

Aplicación de álgebras cuánticas a configuraciones nucleares en
cúmulos de partículas alfa para la descripción de estados excitados
del ^{32}S

Edna Carolina Pinilla Beltrán

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Grupo de Física Nuclear

Bogotá D. C
2004

**Aplicación de álgebras cuánticas a configuraciones nucleares en cúmulos
de partículas alfa para la descripción de estados excitados del ^{32}S**

Edna Carolina Pinilla Beltrán
132111

Trabajo de grado para optar el título de Física

Director
Dr. Richard W. Haase

Director Ad-Hoc
Dr. Fernando Cristancho

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Física
Grupo de Física Nuclear
Bogotá D.C.
2004

Dr. Richard W. Haase
Director

Dr. Fernando Cristancho
Director Ad-hoc

Dr. Diógenes Campos
Jurado

Dr. Ramiro Cardona C.
Jurado

Aplicación de álgebras cuánticas a configuraciones nucleares en cúmulos de partículas alfa para la descripción de estados excitados del ^{32}S

Application of quantum algebras to nuclear alfa cluster configurations for description in ^{32}S excited states

Resumen

De acuerdo al modelo nuclear de cúmulos de partículas alfa, se propone una configuración hexagonal bipiramidal con partículas alfa ubicadas en sus vértices, a lo largo de dos bandas rotacionales excitadas del núcleo ^{32}S . Entonces, se halla un valor del parámetro $q = e^\tau$ relacionado al grupo cuántico $so_q(3)$ para rotaciones de esta figura alrededor de ejes sobre el plano hexagonal $(x - y)$. El parámetro τ es introducido en la expresión energética de un rotor q -deformado, dando el espectro de excitación teórico asociado a las bandas rotacionales del ^{32}S . Al obtener este parametro se descubre una íntima relación entre los elementos de la matriz de rotación q -deformada tridimensional y las coordenadas del espacio sobre el cual es construída. Esta situación influye en la no conmutación de las componentes del vector \vec{n} alrededor del cual se hace la rotación; en donde se tiene que para rotaciones con \vec{n} sobre el plano $x - y$ sus componentes conmutan similarmente al caso no deformado.

Abstract

According to nuclear alfa cluster model, we propose an hexagonal bipiramidal configuration with alfa particles on its vertex along two rotational excited bands in ^{32}S nuclei. Then we find a $q = e^\tau$ value related to the quantum group $so_q(3)$ for rotations of this figure around axes on the hexagonal plane $(x - y)$. The parameter τ is introduced in the rotor's q -deformed energetic expression, giving the theoric excitation spectrum associated to the rotational bands in ^{32}S . Obtaining the τ parameter we discover an intimate relation between elements of q -deformed 3-dimensional rotation matrix and the coordinates of the space on which is constructed. This situation influences in the noncommutation of \vec{n} vector components around the rotation is done; where we have the vector components for rotations with the \vec{n} vector on the $x - y$ plane commutating similar as the nondeformed case.

Palabras claves: Modelo nuclear de cúmulos, álgebras cuánticas, ^{32}S , rotaciones tridimensionales q -deformadas.

Clue words: Nuclear cluster model, quantum algebras, ^{32}S , 3-dimensional q -deformed rotations.

Firma del Director:

Edna Carolina Pinilla Beltrán, 1981.

*Hay hombres que luchan un día
y son buenos ...
Hay hombres que luchan un año
y son mejores ...
Hay quienes luchan muchos años
y son muy buenos ...
Pero hay quienes luchan toda la vida,
esos, son los imprescindibles.*

Bertolt Brecht

*En la memoria de Dianita,
quien me enseñó que lo más bello de la vida es una sonrisa.
11 de Dic. de 1981 - 9 de Dic. de 2003*

Agradecimientos

Un agradecimiento sincero y muy especial al profesor Fernando Cristancho por haberme acogido en su grupo, orientándome y mostrándome lo fabuloso de la Física Nuclear ...

Al profesor Fabio Fajardo quien siempre me apoyó y confió en mí ...

A mis compañeros del grupo de Física Nuclear especialmente a Diego por sus consejos académicos, su paciencia y amabilidad ...

A Eduardo quien me ha brindado gran ayuda logística ...

