.

Después de haber calculado la forma de línea y el χ_r^2 para el conjunto de vidas medias entregado, `ajuste15` vuelve a solicitar otro conjunto de vidas medias. Para el nuevo conjunto de vidas medias `ajuste15` realiza el procedimiento antes indicado. Los valores de χ_r^2 encontrados para las nuevas vidas medias son adicionados al archivo `chisq11.dat`. Este ciclo puede repetirse indefinidamente. Para finalizar la ejecución del programa se entrega el caracter `q` en vez del conjunto de vidas medias.

El haber proveído a `ajuste15` de diferentes formatos para la indicación del conjunto de vidas medias a probar, tiene como intención facilitar la construcción interactiva de la curva de $\chi_r^2(\tau)$. Un procedimiento recomendable, para cumplir este propósito, es el siguiente: primero identifique el orden de magnitud de la vida media. Con este fin, entregue a `ajuste15` una lista con vidas medias de diferentes órdenes de magnitud, por ejemplo

```
{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100}
```

Grafique `chisq11.dat` y observe para qué orden de magnitud el χ_r^2 tiene el valor más bajo. Supóngase que ese valor es 0.1 ps. Tome un intervalo de vidas medias alrededor de ese orden de magnitud y divídalo en varios subintervalos. Para ello, por ejemplo, entregue a `ajuste15` el conjunto de valores determinados por

```
[0.2,0.3]/10
```

Grafique de nuevo `chisq11.dat`. Tome un intervalo más pequeño alrededor del mínimo encontrado al observar la gráfica y divídalo en varios subintervalos. Al repetir el paso anterior indefinidamente, podrá acotar el mínimo de la curva de $\chi_r^2(t)$ en un intervalo de longitud cada vez menor.

6.2.6 ajuste16

El programa `ajuste16` halla por su propia cuenta el mínimo de la curva de $\chi_r^2(t)$. Toma como archivos de entrada los mismos archivos que `ajuste15`. La forma de línea

teórica correspondiente a cada vida media es calculada por el objeto `flinea` de clase `forma_de_linea`. Exactamente, este cálculo es hecho por el operador *llamado a una función*, `()`, sobrecargado. Este operador también calcula el χ_r^2 de la comparación de la forma de línea teórica con la experimental y retorna dicho valor a la función que lo haya invocado. Al definir el operador `()` de esta manera, es posible calcular la forma de línea teórica y el χ_r^2 con una expresión de la forma

```
chisq = flinea(tau)
```

En la anterior expresión el objeto `flinea` actúa como una función que toma como argumento el valor de la vida media `tau`, calcula la forma de línea teórica, escribe los archivos `comptau.dat`, `csptau.dat`, `echtau.dat` y `sptau.dat`, compara la forma de línea teórica con la experimental, y retorna el χ_r^2 resultante de tal comparación para que sea almacenado en la variable `chisq`.

El hecho a resaltar aquí es que, gracias a las posibilidades de la programación orientada a objetos, el cálculo del χ_r^2 se reduce al llamado a una función que toma como único argumento la vida media. Para encontrar un mínimo local de esta función puede usarse cualquier rutina de minimización de funciones, apropiada. El programa `ajuste16` usa la rutina `golden` del libro *Numerical Recipes in C* [23].

Esta rutina toma como uno de sus argumentos un apuntador a la función a minimizar. Este apuntador debe ser de tipo `float (*f)(float)`. Para aplicar la rutina `golden` a la minimización de `flinea()`, cuya dirección no coincide con el tipo de dato requerido para el apuntador a la función a minimizar, se define la función `f()` que ejecuta internamente a `flinea()` y tiene la lista de argumentos y el tipo de dato de retorno apropiados para ser dada como función a minimizar a la rutina `golden`. La definición de `f()` es

```
float f(float tau)
{
    float chisq = flinea(tau);
    lista.insertInOrder(tau,chisq);
}
```

En la segunda línea del cuerpo de esta función, mediante la expresión `lista.insertInOrder(tau,chisq)`, se agregan el χ_r^2 calculado y el valor de τ correspondiente, a una lista almacenada en el objeto `lista` de clase `biList`. Este objeto es una extensión de la *lista enlazada* (*linked list*) explicada en el capítulo 15 de la referencia [24].

Las listas enlazadas son estructuras de datos conformadas por objetos autoreferenciados, llamados nodos. Cada nodo contiene variables en las que se almacenan los datos que son la razón de ser de la lista y una variable que contiene la dirección del siguiente nodo de la lista (un apuntador a una variable del mismo tipo de dato que el nodo, de allí el calificativo *autoreferenciado*). Una lista de este tipo tiene como limitación que el desplazamiento sobre ella puede hacerse sólo en un sentido (“lista arriba”), pues en el nodo n -ésimo está la dirección del nodo número $n + 1$, pero no la del nodo número $n - 1$. Luego, es claro que si se incluye en cada nodo

una variable que contenga la dirección del nodo previo a él, en la lista, se posibilitará el desplazamiento “lista abajo”. La posibilidad de desplazamiento en ambos sentidos, lograda de esta manera, es el rasgo característico de la clase `biList`. Los primeros dos caracteres del nombre de esta clase, `bi`, hacen referencia a su carácter *bidireccional*.

`ajuste16` no sólo busca el mínimo de la curva de $\chi_r^2(\tau)$, también encuentra los extremos del intervalo de incertidumbre de la medida de τ con base en la regla $\chi_{min}^2 + 1$ (ver sección 3.32). El en proceso de búsqueda de la abscisa del mínimo de la curva $\chi_r^2(\tau)$, τ_0 , también se ha encontrado la ordenada de ese mínimo, χ_{min}^2 . Hallar los valores de τ_a , τ_b , $\tau_a < \tau_0$, $\tau_b > \tau_0$, tales que

$$\chi_r^2(\tau_a) = \chi_r^2(\tau_b) = \chi_{min}^2 + 1, \quad (6.1)$$

es equivalente a encontrar los ceros de la función $g(\tau) = \chi_r^2(\tau) - (\chi_{min}^2 + 1)$. En `ajuste16` los ceros (raíces) de $g(\tau)$ se buscan con la rutina `rtbis` explicada en la referencia [23]. El valor central de la medida de τ y las incertidumbres superior e inferior son escritos en la salida estándar, en la forma ilustrada por el siguiente ejemplo:

```
t a u:   0.210865   0.21
         + 0.022652  0.02
         - 0.0215914 0.02
```

Estas tres líneas son las últimas escritas por el programa en la salida estándar. En la primera línea, después de `t a u`: aparece el valor central de la medida, τ_0 , primero en la precisión por defecto de `cout` (6 cifras significativas) y luego redondeado de modo que su cifra menos significativa tiene el mismo orden de magnitud que la menor de las incertidumbres. En la segunda línea, después de `+`, aparece la incertidumbre superior, $\Delta\tau_b$, definida como

$$\Delta\tau_b = \tau_b - \tau_0, \quad (6.2)$$

primero en el formato por defecto de `cout` y luego redondeada a una sola cifra significativa. En la tercera línea, después de `-`, aparece la incertidumbre inferior, $\Delta\tau_a$, definida como

$$\Delta\tau_a = \tau_0 - \tau_a, \quad (6.3)$$

primero en el formato por defecto de `cout`, luego redondeada a una sola cifra significativa.

La rutina de minimización toma tres argumentos `ax`, `bx`, `cx`, caracterizados por cumplir las condiciones $f(\mathbf{ax}) > f(\mathbf{bx})$ y $f(\mathbf{cx}) > f(\mathbf{bx})$, donde $f()$ es la función a minimizar. Estas condiciones garantizan la existencia de al menos un mínimo local en el intervalo $(\mathbf{ax}, \mathbf{cx})$. Para la búsqueda de la tripla de números `ax`, `bx`, `cx`, que en este caso son vidas medias, se parte de dos valores τ_1 , τ_2 . Se calculan $\chi_r^2(\tau_1)$ y $\chi_r^2(\tau_2)$. Si $\chi_r^2(\tau_1) > \chi_r^2(\tau_2)$ (figura 6.11), se busca un valor τ_3 , $\tau_3 > \tau_2$, tal que $\chi_r^2(\tau_3) > \chi_r^2(\tau_2)$ (figura 6.12). En caso contrario, si $\chi_r^2(\tau_1) < \chi_r^2(\tau_2)$, se busca un valor τ_3 , $\tau_3 < \tau_1$, tal que $\chi_r^2(\tau_3) > \chi_r^2(\tau_1)$. `ajuste16` inicia la búsqueda de la tripla, por defecto, a partir de los valores $\tau_1 = 0.5$ ps y $\tau_2 = 1$ ps. Es posible determinar

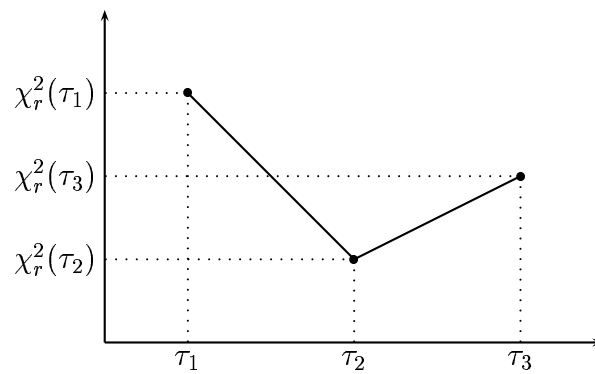


Figura 6.11: χ_r^2

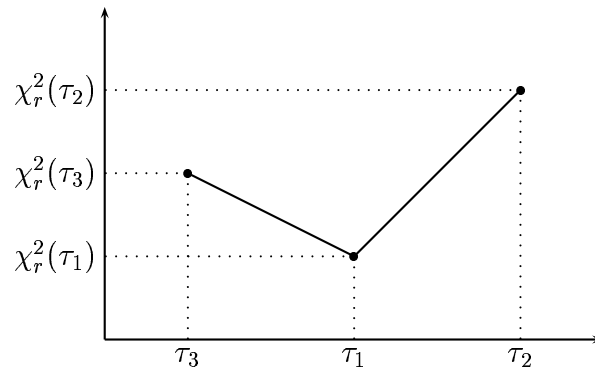


Figura 6.12: χ_r^2

externamente estos valores ejecutando el programa con la opción `-i, ajuste16 -i`. Al hacerlo, el programa, luego de leer los dos archivos de entrada, solicitará el valor de τ_1 escribiendo en la salida estándar la línea

Taus iniciales, ax:

luego solicitará el valor de τ_2 con el mensaje `bx: .` Esta opción es útil en caso de que los valores por defecto de τ_1 y τ_2 conduzcan al programa a realizar la búsqueda del mínimo en un intervalo de valores de τ en el que haya un mínimo local que no sea el mínimo absoluto de la curva $\chi_r^2(\tau)$ (figura 6.13) o en el que la curva $\chi_r^2(\tau)$ sea monótona decreciente.

La búsqueda de τ_3 , del mínimo de la curva $\chi_r^2(\tau)$ y de los extremos del intervalo de incertidumbre se hace en el intervalo (0.0001 ps, 1000 ps). Para valores de $\tau < 0.0001$ ps ó $\tau > 1000$ ps, la forma de línea, y por lo tanto $\chi_r^2(\tau)$, permanece prácticamente constante. Al estar los métodos de búsqueda de las cantidades mencionadas basados en la observación de las variaciones de $\chi^2(\tau)$, la aplicación de éstos, fuera de (0.0001 ps, 1000 ps), no tiene sentido.

`ajuste16` escribe todos los valores de $\chi_r^2(\tau)$ calculados en el proceso de búsqueda de τ_0 , τ_a y τ_b , en el archivo `chisq12.dat`. En las gráficas 6.14 y 6.15 se muestra la gráfica de este archivo para los archivos de entrada `in_ajuste.dat` e `in_casc.dat` del directorio `~/83y/1fd1606`.

Los nombres de los dos archivos de entrada de `ajuste15` y `ajuste16` pueden escribirse en las variables de ambiente `IN_DAT` y `CASC_DAT`. Si estas variables están

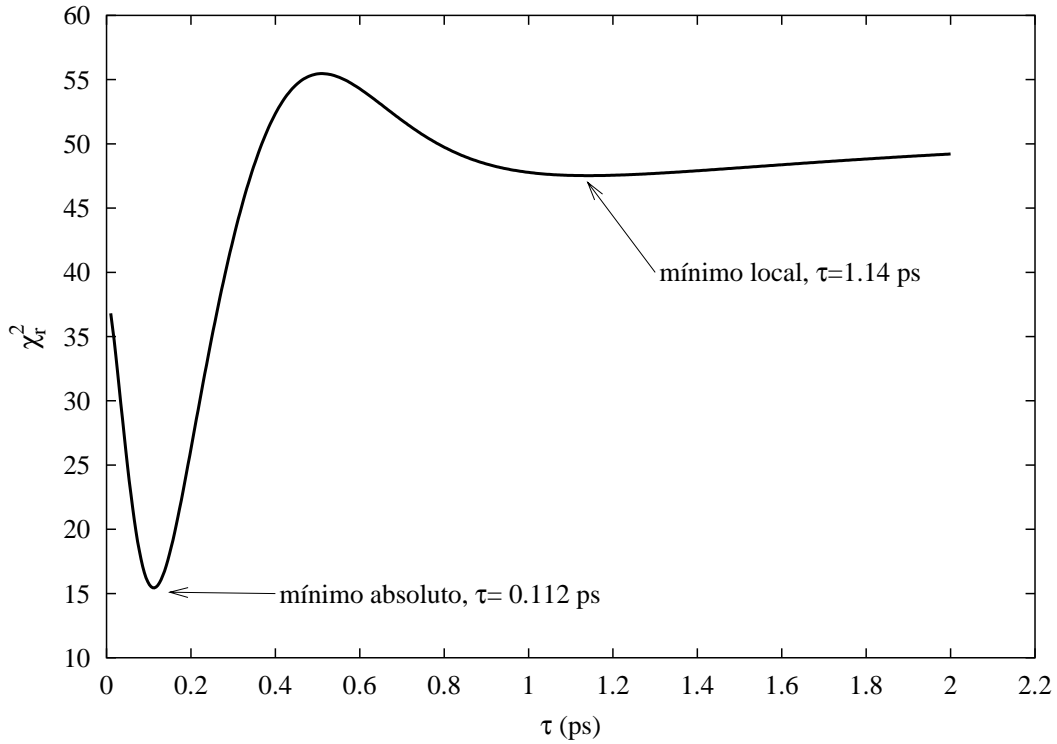


Figura 6.13: Curva de $\chi_r^2(\tau)$ generada con `ajuste15` para el conjunto de vidas medias $[0.01, 2]/500$. Nótese la presencia de dos mínimos. Se usaron los archivos `in_ajuste.dat` e `in_casc.dat` del directorio `/home/alejandro/83y/1fd1606`.

definidas, los programas no solicitan al usuario los archivos de entrada.

6.2.7 El programa auxiliar `no_h5`

El programa `no_h5` calcula la población en función del tiempo $N(t)$ y su función acumulativa $C_N(t)$, definida como

$$C_N(t) \equiv \int_0^t N(t_a) dt_a, \quad (6.4)$$

para todos los estados del patrón de poblamiento indicado en el archivo de entrada (en (6.4), $N(t_a)$ es la población normalizada de modo que el área bajo la curva es uno). Este archivo debe presentar el mismo formato que el segundo archivo de entrada de `ajuste15`, `in_casc*.dat`. Las poblaciones en función del tiempo son escritas en el archivo `pobla.dat` y las funciones acumulativas en `cum.dat`. El conocer las funciones $C_N(t)$ facilita el cálculo de la cantidad A_i en el paso 2 del algoritmo de la página 23.

Este programa permite además la posibilidad de cambiar el valor de la vida media del último estado, τ_n , de aquel indicado en el archivo a otros especificados por la entrada estándar. Las poblaciones calculadas para cada uno de los nuevos valores de τ_n se escriben `var_tau.dat`. `no_h5` calcula las poblaciones mediante un

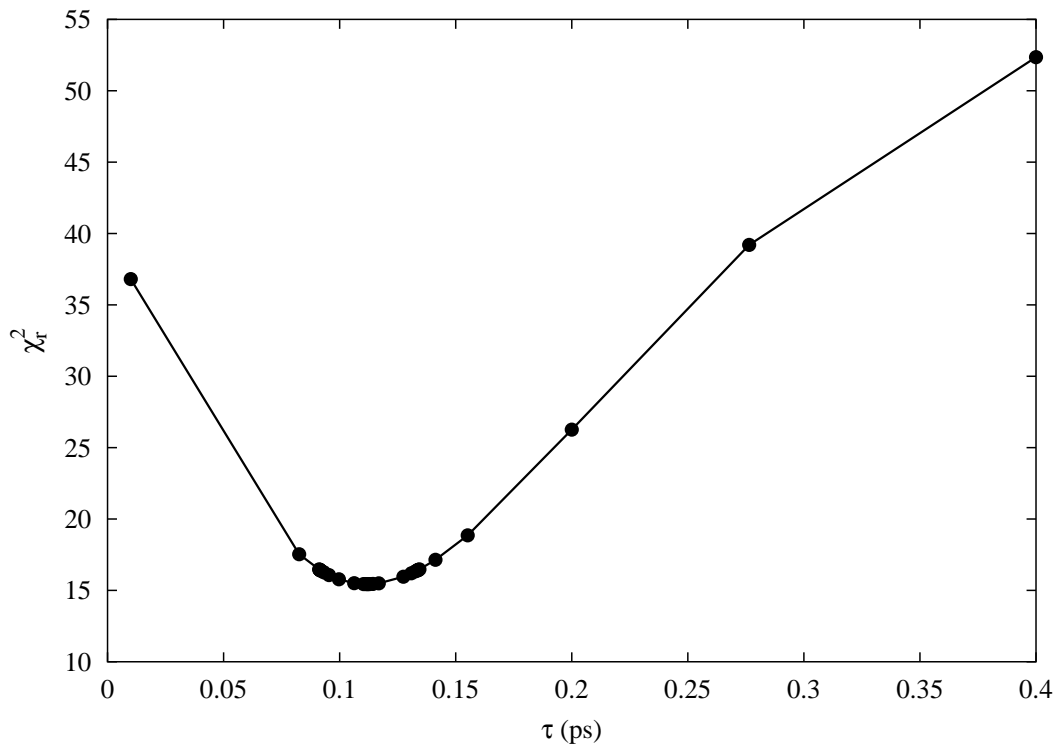


Figura 6.14: Gráfica del archivo `chisq12.dat`, generado por `ajuste16 -i, ax= 0.01, bx= 0.4`. Se usaron los archivos `in_ajuste.dat` e `in_casc.dat` del directorio `/home/alejandro/83y/1fd1606`.

objeto de clase `Pobla6`, la misma que usan `ajuste15` y `ajuste16`, en consecuencia, los resultados obtenidos con `no_h5` son iguales a los calculados internamente en `ajuste15` y `ajuste16`.

Las poblaciones en el tiempo de los estados del patrón de poblamiento del archivo mostrado en la figura 6.9 se ilustran en la figura 6.16. Las funciones cumulativas de estas poblaciones se muestran en la figura 6.17.

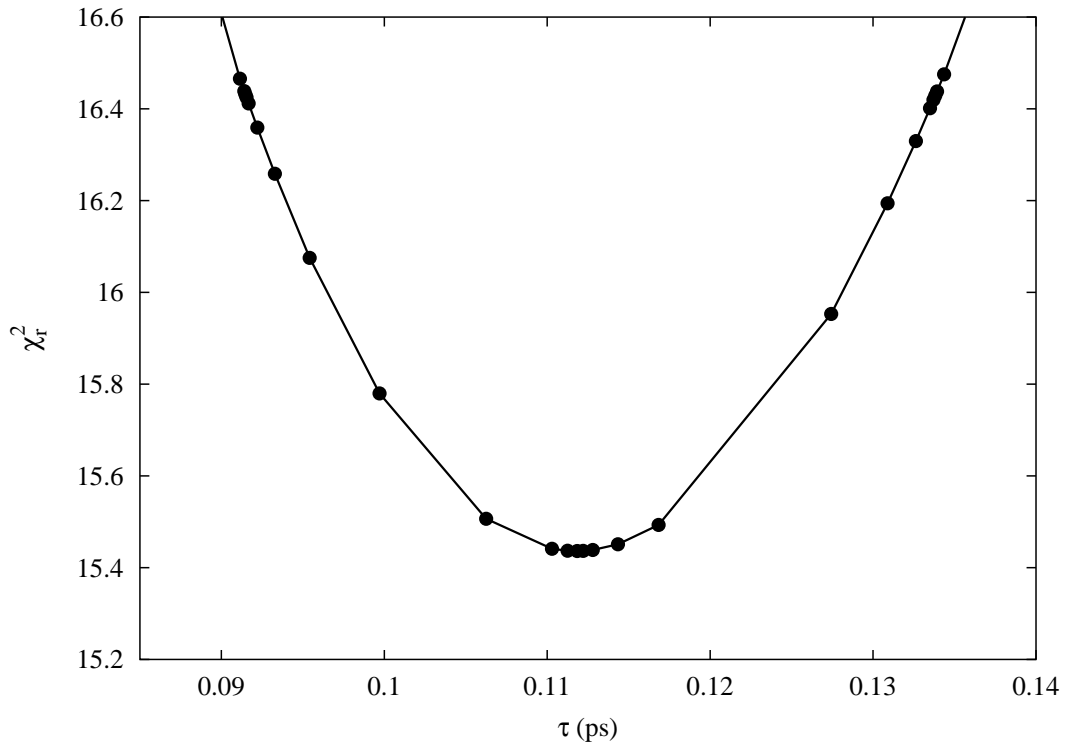


Figura 6.15: Ampliación de la figura 6.14 en el rango 0.85 a 0.12 ps. Nótese la acumulación de puntos en las regiones donde $\chi_r^2(\tau) = \chi_{min}^2$ y $\chi_r^2(\tau) = \chi_{min}^2 + 1$, como consecuencia de la acotación de τ_0 , τ_a y τ_b en intervalos de longitud cada vez menor.

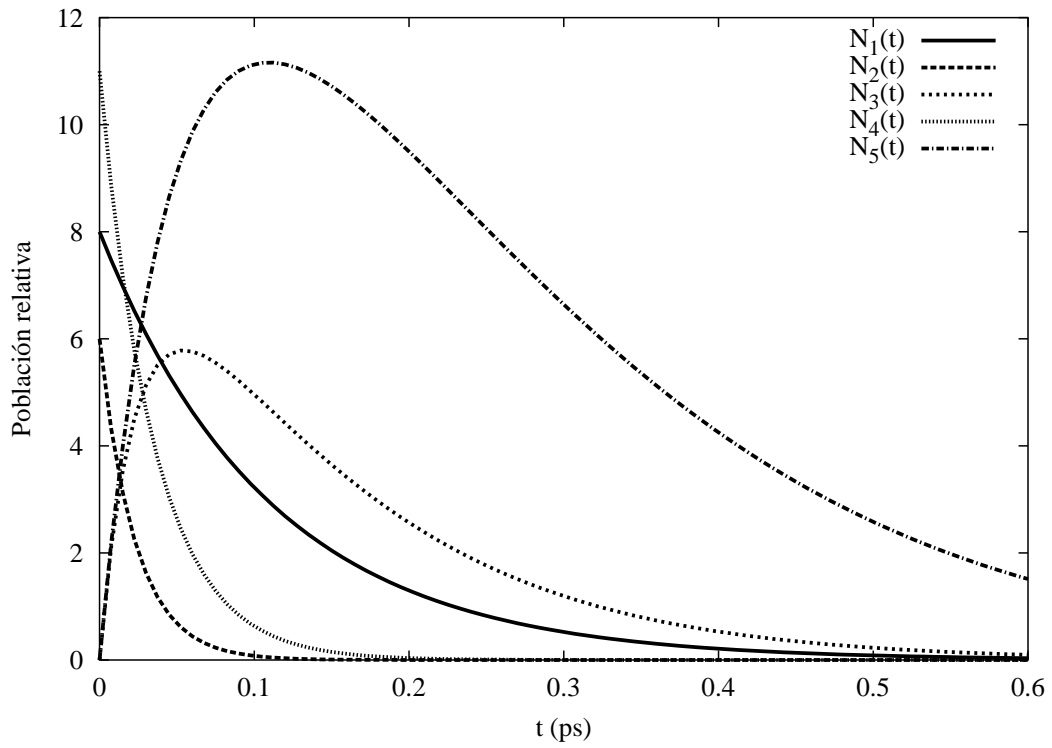


Figura 6.16: Poblaciones en función del tiempo $N(t)$ para los estados del patrón de poblamiento representado por el archivo de la figura 6.9.