A mis amiguitos Jhonny, Dianita y Liliana, por todos los inolvidables momentos que me colmaron de alegría, por creer en mí y aguantar tantos días de abandono ...

A Germán por haberse convertido en parte importante de mi vida y haberme regalado tantas palabras de aliento en los momentos difíciles ...

A Gabriel, Nancy, Robin, Edana, Harol, Mauricio y Ricardo por su amistad y porque a lo largo de la carrera me mostraron y me ayudaron a descubrir cosas fascinantes ...

A la señora Mery, la señora Martha y Don Luis por haberme acogido en sus hogares permitiéndome ser parte de ellos ...

A Oscar mi compañero de lucha, quien fue un amigo incondicional, un novio maravilloso, por su paciencia, comprensión y ayuda ...

A mi Madre por su enorme amor y por haberme enseñado que para obtener grandes cosas hay que hacer grandes esfuerzos ...

A mi Padre por su protección que ha sido una muestra de su amor hacia mí ...

A mis hermanos porque con sus travesuras le dieron otro color a mi vida ...

Y a todas aquellas personas que contribuyeron con su granito de arena para que esta etapa importante de mi vida terminara ...

Pero ante todo a Dios por permitir que aún siga aquí disfrutando de este momento.

Índice General

1	Introducción	1
2	Modelos colectivos para núcleos par-par	3
2.1	Modelo vibracional	4
2.2	Modelo rotacional	6
2.3	Modelo nuclear de cúmulos	8
2.3.1	Modelo de partícula alfa	9
3	Álgebras cuánticas	15
3.1	Formalismo algebraico deformado	16
3.2	Ejemplos de sistemas q -deformados	17
3.2.1	El oscilador armónico q -deformado unidimensional	17
3.2.2	Rotor rígido q -deformado	20
3.3	Álgebras deformadas correspondientes a los grupos de Lie usuales	23
3.3.1	Matrices del álgebra deformada $su_q(2)$	24
4	Características del núcleo ^{32}S	27
4.1	Estabilidad y ubicación en la tabla de isótopos	27
4.2	Análisis del esquema de niveles	28
4.3	Configuración geométrica del ^{32}S según el modelo de cúmulos α	33
4.3.1	Simetrías de una configuración hexagonal bipiramidal	33

5	Obtención del espectro q-deformado para una simetría hexagonal bipiramidal	35
5.1	Rotaciones tridimensionales en términos de los parámetros de Cayley-Klein	37
5.2	Matriz de rotación q -deformada con $j = 1$	38
5.3	Función de rotación q -deformada	39
5.4	Función q -determinante para la matriz de rotación tridimensional	41
5.5	Obtención del elemento matricial b cuando $n_z = 0$	44
5.6	Parámetro τ para ejes de rotación en el plano $x - y$	47
6	Análisis de bandas del ^{32}S con comportamiento rotacional	52
7	Resumen y conclusiones	59
A	Energía de un rotor q-deformado	61
B	Cálculo de la matriz de rotación q deformada con $j=1$	65
B.1	Coefficientes WCG deformados	65
B.2	Obtención de los elementos matriciales a partir del acople de $J = 1/2$	66
C	Álgebra y coordenadas no conmutativas	70

Índice de Figuras

2.1	Niveles de baja energía según el modelo vibracional para excitaciones cuadrupolares.	5
2.2	Forma nuclear para núcleos considerados axialmente simétricos. (a) Deformación prolata $\beta > 0$ y (b) deformación oblata $\beta < 0$	6
2.3	Acoplamiento de momento angular en una rotación colectiva de un núcleo axialmente simétrico (prolato).	7
2.4	Banda rotacional para un núcleo ideal par-par con $\alpha = 0$. A la izquierda se encuentra el valor del spin y a la derecha el de energía para cada nivel en unidades de $\hbar^2/2I$	7
2.5	Número de protones en función del número de neutrones de núcleos, en donde los puntos negros presentan la relación $E(4^+)/E(2^+) > 2.8$	9
2.6	Energía de ligadura (MeV) en función del número de masa para distintas clases de configuraciones en cúmulos para núcleos ligeros. La energía de ligadura (números cerca de cada configuración) aumenta en dirección y , en donde las configuraciones más ligadas poseen más partículas alfa (puntos negros); mientras que en el eje x aumenta el número de masa. Los símbolos químicos encerrados en círculos son configuraciones posibles en cúmulos.	10
2.7	Potencial de interacción entre un par de partículas alfa.	11
2.8	Configuraciones geométricas de cúmulos α para los núcleos ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$ y ${}^{16}\text{O}$ según el modelo de partícula alfa.	11
2.9	Densidad de probabilidad de posición de cúmulos conformados por partículas alfa en algunos núcleos ligeros.	12
2.10	Ilustración de excitaciones colectivas del núcleo ${}^{12}\text{C}$ dentro del modelo de partícula α según Wheeler. (a) Movimiento rotacional y (b) Vibración con oscilaciones ω_1 (Parte superior) y ω_2 (Parte inferior).	13

2.11	Comparación entre los espectros predichos por el modelo de partícula alfa con los experimentales, correspondientes a los núcleos: (a) ^8Be , (b) ^{12}C y (c) ^{16}O (tomada de [2]).	14
3.1	Comparación entre el espectro energético del oscilador armónico unidimensional sin deformar ($\tau = 0$) con los correspondientes deformados para distintos valores de τ con $q = e^\tau$ (ec. (3.13)), tomados en unidades de $\frac{\hbar\omega}{2}$	18
3.2	Comparación entre el espectro energético del oscilador armónico unidimensional sin deformar ($\tau = 0$) con los correspondientes deformados para distintos valores de τ con $q = e^{i\tau}$ (ec. (3.14)) tomados en unidades de $\frac{\hbar\omega}{2}$	19
3.3	Comparación entre el espectro energético de un rotor rígido sin deformar ($\tau = 0$) con espectros deformados para distintos valores de τ siendo $q = e^\tau$ (ec. (3.21)), tomados en unidades de $\frac{\hbar^2}{2I}$	22
3.4	Comparación entre el espectro energético de un rotor rígido sin deformar ($\tau = 0$) con espectros deformados para distintos valores de τ siendo $q = e^{i\tau}$ (ec. (3.23)), tomados en unidades de $\frac{\hbar^2}{2I}$	23
3.5	Diagrama memotécnico de relaciones de conmutación entre elementos de una matriz de $gl_q(2)$	25
4.1	Esquema de decaimiento de núcleos en la región de $A = 32$. En el eje y se muestra la energía de ligadura tomando como referencia la del ^{32}S y en el eje x aumenta el número de protones para cada núcleo de izquierda a derecha. Observe que el ^{32}S es el más ligado y por lo tanto el más estable.	27
4.2	Banda del estado base del núcleo ^{32}S	28
4.3	Esquema experimental de la razón $\frac{B(E2:4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2:2_1^+ \rightarrow 0^+)}$ en función de $E(4_1^+)/E(2_1^+)$ para algunos núcleos con A entre 20 y 32. Para núcleos rotacionales los valores teóricos de $\frac{B(E2:4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2:2_1^+ \rightarrow 0^+)}$ y $E(4_1^+)/E(2_1^+)$ son aproximadamente 1.4 y 3.3.	29
4.4	Banda de Yrast del núcleo ^{32}S	31
4.5	Bandas rotacionales a altas energías de excitación ($E > 9$ MeV) del núcleo ^{32}S . Los datos experimentales de la Banda 1 (Izquierda) son tomados de [26], mientras que los de la Banda 2 (Derecha) se encuentran en [27].	32