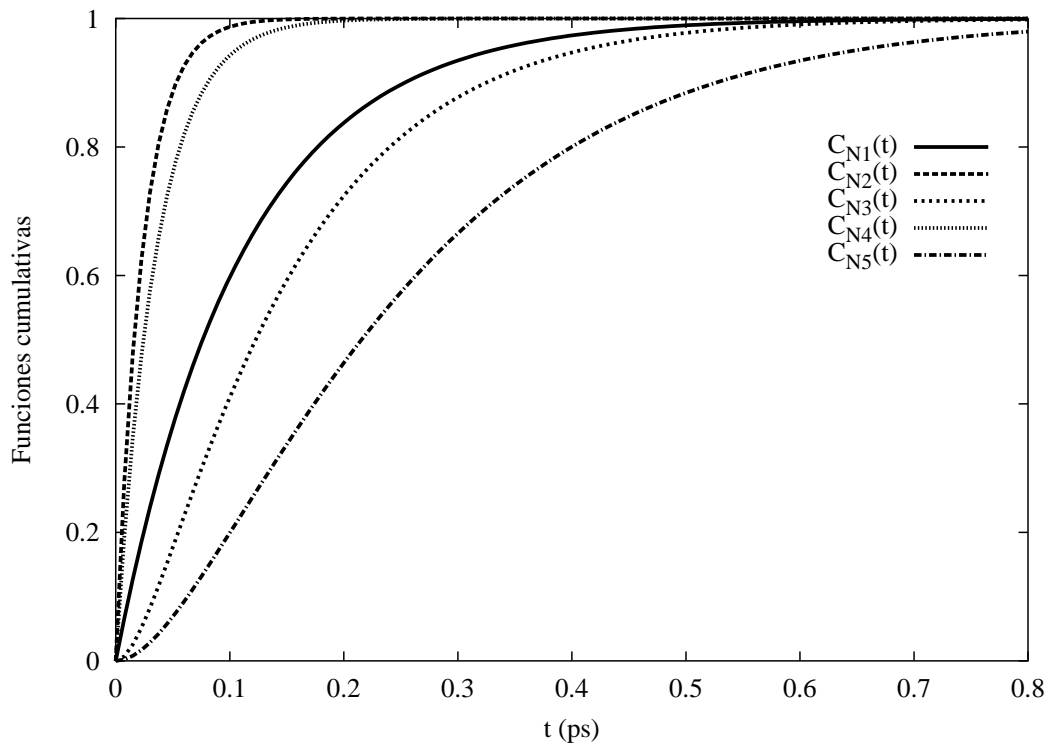


Figura 6.17: Funciones cumulativas en función del tiempo $C_N(t)$ para los estados del patrón de poblamiento representado por el archivo de la figura 6.9.

Capítulo 7

Un caso de estudio

7.1 Medición de las vidas medias de los estados de la banda principal del ^{83}Y

Se usó el programa `ajuste16` para medir las vidas medias de los estados de la banda principal (yrast (+,+)) del ^{83}Y [25] y se compararon los resultados con aquellos hallados mediante el programa `fits`, reportados en la referencia [6]. El diagrama de niveles del ^{83}Y se indica en la figura 7.1. El diagrama de decaimiento de los estados estudiados se muestra en la figura 7.2. En la figura 7.3 se muestran las poblaciones iniciales de los estados. En la tabla 7.1 se reportan las vidas medias halladas con `ajuste16`, τ_a y con `fits`, τ_b . Como regla general, las diferencias entre τ_a y τ_b están dentro de los intervalos de incertidumbre y las incertidumbres encontradas con uno y otro programa son en la mayoría de casos iguales o del mismo orden de magnitud. Es decir, los resultados de `ajuste16` y `fits` son similares. Debe recordarse que esta coincidencia se debe a que el modelo bajo el cual se calculó $f_\beta(\beta_k, t)$ es el mismo que usa `fits` para simular el frenado de los núcleos residuales. En la figura 7.4 se muestran las curvas de $\chi_r^2(\tau)$ obtenidas con `ajuste15` y `fits` en el proceso de ajuste de la forma de línea de la transición de 1966 keV.

En las figuras 7.5 a 7.12 se muestran las formas de línea experimentales y las formas de línea generadas con `fits` y `ajuste16` que producen el mejor ajuste, para todas las transiciones mostradas en la tabla 7.1. En todas ellas se observa la similitud entre las formas de línea generadas por `ajuste16` y aquellas generadas por `fits`.

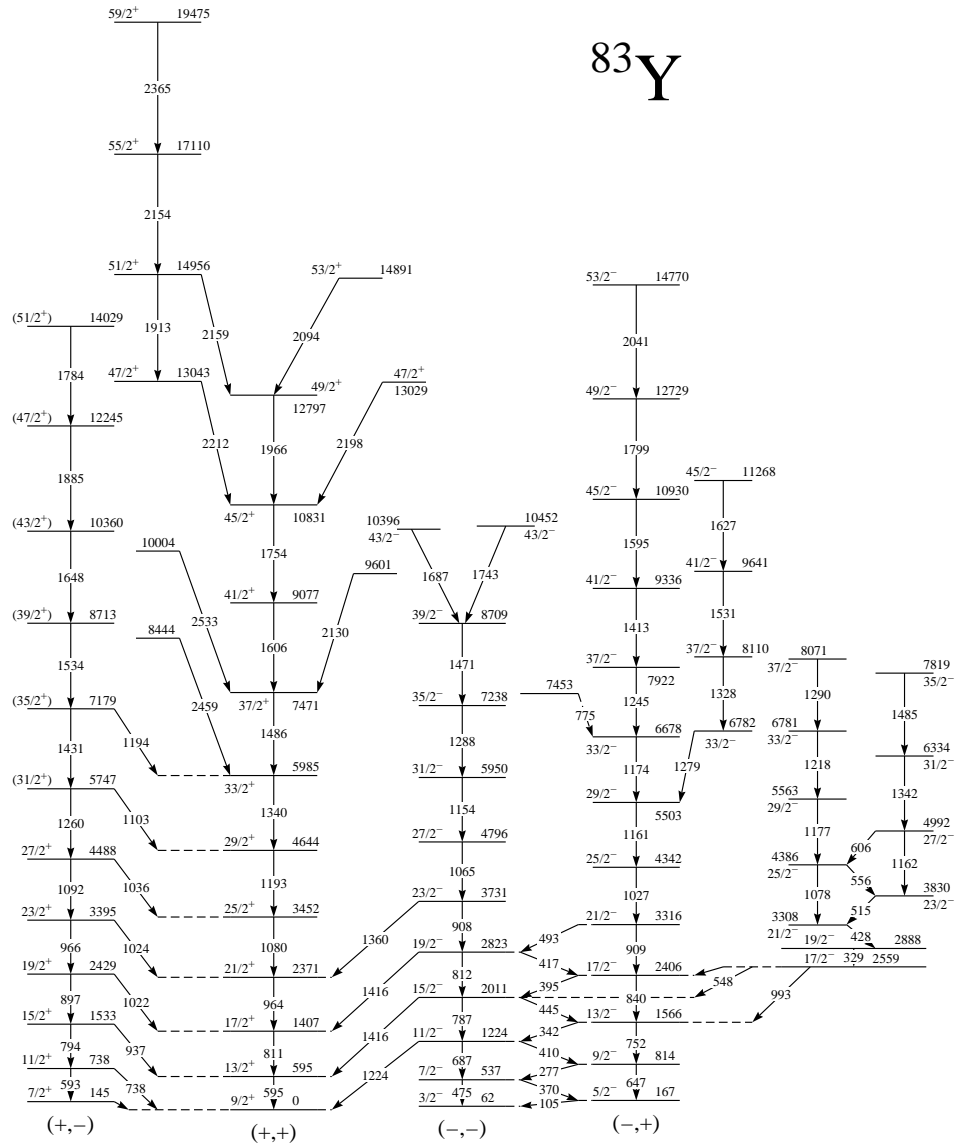


Figura 7.1: Diagrama de niveles de energía parcial del ^{83}Y [25]. Energías en keV y espines en \hbar . Nótese en la parte inferior de las bandas la identificación por paridad y signatura. El primer signo entre paréntesis indica la paridad, el segundo la signatura. Así, (+, -) está asignado a una banda de paridad $\pi = +1$ y signatura $\alpha = -1/2$ [6].

^{83}Y

(+,+)

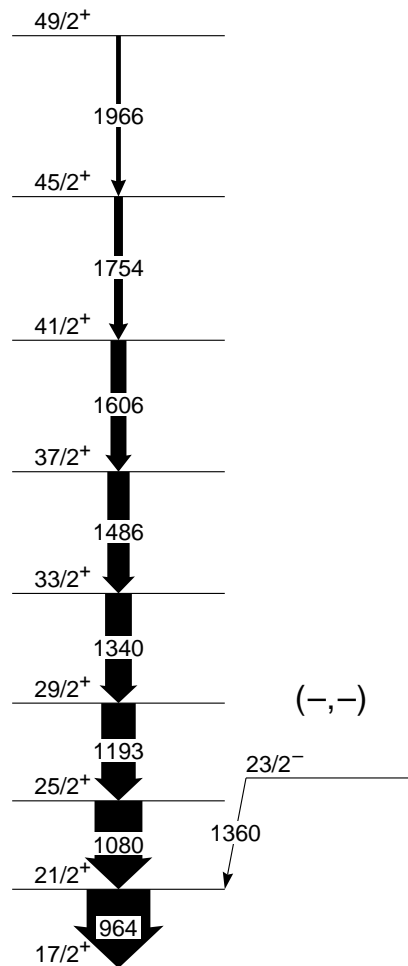


Figura 7.2: Diagrama de decaimiento de la banda principal del ^{83}Y . El ancho de las flechas es proporcional a la intensidad de la transición.

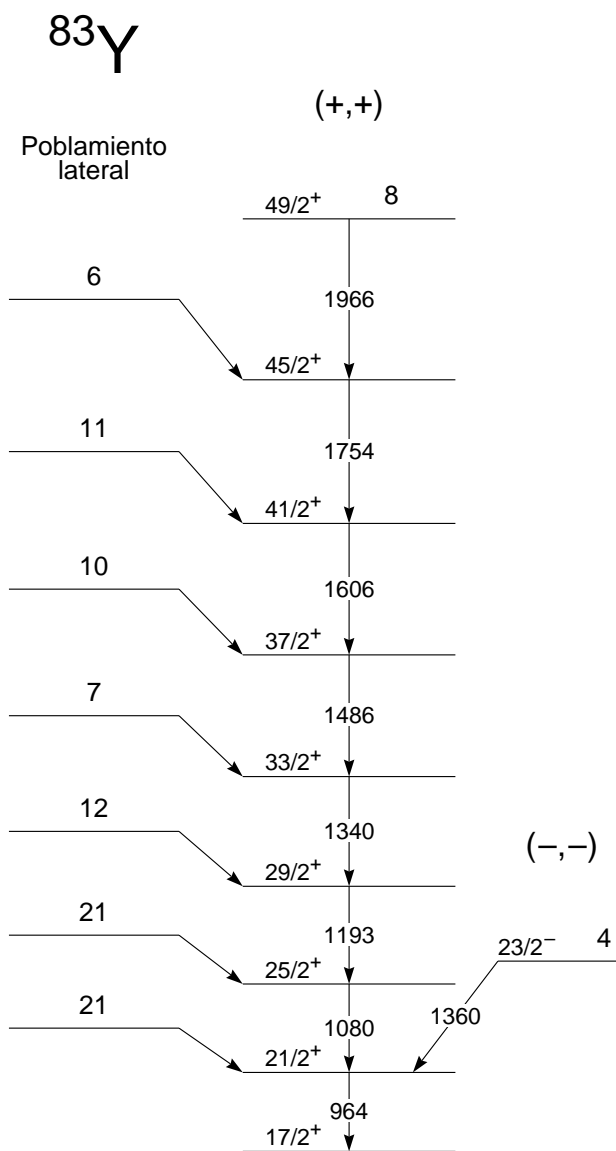


Figura 7.3: Distribución de las poblaciones iniciales.