4.6	En la Izquierda se muestra la configuración geométrica (hexagonal bipiramidal) propuesta en este trabajo, en la cual se encontraría el núcleo ^{32}S en el primer estado de una banda con comportamiento rotacional. A la Derecha se ilustra otro arreglo geométrico posible (octaedro regular) para el mismo núcleo según el modelo de cúmulos.	33
5.1	Ilustración del procedimiento utilizado en este trabajo para la obtención del espectro q -deformado característico de una configuración hexagonal bipiramidal correspondiente al ^{32}S	36
5.2	Número n relacionado al ángulo de una rotación C_n en función del parámetro τ para la solución $y_2 = f_1(q)$ de la ecuación (5.35). Esta se muestra en el rango de valores de n y τ en el cual la parte imaginaria de n se anula. . . .	48
5.3	Número n relacionado al ángulo de una rotación C_n en función del parámetro τ para la solución $y_3 = f_2(q)$ de la ecuación (5.35). Esta se muestra en el rango de valores de n y τ en el cual la parte imaginaria de n se anula. . . .	49
5.4	Número n relacionado al ángulo de una rotación C_n en función del parámetro τ para la solución $y_1 = 0$ de la ecuación (5.35). Esta se muestra en el rango de valores de n y τ en el cual la parte imaginaria de n se anula.	49
5.5	Espectro energético teórico del núcleo ^{32}S según la energía de un rotor q -deformado asociado a simetrías C_2 con eje de rotación en el plano $x - y$ ($\tau = 2.1$ y $\hbar^2/2I = 0.07$ MeV).	50
5.6	Energía rotacional q -deformada con factor $\hbar^2/2I$ para núcleos con $A = 237$ y $\tau = -0.7$	51
6.1	Momento de inercia cinético en función de la frecuencia de rotación (MeV) de la Banda 2 del núcleo ^{32}S mostrada en la sección 4.2; calculado con las ecuaciones (6.3), (6.5) y los datos de energía experimental dados en [27]. . . .	52
6.2	Momento de inercia dinámico en función de la frecuencia de rotación (MeV) de la Banda 2 del núcleo ^{32}S mostrada en la sección 4.2; calculado con las ecuaciones (6.4), (6.6) y los datos de energía experimental dados en [27]. . . .	53
6.3	Energías experimentales de las bandas excitadas 1 y 2 del ^{32}S en función del spin y ajustes de éstas a las expresiones de un rotor rígido y uno q -deformado con $q = e^\tau$ (ec. 3.21).	54

Índice de Tablas

2.1	Esquema m para el acople de dos fonones cudrupolares. Solamente se muestran en éste los valores positivos de M ya que la tabla es simétrica para $M < 0$; además los valores de m_1 y m_2 se escogen de tal forma que cumplan $m_1 > 0, m_2 \leq m_1$	5
2.2	Cálculos de energía de ligadura por partícula α y de energía entre éstas realizados por Hafstad y Teller [9] según el modelo de partícula alfa (tomada de [6]).	12
3.1	Comparación entre funciones elementales convencionales con las q -deformadas.	17
3.2	Propiedades fundamentales de algunos grupos de Lie.	24
4.1	Dirección de los vectores unitarios ubicados en el plano $x-y$ alrededor de los cuales, al rotar en un ángulo π , la figura hexagonal bipiramidal permanece invariante.	34
6.1	Parámetros obtenidos al ajustar las energías de un rotor rígido (Rígido) y uno q -deformado (q -Def) a los datos experimentales de las bandas excitadas 1 y 2 del ^{32}S por medio del programa Gnunplot [32]; en donde ϵ_{rel} es el valor porcentual del error del ajuste con respecto al valor obtenido.	55
6.2	Comparación de la energía experimental (Exp.) de cada spin perteneciente a la Banda 1 con la calculada para un rotor rígido (Rígido) y q -deformado (q -Def). El error porcentual se halla por medio de $\epsilon\% = \text{Valor Exp.} - \text{Valor Teór.} /\text{Valor Exp.} \times 100\%$	56
6.3	Comparación de la energía experimental (Exp.) de cada spin perteneciente a la Banda 2 con la calculada para un rotor rígido (Rígido) y q -deformado (q -Def). El error porcentual se halla por medio de $\epsilon\% = \text{Valor Exp.} - \text{Valor Teór.} /\text{Valor Exp.} \times 100\%$	57

Capítulo 1

Introducción

Una rama de gran interés en la física nuclear es la estructura, ésta estudia el núcleo a bajas energías de excitación ya que a tales energías pueden ser resueltos los niveles nucleares. Dentro de este marco se han desarrollado diversos modelos que explican el comportamiento nuclear desde diversos puntos de vista los cuales se han propuesto consistentemente en base a los resultados experimentales. Es así como han surgido modelos de partícula independiente entre los cuales se encuentra el del gas de Fermi [1, 2], el modelo de capas esférico [1, 3], el modelo de capas deformado [1]; modelos colectivos de carácter fenomenológico como el de la gota líquida [1], de carácter geométrico como el rotacional [4], el vibracional [4, 5], o el de cúmulos [2, 6, 7, 8, 9]; y de carácter algebraico como el IBM (*Interacting Boson Model*) [5, 10] o el ACM (*Algebraic Cluster Model*) [11, 12].