E_γ (keV)	I_i^π (\hbar)	I_f^π (\hbar)	τ_{SF} (ps)	τ_f (ps)	τ_a (ps)
964	21/2 ⁺	17/2 ⁺	0.77	0.72 ^(0.08) _(0.07)	0.71 ^(0.07) _(0.07)
1080	25/2 ⁺	21/2 ⁺	0.43	0.44 ^(0.04) _(0.05)	0.44 ^(0.05) _(0.04)
1193	29/2 ⁺	25/2 ⁺	0.26	0.28 ^(0.02) _(0.02)	0.29 ^(0.02) _(0.02)
1340	33/2 ⁺	29/2 ⁺	0.12	0.22 ^(0.02) _(0.02)	0.21 ^(0.02) _(0.02)
1486	37/2 ⁺	33/2 ⁺	0.07	0.09 ^(0.02) _(0.02)	0.10 ^(0.02) _(0.02)
1606	41/2 ⁺	37/2 ⁺	0.035	0.15 ^(0.02) _(0.02)	0.16 ^(0.02) _(0.02)
1754	45/2 ⁺	41/2 ⁺	0.023	0.08 ^(0.02) _(0.02)	0.08 ^(0.02) _(0.02)
1966	49/2 ⁺	45/2 ⁺	—	0.10 ^(0.02) _(0.02)	0.11 ^(0.02) _(0.02)

Tabla 7.1: Vidas medias de los estados de la banda principal del ^{83}Y medidos con `ajuste` y con `fits` [6]. Para conocer el método de cálculo de los tiempos de poblamiento lateral τ_{SF} ver la referencia [6].

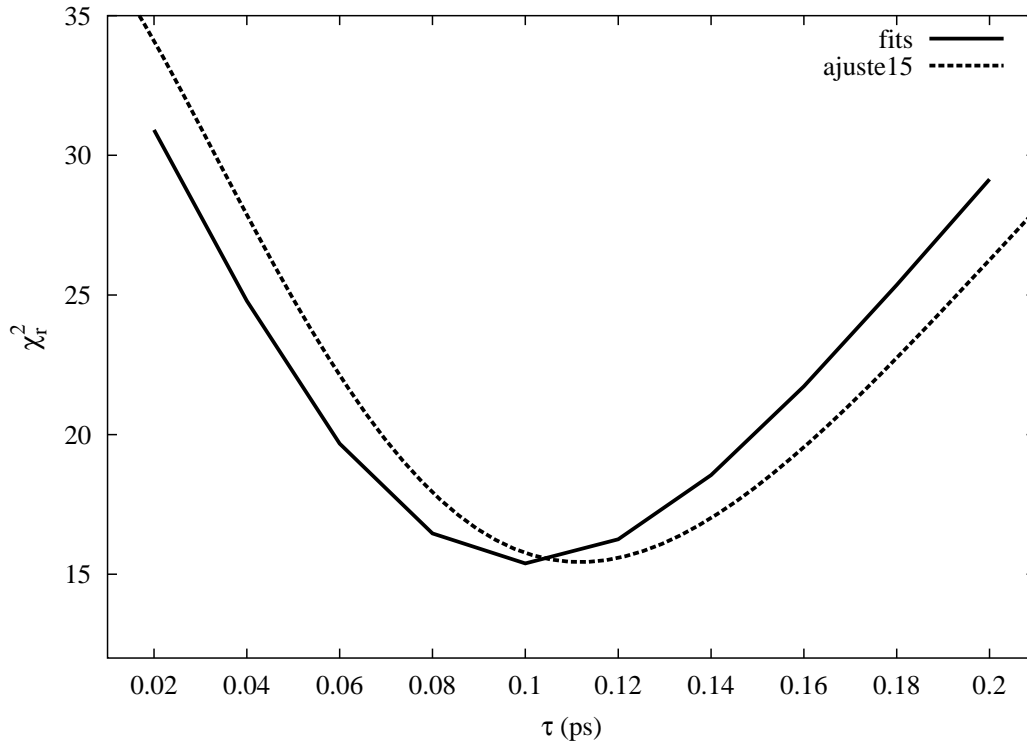


Figura 7.4: Curvas de χ_r^2 en función de τ generadas por `fits` y `ajuste15` en el proceso de ajuste de la forma de línea de la transición de 1966 keV.

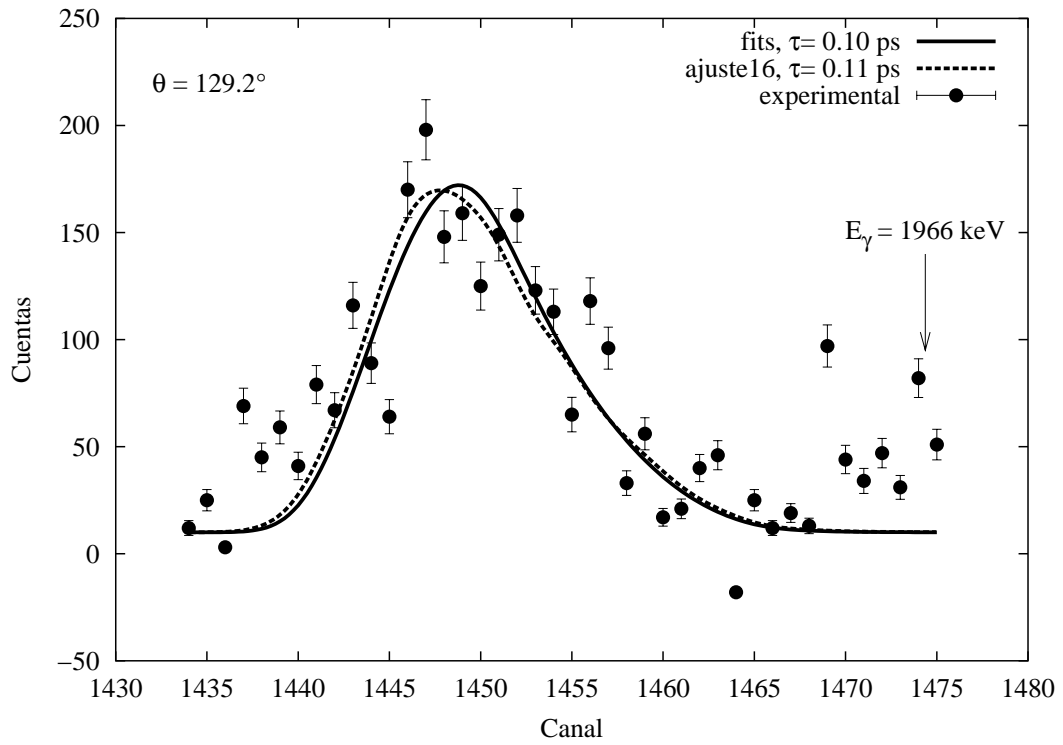


Figura 7.5: Forma de línea experimental de la transición de 1966 keV, $49/2^+ \rightarrow 45/2^+$, y formas de línea que producen el mejor ajuste, generadas por `ajuste16` y `fits`. La calibración del espectro es 1.333 keV/canal.

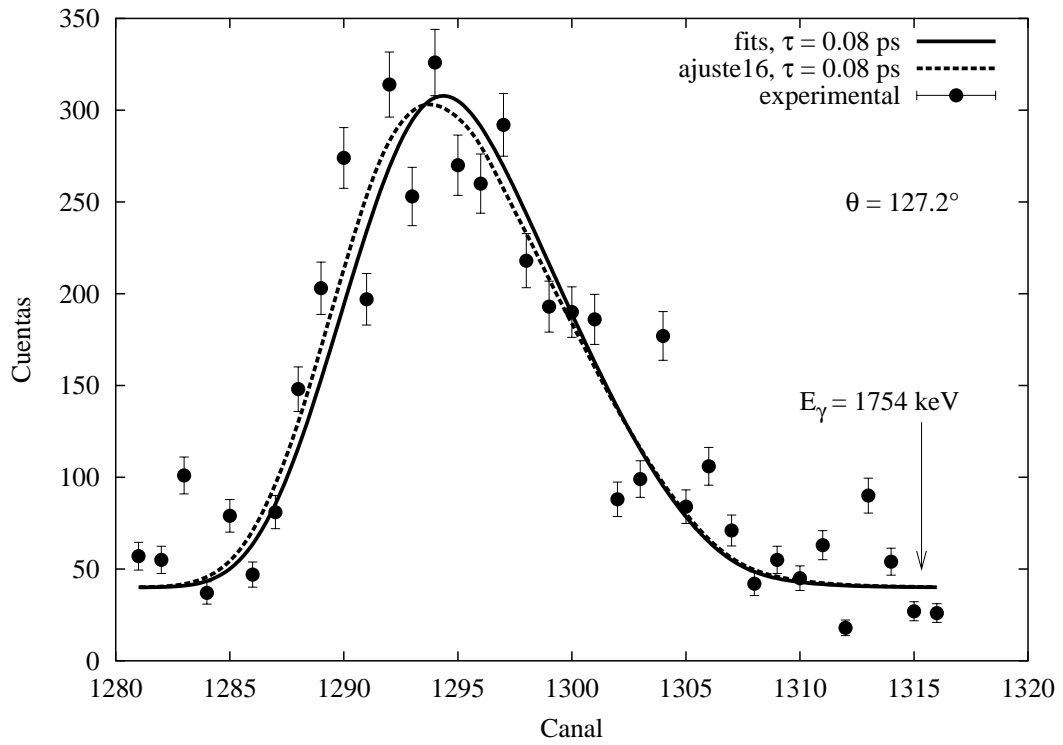


Figura 7.6: Forma de línea experimental de la transición de 1754 keV, $45/2^+ \rightarrow 41/2^+$, y formas de línea que producen el mejor ajuste, generadas por `ajuste16` y `fits`. La calibración del espectro es 1.333 keV/canal.