Los modelos de partícula independiente desprecian la interacción entre los nucleones y asumen un potencial efectivo producido por la presencia de éstos que actúa sobre cada nucleón. En el modelo de gas de Fermi se presenta a los nucleones como constituyentes de un gas ideal; éstos se mueven en un potencial promedio en donde la ocupación de los estados se efectúa teniendo en cuenta su carácter fermiónico. Así mismo, el modelo de capas es capaz de clasificar niveles energéticos nucleares de acuerdo al potencial nuclear radial el cual puede ser el del oscilador armónico, el del pozo cuadrado o el de Wood-Saxon [3]. El modelo de capas deformado o modelo de Nilsson es uno de los modelos “más exitosos” debido a que explica una gran variedad de fenómenos nucleares. Usualmente, introduce un potencial deformado con simetría axial proveniente de la idea geométrica de considerar al núcleo en su estado base con una figura que presenta dicha simetría.

En cambio, los modelos colectivos consisten en explicar el comportamiento nuclear desde un punto de vista fenomenológico. El modelo de gota líquida es un modelo semiclásico el cual se basa en tomar al núcleo como una gota; éste da cuenta del carácter de saturación de las fuerzas nucleares y su éxito consiste en proporcionar la energía de ligadura por nucleón de acuerdo a los resultados experimentales. En el modelo rotacional los nucleones contribuyen coherentemente al movimiento nuclear resultando tal movimiento en una

rotación alrededor de un eje distinto al eje de simetría. Para núcleos con A par el núcleo se encuentra rotando como un “todo”, mientras que para núcleos con A impar se asume que un nucleón se encuentra moviéndose alrededor de un centro rotante o “core” formado por el apareamiento del resto de nucleones. El modelo vibracional se basa en tomar al núcleo como una gota líquida vibrando alrededor de la posición de equilibrio, sus vibraciones son de carácter multipolar dadas en cuantos vibracionales denominadas fonones en analogía al término utilizado en física del estado sólido. Dentro del modelo de cúmulos se toma al núcleo como compuesto por subestructuras con identidad propia que ocupan un lugar espacial que conserva ciertas simetrías; éste es aplicable a núcleos ligeros y también da cuenta de la saturación de la fuerzas nucleares.

Por otra parte, los modelos algebraicos consisten en aplicar métodos de teoría de grupos que permiten estudiar determinadas simetrías asociadas al núcleo. El IBM toma al núcleo como conformado por pares nucleónicos (bosones) que interactúan entre sí el cual es capaz de describir núcleos con características rotacionales, vibracionales o γ – *soft*. El modelo algebraico de cúmulos por su parte, es un formalismo que permite estudiar estructuras en cúmulos, en donde se ha propuesto un tipo de descripción para analizar estos sistemas mecánico-cuánticos; ésta se basa en el álgebra de Lie del grupo $U(\nu+1)$ siendo ν el número de grados de libertad espaciales del sistema [11].

Existen núcleos cuyos espectros son explicables por medio de modelos de carácter fenomenológico como el VMI (*Variable Moment of Inertia*) [13] y el GVMI (*Generalized Variable Moment of Inertia*) los cuales consisten en describir al núcleo como un sistema rotante en el cual su momento de inercia no es en general el mismo para diferentes estados de excitación. Este hecho puede ser interpretado como un cambio en la forma geométrica del núcleo, en donde el momento de inercia asociado a cada estado se determina al minimizar la energía del sistema.

Otra clase de modelos provienen del formalismo de las álgebras cuánticas [14, 15] las cuales son versiones deformadas de los grupos de Lie tradicionales. En este contexto, se retoman ideas de los modelos convencionales nucleares introduciendo anarmonicidades relacionadas con el hamiltoniano asociado a la simetría del modelo particular [16, 17, 18]. En este escrito se presentará un ejemplo de dichos modelos relacionados con las álgebras cuánticas. Este es el modelo de cúmulos, según el cual los nucleones se agrupan formando partículas alfa, las cuales se organizan formando arreglos geométricos con simetrías espaciales características. El modelo de cúmulos es aplicado en el presente trabajo al análisis del núcleo ^{32}S ; como todo modelo, éste tiene sus alcances y limitaciones, así que en este trabajo se tratarán de discutir esta clase de aspectos de los cuales se podrá concluir si éste es un modelo que logra predecir determinados niveles energéticos del ^{32}S o si definitivamente se necesita recurrir a otros modelos.

Capítulo 2

Modelos colectivos geométricos para núcleos par-par

Como ya se mencionó anteriormente, el modelo de capas es un modelo de partícula independiente, el cual predice el comportamiento de núcleos cercanos a capas cerradas. Estas surgen de una manera análoga a las de la física atómica constituyéndose en los denominados números mágicos

$$N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, \dots$$

Los núcleos con números mágicos de protones y neutrones tienen una distribución espacial en promedio esférica. De esta manera nace la idea de introducir modelos que se encuentren relacionados formas nucleares diferente a la esférica y que expliquen eficientemente características nucleares, denominados modelos colectivos geométricos.

A continuación se presenta una pequeña descripción del modelo vibracional, rotacional y de cluster para núcleos par-par los cuales hacen parte de dicha clase de modelos. Esta con el fin de entender mejor el espectro experimental del ^{32}S el cual a bajas energías de excitación presenta comportamiento de tipo vibracional y a altas energías de excitación de tipo rotacional, en donde se pretenden estudiar las bandas con características rotacionales asumiendo que a lo largo de las bandas se tiene una configuración rotante con una geometría hexagonal bipiramidal según el modelo de cúmulos.

2.1 Modelo vibracional

Este modelo surge para explicar el comportamiento de núcleos cercanos a capas cerradas [1, 5] en donde se tienen vibraciones de carácter multipolar dados en cuantos denominados fonones nucleares.

Dentro de este modelo, el núcleo es considerado como una gota vibrando, en donde la posición instantánea de la superficie nuclear se puede describir en términos de una expansión en armónicos esféricos de la siguiente manera:

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 \left\{ 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right\}$$

siendo R_0 el radio promedio esférico del núcleo. De esta forma, se tienen vibraciones de distinta naturaleza, en donde cada modo de vibración se encuentra dado por λ . El modo cuadrupolar de vibración es uno de los más interesantes debido a que una gran cantidad de espectros nucleares presentan estas características. Es por eso que vale la pena mencionar el hamiltoniano que describe esta clase de excitaciones:

$$H = \frac{1}{2} B \sum_{\mu} \left| \frac{d\alpha_{2\mu}}{dt} \right|^2 + \frac{1}{2} C \sum_{\mu} \left| \alpha_{2\mu} \right|^2, \quad (2.1)$$

en donde los parámetros B y C son parámetros de inercia y restauración respectivamente. Al derivar (2.1) con respecto al tiempo, se puede encontrar la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia de oscilación dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{B}}.$$

El anterior sistema más interacciones entre nucleones puede expresarse en términos del formalismo de la segunda cuantización, el cual permite escribir el hamiltoniano en cuestión como:

$$H = E_0 + \hbar\omega \sum_{\mu} \left(b_{2\mu}^{\dagger} b_{2\mu} + \frac{1}{2} \right) + \sum_L C_L \left\{ [b_2^{\dagger} \times b_2^{\dagger}]^{(L)} \cdot [b_2 \times b_2]^{(L)} \right\}^{(0)}, \quad (2.2)$$

siendo E_0 la energía del estado base, b_2^{\dagger} y b_2 son operadores que crean y destruyen fonones de carácter cuadrupolar y L es el número cuántico de momento angular al que se acoplan.

Al observar el segundo término de (2.2) se tiene que éste corresponde al producto del número de fonones cuadrupolares por la energía de cada uno; mientras que el tercer producto por su parte, está relacionado con las interacciones residuales entre los nucleones, levantándose el degeneramiento en el número cuántico n con respecto a un oscilador armónico esférico cuando el parámetro C_L es distinto de cero.