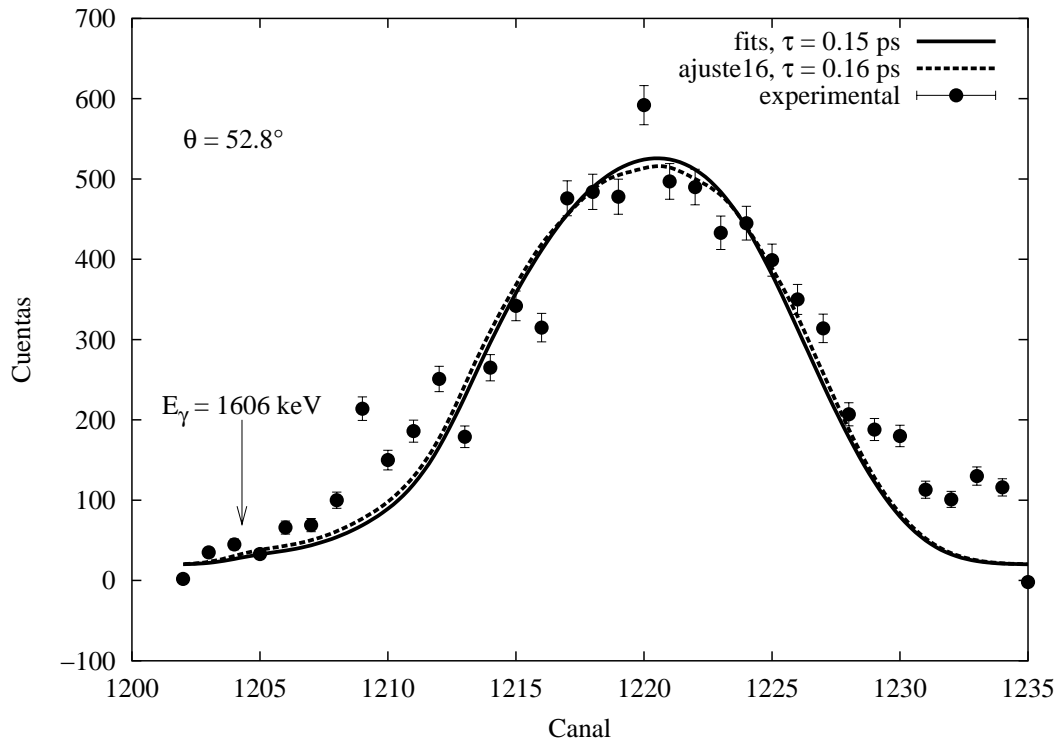


Figura 7.7: Forma de línea experimental de la transición de 1606 keV, $41/2^+ \rightarrow 37/2^+$, y formas de línea que producen el mejor ajuste, generadas por `ajuste16` y `fits`. La calibración del espectro es 1.333 keV/canal.

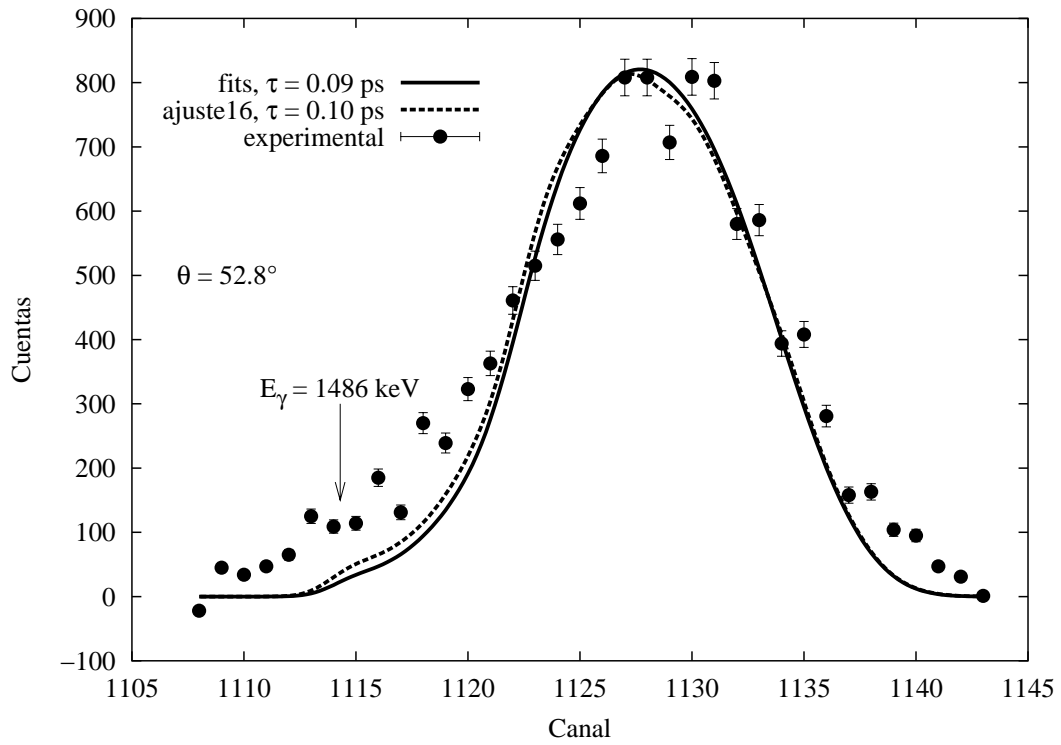


Figura 7.8: Forma de línea experimental de la transición de 1486 keV, $37/2^+ \rightarrow 33/2^+$, y formas de línea que producen el mejor ajuste, generadas por `ajuste16` y `fits`. La calibración del espectro es 1.333 keV/canal.

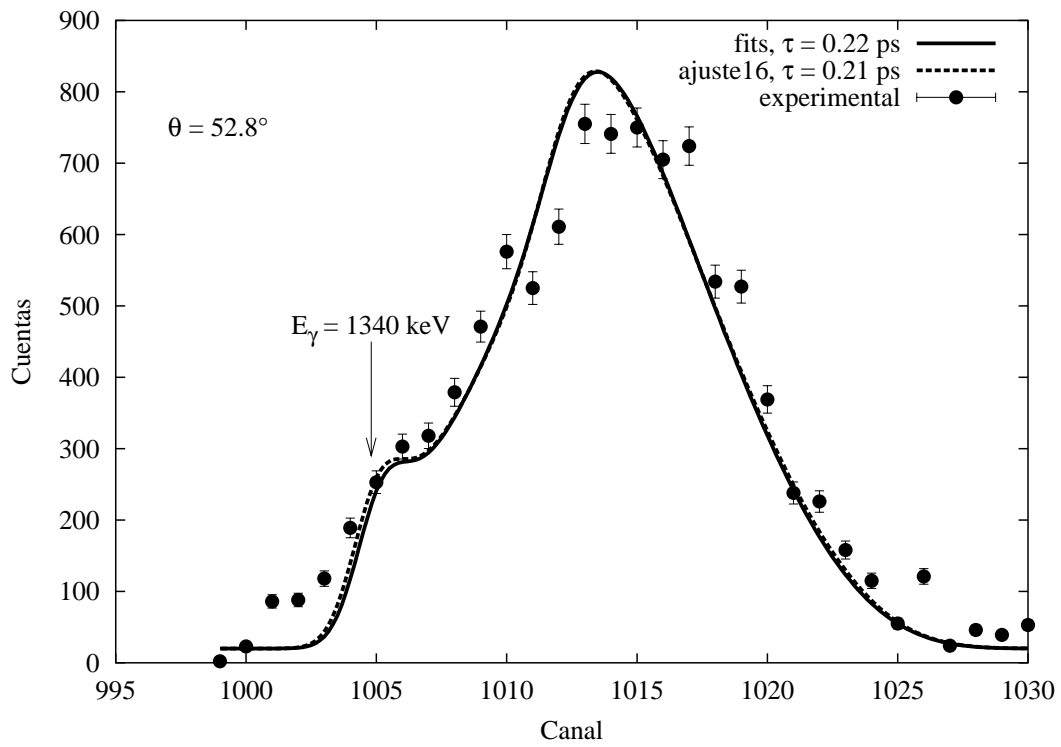


Figura 7.9: Forma de línea experimental de la transición de 1340 keV, $33/2^+ \rightarrow 29/2^+$, y formas de línea que producen el mejor ajuste, generadas por `ajuste16` y `fits`. La calibración del espectro es 1.333 keV/canal.

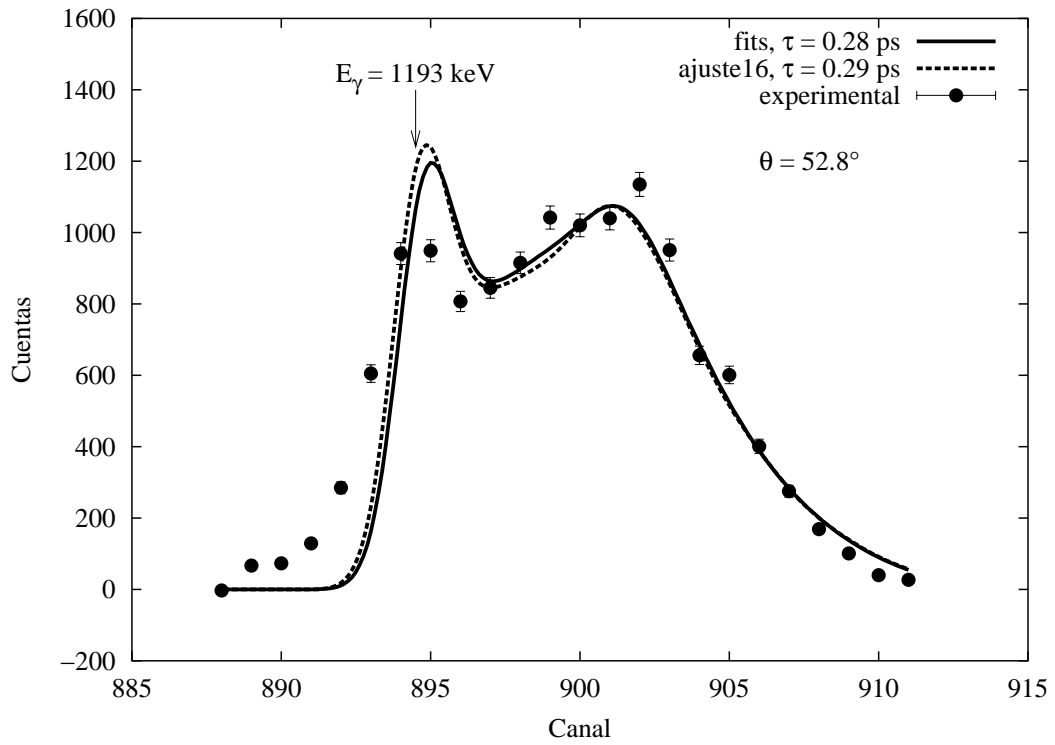


Figura 7.10: Forma de línea experimental de la transición de 1193 keV, $29/2^+ \rightarrow 25/2^+$, y formas de línea que producen el mejor ajuste, generadas por `ajuste16` y `fits`. La calibración del espectro es 1.333 keV/canal.

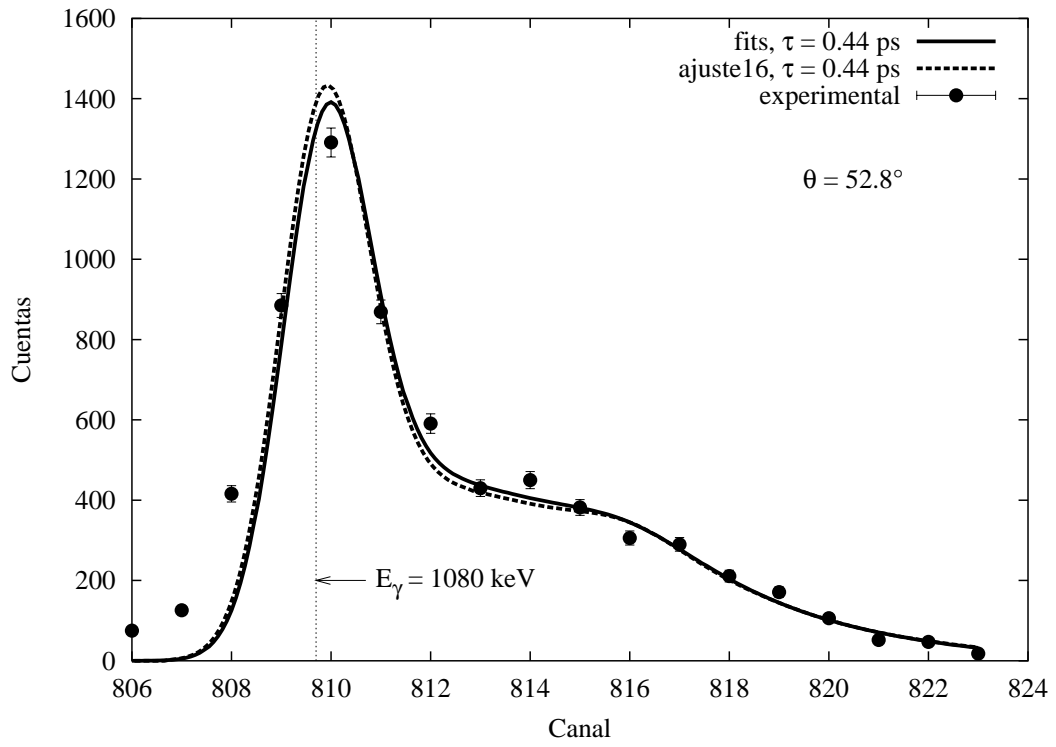


Figura 7.11: Forma de línea experimental de la transición de 1080 keV, $25/2^+ \rightarrow 21/2^+$, y formas de línea que producen el mejor ajuste, generadas por `ajuste16` y `fits`. La calibración del espectro es 1.333 keV/canal.