Dentro de este marco cada transición energética involucra una excitación multifonónica de

la siguiente manera: la primera transición involucra un fonón, la segunda dos y así sucesivamente. Un ejemplo de un espectro vibracional degenerado ($C_L = 0$) se muestra en la Figura 2.1 en donde el estado dos fonónico presenta el triplete con números cuánticos J y paridad positiva 0^+ , 2^+ , 4^+ , mientras que el estado de tres fonones presenta el quintuplete 0^+ , 2^+ , 3^+ , 4^+ , 6^+ .

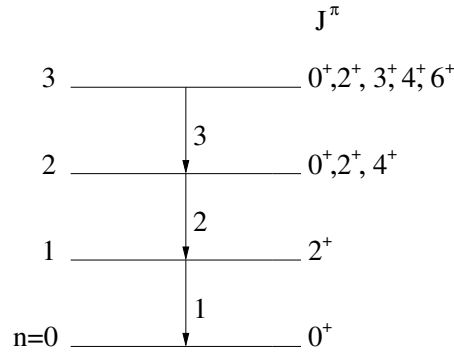


Figura 2.1: Niveles de baja energía según el modelo vibracional para excitaciones cuadrupolares.

Un método aplicado para encontrar estos números cuánticos es conocido como el esquema M mostrado en la Tabla 2.1, en la cual se muestra los posibles acoplos de dos fonones cuadrupolares con momento angular $J_1, J_2 = 2$. Análogamente se encuentra por medio de este mismo procedimiento que para $n = 3$ los tres fonones cuadrupolares se acoplan de tal forma que surge el quintuplete mostrado en la Figura 2.1.

Tabla 2.1: Esquema m para el acople de dos fonones cudrupolares. Solamente se muestran en éste los valores positivos de M ya que la tabla es simétrica para $M < 0$; además los valores de m_1 y m_2 se escogen de tal forma que cumplan $m_1 > 0, m_2 \leq m_1$.

$J_1 = 2$	$J_2 = 2$	$M = \sum m_i$	J
m_1	m_2		
2	2	4	
2	1	3	
2	0	2	4
2	-1	1	
2	-2	0	
1	1	2	
1	0	1	2
1	-1	0	
0	0	0	0

2.2 Modelo rotacional

El modelo rotacional [4] se aplica a los denominados núcleos deformados, es decir, aquellos que no tienen una posición de equilibrio esférica. Comúnmente, se tienen núcleos en cuyo estado base presentan una deformación de carácter cuadrupolar lo cual significa, desde el punto de vista geométrico, algunos de estos núcleos presentan formas nucleares de carácter elipsoidal. La primera, denominada prolata presenta una forma de sandía (Figura 2.2(a)), mientras que la otra se denomina oblata (Figura 2.2(b)) y su forma es similar a una mandarina, esto es, el semi-eje de simetría de la elipse en este caso, es el más corto entre los otros dos semi-ejes que presentan igual tamaño. Entonces, de acuerdo a esta consideración los puntos de la superficie nuclear pueden ser expresados como los de un elipsoide de revolución con

$$R(\theta) = R_0(1 + \beta Y_{20})$$

siendo R_0 el radio medio y β un parámetro de deformación nuclear relacionado con la excentricidad de la elipse, resultando un núcleo prolato si $\beta > 0$ y oblato si $\beta < 0$.

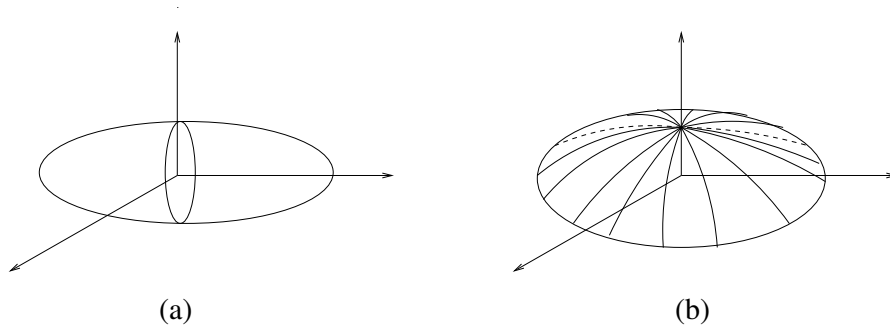


Figura 2.2: Forma nuclear para núcleos considerados axialmente simétricos. (a) Deformación prolata $\beta > 0$ y (b) deformación oblata $\beta < 0$.