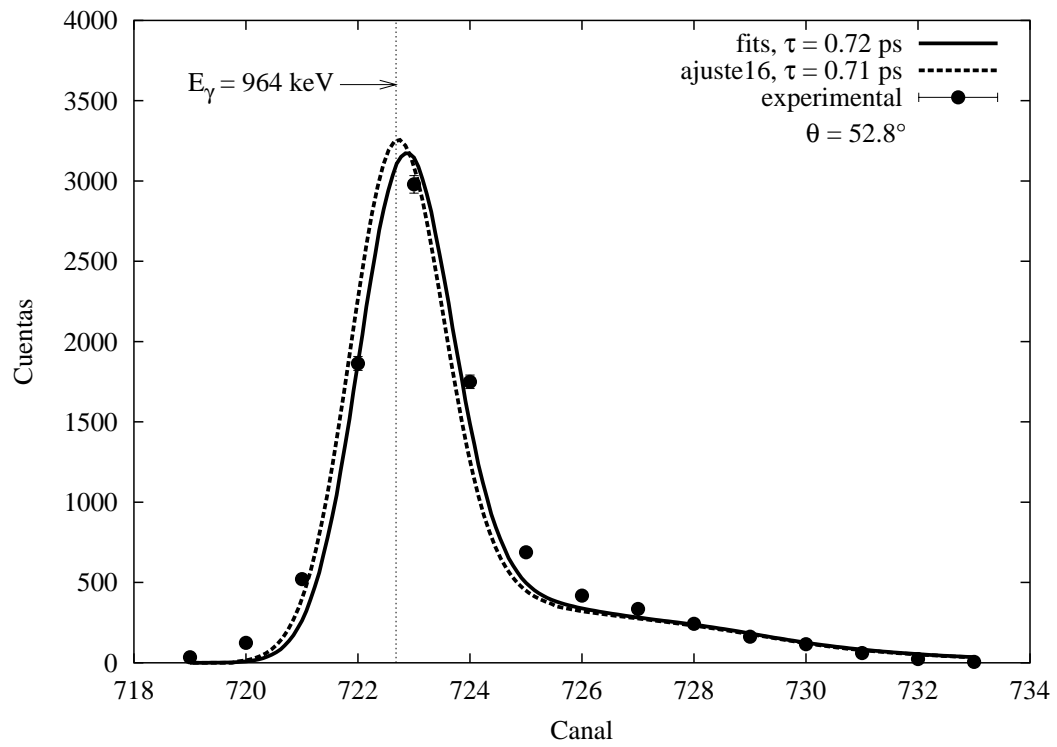


Figura 7.12: Forma de línea experimental de la transición de 964 keV, $21/2^+ \rightarrow 17/2^+$, y formas de línea que producen el mejor ajuste, generadas por `ajuste16` y `fits`. La calibración del espectro es 1.333 keV/canal.

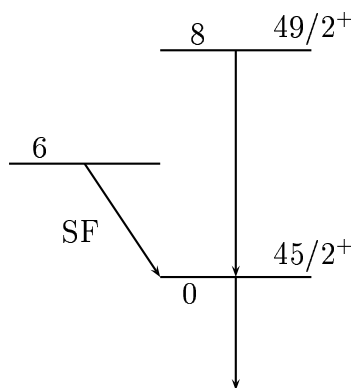


Figura 7.13: Poblamiento lateral por un estado. Los números enteros al lado de las líneas horizontales que representan los estados son las poblaciones iniciales relativas. La vida media del estado de poblamiento lateral es $\tau_{SF} = 0.023$ ps.

7.2 Ensayo de alternativas en el modelamiento del poblamiento lateral

El poblamiento por estados del continuo usualmente es modelado por el poblamiento desde un único estado discreto con vida media τ_{SF} . Esta aproximación se ilustra en la figura 7.13 para el estado de momento angular $45/2^+$ que decae a través de la transición de 1754 keV. En las figuras 7.14 a 7.16 se muestran otras formas de modelar el poblamiento lateral. Los resultados obtenidos con cada patrón de poblamiento se muestran en la tabla 7.2. Conviene resaltar el resultado encontrado para la simulación del poblamiento lateral con una cascada de tres estados (figura 7.15). En ésta, se dio a cada estado de la cascada una vida media aproximadamente igual a $1/3$ de τ_{SF} . El hecho de que para este patrón de poblamiento no se haya encontrado un mínimo en la curva $\chi_r^2(\tau)$, prueba que una cascada no puede ser reemplazada por un único estado cuya vida media sea la suma de las vidas medias de los estados de la cascada, como a veces se supone. Los resultados mostrados aquí sólo pretenden llamar la atención sobre la necesidad de estudiar los efectos de un modelamiento del poblamiento desde el continuo, más detallado que el poblamiento desde un único estado discreto.

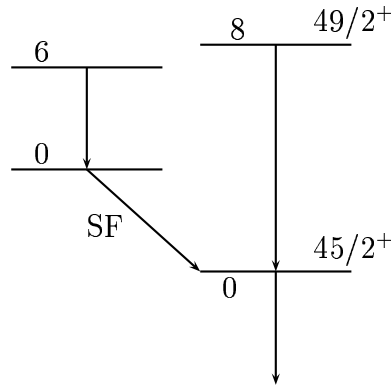


Figura 7.14: Poblamiento lateral por una cascada de dos estados. Los números enteros al lado de las líneas horizontales que representan los estados son las poblaciones iniciales relativas. Las vidas medias de los estados de la cascada de poblamiento lateral son, en orden descendiente sobre la cascada, $\tau_{SF1} = 0.0114$ ps y $\tau_{SF2} = 0.01164$ ps. Nótese que $\tau_{SF_i} \simeq \tau_{SF}/2$, con $i = 1, 2$.

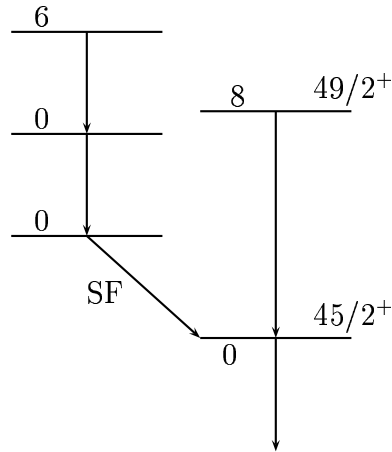


Figura 7.15: Poblamiento lateral por una cascada de tres estados. Los números enteros al lado de las líneas horizontales que representan los estados son las poblaciones iniciales relativas. Las vidas medias de los estados de la cascada de poblamiento lateral son, en orden descendiente sobre la cascada, $\tau_{SF1} = 0.007665$ ps, $\tau_{SF2} = 0.007666$ ps, $\tau_{SF3} = 0.007667$ ps. Nótese que $\tau_{SF_i} \simeq \tau_{SF}/3$.

Figura	τ (ps)
7.13	0.08 $\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{pmatrix}$
7.14	0.08 $\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{pmatrix}$
7.15	—
7.16	0.10 $\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{pmatrix}$

Tabla 7.2: Vidas medias halladas para el estado $45/2+$ de la banda principal del ^{83}Y , con diferentes modelamientos del poblamiento lateral. Para el patrón de poblamiento de la figura 7.15 (cascada de 3 estados) no se encontró mínimo en la curva de $\chi_r^2(\tau)$.

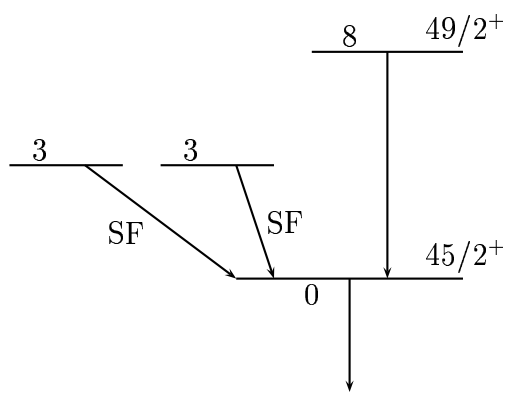


Figura 7.16: Poblamiento lateral por dos estados. Los números enteros al lado de las líneas horizontales que representan los estados son las poblaciones iniciales relativas. Las vidas medias de los estados de poblamiento lateral son $\tau_{SF1} = 0.0115$ ps y $\tau_{SF2} = 0.0345$ ps. Nótese que $(\tau_{SF1} + \tau_{SF2})/2 = \tau_{SF}$.

Capítulo 8

Comparación de los programas ajuste16 y ajuste15 con fits

- Los programas `ajuste15` y `ajuste16` (programas `ajuste`) son más eficientes en el cálculo de formas de línea que el programa `fits`. Esto se debe a que el programa `fits` en cada ejecución repite la simulación del frenado, mientras que los programas `ajuste` al leer un archivo con la distribución $f_{\beta}(\beta_k, t)$, evitan esta repetición.
- En cada ejecución, el programa `fits` sólo permite calcular las formas de línea correspondientes a 10 valores de la vida media. Razón por la cual es necesario ejecutarlo varias veces, editando cada vez uno de los archivos de entrada, para construir una curva de $\chi_r^2(\tau)$. Además esta curva debe ser ajustada con una parábola mediante un programa auxiliar para determinar el valor central de la medida de la vida media y el intervalo de incertidumbre. Estas circunstancias hacen de la operación de `fits` una labor fatigante. Por otra parte, `ajuste16` construye una curva de $\chi_r^2(\tau)$ por sí mismo, encuentra el mínimo de la curva, halla los extremos de intervalo de incertidumbre y entrega estos valores redondeados en una sola ejecución. Si hay dudas acerca de si el mínimo hallado por `ajuste16` es un mínimo local o el mínimo absoluto, se puede ejecutar `ajuste15` para calcular la curva $\chi_r^2(\tau)$ en todo el rango de aplicabilidad del método DSA.
- El programa `fits` simula el frenado de los núcleos de acuerdo con un modelo fijo. Los programas `ajuste` delegan la tarea de simulación del frenado al programa encargado de generar la distribución $f_{\beta}(\beta_k, t)$. En este trabajo se presentó el programa `stopping9` que calcula $f_{\beta}(\beta_k, t)$ con base en el mismo modelo usado por `fits`. No obstante, el cálculo de $f_{\beta}(\beta_k, t)$ puede efectuarse con un programa que implemente un modelo más detallado del frenado. Que considere dispersión en dirección de las velocidades iniciales por la evaporación de partículas y el frenado dentro de la película de material blanco, dispersión en la dirección de las velocidades por colisiones con los iones del sustrato y detectores de forma distinta la cilíndrica. Es decir, los programas `ajuste` al

estar concebidos para una metodología de trabajo que considera al cálculo de $f_{\beta}(\beta_k, t)$ como una tarea separada, son adaptables a cualquier modelo sobre el frenado de los núcleos y a cualquier geometría de los detectores.

- En los algoritmos de `fits` la simulación de los procesos de frenado, decaimiento y detección se encuentran íntimamente entrelazados. En los programas `ajuste`, cada uno de estos procesos se concibe como un módulo separado que interactúa con los demás módulos, en sectores específicos. Esta concepción de los programas coincide con la filosofía de la programación orientada a objetos [24]. Por tal razón, los programas han sido escritos en lenguaje de programación C++. Este lenguaje facilita la comprensión y modificación de los programas. En él, es posible modificar segmentos específicos del programa sin afectar su estructura global. Esto es un hecho clave en el campo de la programación científica en el cual los programas no pueden ser vistos como productos acabados sino que están sujetos a desarrollo permanente por parte de una comunidad de investigadores. Por su parte `fits` está escrito en lenguaje FORTRAN y las deficiencias de este lenguaje en términos de programación estructurada son bien conocidas.

Capítulo 9

Perspectivas

- Escritura de un programa que calcule $f_\beta(\beta_k, t)$, con base en un modelo sobre el frenado más completo que el presentado en este trabajo. Este modelo puede incluir, por ejemplo, la dispersión de las velocidades iniciales por la evaporación de partículas, el efecto del ancho finito de la película de material blanco, la dispersión de la velocidad de los núcleos residuales por colisiones con los iones del sustrato. Esta tarea debe estar acompañada por una revisión bibliográfica sobre la validez de los diferentes modelos para el cálculo del poder de frenado. Como punto de partida en esta revisión se pueden tomar las referencias [26] y [22]. En el experimento de la referencia [6], además del arreglo de detectores de rayos gamma Gammasphere se usó el arreglo de detectores de partículas *Microball*. Con los datos colectados por este arreglo de detectores se puede conocer el momento lineal de las partículas evaporadas y con esta información ha de ser posible hallar la dispersión de las velocidades iniciales de los núcleos residuales.
- Estudio de los efectos de un modelamiento más detallado del poblamiento por estados del continuo.
- La aplicabilidad del criterio $\chi_{min}^2 + 1$ está basado en la suposición de la *linealidad aproximada* del ajuste de la forma de línea experimental [14]. Es necesario estudiar la validez de esta aproximación. También se requiere el establecimiento de un criterio para la determinación de la varianza del número de cuentas en cada canal experimental σ_i , cuando los espectros resultan de la resta de dos espectros, pues es claro que en estos casos, las cuentas en los canales del espectro resultante no presentan una distribución de Poisson. También debe discutirse cómo encaja la resta del fondo en la forma de línea en la determinación de σ_i .
- Escritura de un objeto que calcule las poblaciones de los estados $N(t)$ en el caso en que haya estados con vidas medias iguales en el patrón de poblamiento.
- Los programas `ajuste` escriben cuatro archivos para cada uno de los valores de la vida media para los que genera formas de línea. Esta interacción con el disco duro disminuye su eficiencia. Un mejoramiento de los programas

ajuste puede consistir en reemplazar la escritura de estos archivos por el almacenamiento de los datos en un sector de la memoria RAM en el que puedan ser accedidos por un programa graficador. La observación de las formas de línea con este programa serviría para decidir cuáles de ellas serían almacenadas permanentemente en el disco duro.

- El sector del espectro con la forma de línea a ajustar es entregado a los programas **ajuste** en un archivo en formato ascii. Debe escribirse un objeto que le permita a **ajuste** acceder a la forma de línea directamente en el espectro en formato binario.
- Algunas de las funciones que hacen parte de los programas escritos en este trabajo, tienen un rango de aplicabilidad amplio. Por esta razón, para la instalación de los programas, se ubicaron en un directorio separado, llamado **bibliotecas**. Se sugiere el intercambio de información respecto a las tareas de programación elementales más frecuentes, por parte de los miembros del Grupo de Física Nuclear que se encuentren desarrollando software. Un resultado posible de esta comunicación es la decisión de crear una biblioteca de funciones que satisfaga necesidades locales del grupo. Se propone la consideración de la inclusión de las funciones en el directorio **bibliotecas** en esta biblioteca local.
- El ciclo básico de operación de los programas **ajuste15** y **ajuste16** consiste esencialmente en dos tareas: calcular $f''(t)$ y luego aplicar a esta función la transformada integral (3.22) para obtener $f(\Delta E)$. Si se deconvolucionara la función de respuesta a impulso en la forma de línea experimental y se aplicara a ésta la transformada inversa de (3.22) podría obtenerse la distribución $f''(t)$ experimental. Llegar a esta función tendría como ventaja la reducción del ciclo de operación a una sola etapa: el cálculo teórico de $f''(t)$. Se sugiere la exploración de esta posibilidad.

Capítulo 10

Conclusiones

- Se escribieron dos programas, `ajuste15`, `ajuste16`, para la medición de vidas medias de estados nucleares por el método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler. Estos programas superan al programa `fits`, usado hasta la fecha por el grupo de Física Nuclear de la Universidad Nacional, en la eficiencia en la generación de las formas de línea y en la comodidad en su operación. Por otra parte, a diferencia de `fits`, pueden ser adaptados a cualquier modelo sobre el frenado de los núcleos y a cualquier geometría de los detectores.
- El programa `ajuste16` arroja resultados muy similares a los de `fits`, en cuanto a las formas de línea y a los valores medidos de las vidas medias, cuando se usa para la simulación del frenado de los núcleos residuales un modelo similar al empleado por `fits`.
- El lenguaje de programación C++ mostró ser apropiado para el manejo del proyecto de programación científica llevado a cabo en este trabajo. Este proyecto se caracterizó por ser extenso e involucrar la interacción de diferentes procesos.
- Se logró sintetizar la generación de las formas de línea en el método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler en una única ecuación (ecuación 3.22), en la que este proceso puede ser visto como una transformada integral que convierte una función en el dominio del tiempo, la población de los estados, en una función en el dominio del corrimiento, la forma de línea de la transición. El kernel de esta transformada está relacionado con la densidad de probabilidad de las velocidades como función del tiempo.
- Se escribió un programa, `stopping9`, para el cálculo de la distribución $f_{\beta}(\beta_k, t)$ que simula el frenado de los núcleos con base en el mismo modelo usado por `fits`.
- Se escribió un programa para el cálculo de la densidad de probabilidad del coseno del ángulo entre el vector de onda de los fotones y la dirección del haz, para detectores de forma cilíndrica.

Apéndice A

Cálculo analítico de la forma de línea $f(\Delta E)$ en un caso particular

Según el modelo reportado en la referencia [26, pag. 20], la velocidad de un núcleo que se propaga dentro de un material decae exponencialmente,

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau_v}, \quad (\text{A.1})$$

con τ_v dado (en picosegundos) por

$$\tau_v = \frac{A_1 A_2}{50.8 \delta f(Z_1, Z_2)} \quad (\text{A.2})$$

donde A_1 y A_2 son el número de masa del núcleo que se propaga y de los núcleos del material respectivamente, Z_1 y Z_2 son sus números atómicos, δ es la densidad del sólido (en g/cm^3) y

$$f(Z_1, Z_2) = \frac{Z_1 Z_2 \xi}{\left(Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3}\right)^{3/2}} \quad (\text{A.3})$$

con $\xi = Z_1^{1/6}$.

En este apéndice se mostrará que es posible hallar la forma de línea analíticamente, mediante la ecuación (3.6),

$$f(\Delta E) = \frac{f''(t)}{|d(\Delta E)/dt|}, \quad (\text{A.4})$$

cuando la velocidad está dada por (A.1) y la población del estado decae exponencialmente

$$f''(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (\text{A.5})$$

Con este propósito, todas las expresiones en el lado derecho de la ecuación (A.4) se deben escribir como funciones de ΔE .

Recuérdese que

$$\Delta E = E_\gamma \frac{v(t)}{c} \cos \theta. \quad (\text{A.6})$$

Al remplazar (A.1) en (A.6) se obtiene

$$\Delta E = \Delta E_M e^{-\lambda_v t} \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\Delta E_M = E_\gamma \frac{v_0}{c} \cos \theta \quad (\text{A.8})$$

y $\lambda_v \equiv 1/\tau_v$. A continuación se procede a calcular la derivada en el denominador de (A.4),

$$\left| \frac{d(\Delta E)}{dt} \right| = \lambda_v \Delta E_M e^{-\lambda_v t} \quad (\text{A.9})$$

$$= \lambda_v \Delta E \quad (\text{A.10})$$

Ahora se escribirá el numerador de (A.4) en términos de ΔE . Usando la notación $\lambda \equiv 1/\tau$, la ecuación (A.5) queda escrita como

$$f''(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (\text{A.11})$$

Despejando t de (A.7),

$$t = \frac{1}{\lambda_v} \ln \left(\frac{\Delta E_M}{\Delta E} \right) \quad (\text{A.12})$$

Al remplazar (A.12) en (A.11) se llega a

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lambda \exp \left(-\frac{\lambda}{\lambda_v} \ln \left(\frac{\Delta E_M}{\Delta E} \right) \right) \\ &= \lambda \left[\frac{\Delta E}{\Delta E_M} \right]^{\lambda/\lambda_v} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo (A.9) y (A.13) en (A.4) se tiene

$$f(\Delta E) = \frac{\lambda}{\lambda_v} \frac{1}{\Delta E} \left[\frac{\Delta E}{\Delta E_M} \right]^{\lambda/\lambda_v} \quad (\text{A.14})$$

o, en términos de los tiempos de decaimiento de la población y la velocidad

$$\boxed{f(\Delta E) = \frac{\tau_v}{\tau} \frac{1}{\Delta E} \left[\frac{\Delta E}{\Delta E_M} \right]^{\tau_v/\tau}}. \quad (\text{A.15})$$

La gráfica de la forma de línea (A.15) para los casos particulares,

$$\begin{aligned} \frac{\tau_v}{\tau} = \frac{5}{8}, & \quad f(\Delta E) \propto \frac{1}{\Delta E^{3/8}} \\ \frac{\tau_v}{\tau} = 1, & \quad f(\Delta E) \propto \text{constante} \\ \frac{\tau_v}{\tau} = 5, & \quad f(\Delta E) \propto \Delta E^4 \end{aligned}$$

se muestra en la figura A.1.

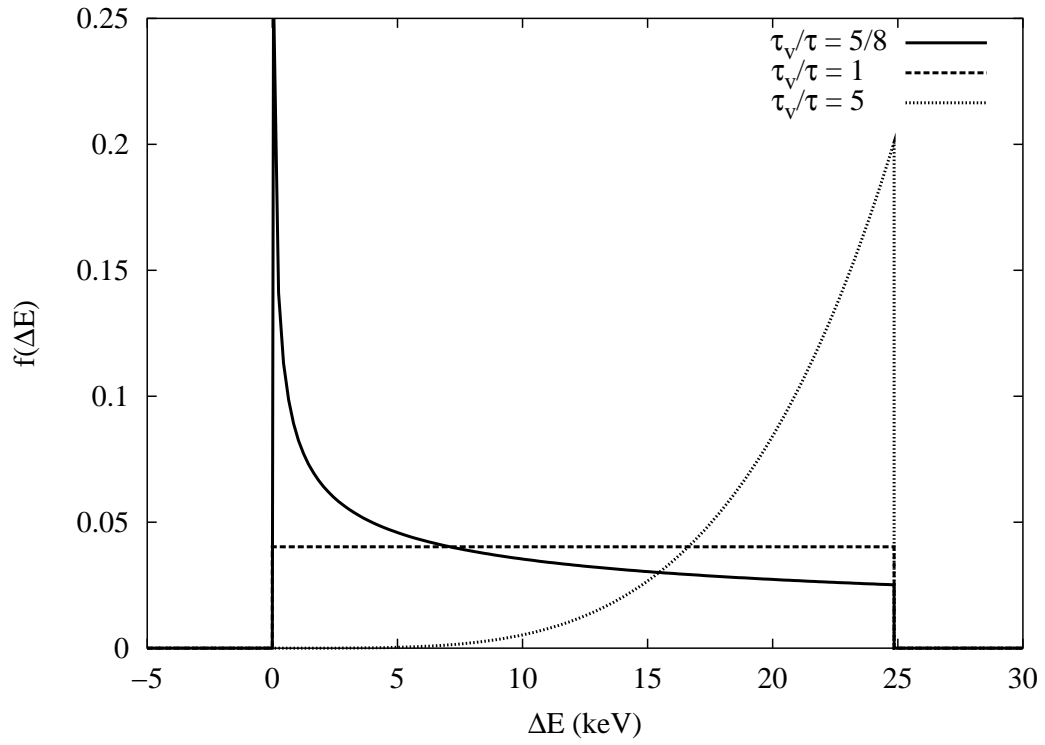


Figura A.1: Formas de línea dadas por la ecuación (A.15) para diferentes valores de la razón τ_v/τ . $E_\gamma = 1246$ keV, $\theta = 52.8^\circ$.

Apéndice B

Otra forma de calcular la velocidad de los núcleos residuales en función del tiempo, $v(t)$

De las definiciones de velocidad v ,

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (\text{B.1})$$

y energía cinética T ,

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (\text{B.2})$$

se tiene que

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (\text{B.3})$$

Al despejar la velocidad de (B.3) se llega a

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2T}{m}}. \quad (\text{B.4})$$

De la ecuación (4.5) puede verse que

$$dx = \frac{dT}{S(T)}. \quad (\text{B.5})$$

Remplazando (B.5) en (B.4) y despejando dt se llega a

$$dt = \sqrt{\frac{1}{2}m} \frac{dT}{S(T)\sqrt{T}} \quad (\text{B.6})$$

Al integrar ambos lados de (B.6) se tiene

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}m} \int_T^{T_0} \frac{dT}{|S(T)|\sqrt{T}}. \quad (\text{B.7})$$

Dada la curva $S(T)$, la integración en (B.7) puede llevarse a cabo numéricamente para diferentes valores de T . De esta forma se obtiene una tabla de tiempo en función de la energía cinética, $t = t(T)$, que, para el punto de vista necesario aquí, es más apropiado ver como una tabla de energía cinética en función del tiempo,

$$T = T(t). \tag{B.8}$$

Al remplazar (B.2) en (B.8) y despejar la velocidad se llega a $v(t)$.

Se propone que se explore el uso de este método de cálculo de $v(t)$ y se le compare con el expuesto en la sección 4.1.

Apéndice C

Razón de producción de eventos en una reacción de fusión- evaporación

C.1 Número de fusiones por unidad de tiempo

El número de fusiones por unidad de tiempo en una reacción de fusión- evaporación I_f está dado por [12]

$$I_f = F A_t n_{c.d.} \delta x \sigma, \quad (\text{C.1})$$

donde F es el número de proyectiles incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo, A_t es el área perpendicular total del blanco o el área transversal del haz (en caso de ser menor que el área del blanco), $n_{c.d.}$ es el número de centros dispersores (núcleos blanco) por unidad de volumen en el material blanco, δx es el espesor del material blanco y σ es la sección eficaz total para la fusión. Al usar las definiciones

$$I \equiv \left(\begin{array}{l} \text{Número de partículas inci-} \\ \text{dentes por unidad de tiem-} \\ \text{po} \end{array} \right) = F A_t, \quad (\text{C.2})$$

$$\eta_{c.d.} \equiv \left(\begin{array}{l} \text{Número de centros disper-} \\ \text{sores por unidad de área} \end{array} \right) = n_{c.d.} \delta x, \quad (\text{C.3})$$

la expresión (C.1) puede escribirse en la forma

$$I_f = I \eta_{c.d.} \sigma \quad (\text{C.4})$$

Para dar una idea de los órdenes de magnitud de estas cantidades en una reacción de fusión- evaporación, se usarán los datos de la reacción $^{32}\text{S}(^{58}\text{Ni},)$ de la referencia [11]:

$$\begin{aligned} I &= 3.5 \text{ p nA (particle nano Ampere)} \\ &= 6.2 \times 10^9 \text{ proyectiles/s} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\delta x = 0.466 \mu\text{m} \quad (\text{C.6})$$

El número de centros dispersores se relaciona con la densidad del material blanco ρ a través de

$$n_{c.d.} = \rho \frac{N_A}{A}, \quad (\text{C.7})$$

donde N_A es el número de Avogadro y A es el número de masa de los centros dispersores. En esta reacción el blanco es ^{58}Ni . Al remplazar $\rho = 8.908 \text{ g/cm}^3$ y $A = 58$ en (C.7) se tiene

$$n_{c.d.} = 0.924 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3} \quad (\text{C.8})$$

Al sustituir (C.8) y (C.6) en (C.3),

$$\eta_{c.d.} = 0.462 \times 10^{19} \text{ cm}^{-2} \quad (\text{C.9})$$

σ puede calcularse con la ecuación (6.2.1) de la referencia [8] con un valor para la energía del proyectil de 135 MeV. El valor hallado de esta manera es

$$\sigma = 0.5 \text{ barn}. \quad (\text{C.10})$$

Finalmente al remplazar (C.5), (C.9) y (C.10) en (C.4) se tiene

$$I_f = 1.4 \times 10^4 \text{ fusiones/s.}$$

C.2 Distribución de Poisson de las cuentas en los canales del espectro de energías

Se realiza N veces un experimento cuyo resultado aleatorio sólo puede tener dos valores, a los que se llamará “éxito” y “fracaso”. La probabilidad de que un experimento sea exitoso es p . El número de experimentos exitosos n del total de N experimentos es una variable aleatoria. A la distribución de probabilidad de n se le llama distribución binomial [15]. La distribución de Poisson es el límite de la distribución binomial cuando $N \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$, de modo que Np permanece constante. En este caso el “experimento” es el lanzamiento de un proyectil sobre el material blanco. El experimento es exitoso si: el proyectil se fusiona con un núcleo blanco, el núcleo compuesto decae a un núcleo residual que emite un fotón cuya energía detectada está en el rango de un canal determinado. El resultado del experimento es un “fracaso” si no se presenta esta secuencia de hechos. Para mostrar que el número de éxitos, es decir, el número de cuentas en el canal observado, presenta una distribución de Poisson, debe probarse que la probabilidad de un éxito es pequeña y que el número de éxitos es muy grande (al final de esta sección se hace un comentario sobre el significado exacto de “pequeño” y “muy grande”). Un experimento exitoso necesariamente ha tenido como una de sus etapas la fusión. Pero no todos los experimentos en que se produce una fusión tienen resultado exitoso. Luego, la probabilidad de que en un experimento se produzca una fusión, q , es mayor que la probabilidad de que sea exitoso, p . En seguida se muestra que q es muy pequeño y

de esta manera, dado que $q > p$, se prueba que p también lo es. La probabilidad de que un proyectil lanzado al blanco produzca una fusión es

$$q = \frac{\left(\begin{array}{l} \text{Área disponible para realizar una} \\ \text{fusión} \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} \text{Área del blanco sobre la que in-} \\ \text{cide el haz de proyectiles} \end{array} \right)} = \frac{N_{c.d.}\sigma}{A_t}, \quad (\text{C.11})$$

donde $N_{c.d.}$ es el número de centros dispersores en el área A . Para las otras cantidades se está usando la misma notación que en la sección anterior. Por la definición del número de centros dispersores por unidad de área, $\eta_{c.d.}$,

$$N_{c.d.} = \eta_{c.d.} A_t \quad (\text{C.12})$$

Remplazando (C.12) en (C.11) se llega a

$$q = \eta_{c.d.} \sigma. \quad (\text{C.13})$$

Para que quede más claro el cálculo de la probabilidad, se expresará $\eta_{c.d.}$ como el recíproco de una cantidad con dimensiones de área, $A_{c.d.}$,

$$\eta_{c.d.} = \frac{1}{A_{c.d.}} \quad (\text{C.14})$$

$A_{c.d.}$ puede ser interpretado como el área que le corresponde a cada centro dispersor. Luego,

$$p = \frac{\sigma}{A_{c.d.}} \quad (\text{C.15})$$

Usando el valor de $\eta_{c.d.}$ calculado en la sección C.1 se llega a $A_{c.d.} = 2.16 \times 10^{-19} \text{cm}^2$. Luego,

$$q = 2.3 \times 10^{-6}.$$

El número total de proyectiles lanzados al material blanco, N , es igual al número de partículas incidentes por unidad de tiempo, I , multiplicado por el tiempo durante el que el haz incide sobre el material blanco, t ,

$$N = It. \quad (\text{C.16})$$

Usando el valor de I reportado en la sección anterior, ecuación (C.5), y dando a t un valor de 5 días (tiempo típico de duración de un experimento de DSA) se obtiene

$$N = 2.7 \times 10^{14} \text{ proyectiles lanzados al blanco}$$

Queda aún por establecerse si el valor calculado para la cota superior de p , q , es suficientemente pequeño y el de N suficientemente grande como para que a la distribución de n se le considere de Poisson. Para la discusión de este aspecto consúltese la referencia [15].

Bibliografía

- [1] C. Cohen-Tannoudji et al. , *Quantum Mechanics*, vol II, John Wiley & Sons (1977).
- [2] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley (1994).
- [3] M.O. Scully y M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (1997).
- [4] V.F. Weisskopf y E. Wigner, *Z. Physik*, **63**, 54 (1930).
- [5] A. DeShalit y H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics, Volume I: Nuclear Structure*. John Wiley & Sons (1974).
- [6] A. Garzón, *Determinación de los tiempos de vida de los estados de la banda principal del ^{83}Y por el método de atenuación del corrimiento por efecto Doppler*, Trabajo de Grado, Universidad Nacional de Colombia (2000).
- [7] W.E. Boyce y R.C. DiPrima *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Editorial Limusa (1980).
- [8] Ejiri, H. y de Voigt, M. J., *Gamma Ray and Electron Spectroscopy in Nuclear Physics*. Oxford University Press (1989).
- [9] Fröbrich, P y Lipperheide, R. *Theory of Nuclear Reactions*, Oxford (1996).
- [10] R. Cardona, *Estructura a alto spin de las bandas normalmente deformadas de ^{84}Zr* , Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Colombia (2003).
- [11] M. Wiedeking, R.A. Kaye, G.N. Solomon, S.L. Tabor, J. Döring, G.D. Johhs, F. Cristancho, M. Devlin, F. Lerma, D.G. Sarantites, I.Y. Lee y A.O. Machiavelli, *Phys. Rev. C* **62** 024316 (2000).
- [12] W.R. Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer-Verlag (1994).
- [13] D. N. Poenaru y W. Greiner, *Experimental Techniques in Nuclear Physics*, Walter de Gruyter (1997).
- [14] D. W. O. Rogers, *Nuclear Instruments and Methods* **127** (1975) 253-260.

- [15] L. Lyons, *Statistics for nuclear and particle physicists*, Cambridge University Press (1986).
- [16] E.F. Moore, P.D. Cottle, C.J. Gross, D.M. Headly, U.J. Hüttmeier, S.L. Tabor y W. Nazarewicz, *Phys. Rev. C* **38**, 696 (1988).
- [17] A. E. Blaugrund, *Nuclear Physics* **88** (1966) 501-512.
- [18] Comunicación interna con el Grupo de Física Nuclear de la Universidad del Estado de Florida (Florida State University).
- [19] www.physics.nist.gov/cgi-bin/Xcom/xcom3_1
- [20] Morinaga, H., Yamazaki, T., *In-beam gamma-ray spectroscopy*, North-Holland Publishing Company (1976).
- [21] A. P. French, *Relatividad Especial*, Editorial Reverté, S. A. (1974).
- [22] Ziegler, J.F. et al., *The Stopping and Range of Ions in Solids*. Pergamon Press (1985).
- [23] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1992).
- [24] H.M. Deitel y P.J. Deitel, *C++ how to program*, Prentice Hall (1994).
- [25] Johnson, T.D. et al., *Phys. Rev. C* **55** 1108 (1997).
- [26] J. A. Loaiza, *Simulación del proceso de frenado de iones pesados por sólidos amorfos. Aplicación a la predicción de curvas DSA (Doppler Shift Attenuation) en espectroscopía gama*, Trabajo de Grado, Universidad Nacional de Colombia (1998).