En una rotación colectiva los nucleones contribuyen coherentemente al movimiento nuclear de tal forma que el núcleo rota alrededor de un eje distinto al de simetría; en tal movimiento los nucleones se acoplan en parejas de fermiones que se agrupan para formar un centro rotante (“core”) más una partícula desacoplada. Esto es, una rotación colectiva se puede presentar de manera general como una contribución de una rotación de un centro rotante o “core” más excitaciones de carácter intrínseco, como las debidas a la presencia de una partícula desacoplada del centro rotante en el caso de un núcleo impar. En la Figura 2.3 se representa el momento angular \vec{R} asociado a un “core” rotante, el momento angular \vec{J} debido al desacoplamiento de una partícula de éste y el momento angular total \vec{I} del núcleo de naturaleza prolata.

En el caso de núcleos par-par \vec{J} y K son nulos, de tal manera que el momento angular total equivale al de rotación del “core”. Por lo tanto, se tiene que la energía asociada a

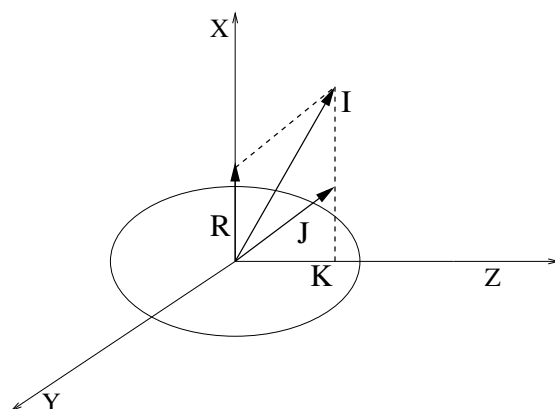


Figura 2.3: Acoplamiento de momento angular en una rotación colectiva de un núcleo axialmente simétrico (prolato).

un núcleo par-par en rotación es la del rotor rígido mecánico cuántico

$$E_{Rot} = \frac{\hbar^2}{2I} R(R + 1)$$

donde $R = j$ representa el número cuántico asociado al momento angular del “core” e I su momento de inercia. La secuencia de estados con número cuántico total j denominado spin forma una banda rotacional como la mostrada en la siguiente figura.

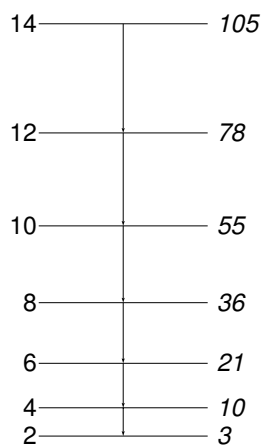


Figura 2.4: Banda rotacional para un núcleo ideal par-par con $\alpha = 0$. A la izquierda se encuentra el valor del spin y a la derecha el de energía para cada nivel en unidades de $\hbar^2/2I$.

Las propiedades de simetría debidas a la forma nuclear de esta clase de núcleos proporcionan bandas rotacionales con dos distintas secuencias

$$j = 0, 2, 4, 6, \dots \quad \text{con} \quad \alpha = 0$$

$$j = 1, 3, 5, 7, \dots \quad \text{con} \quad \alpha = 1$$

donde α es un número cuántico conocido como signatura que surge a partir de la invarianza rotacional de la figura nuclear en un ángulo π alrededor de un eje perpendicular alrededor del eje de simetría [19].

Entonces de una banda rotacional se tendría la secuencia en energía

$$\begin{aligned} E(0^+) &= 0 \\ E(2^+) &= 6\hbar^2/2I \\ E(4^+) &= 20\hbar^2/2I \\ &\vdots \end{aligned}$$

de donde se tiene que es válida la razón

$$\frac{E(4^+)}{E(2^+)} = 3.33$$

la cual proporciona una idea de clasificación de espectros nucleares rotacionales. Sin embargo, cabe notar que en realidad éstos no se encuentran completamente de acuerdo con los de un rotor rígido, es decir, no existen rotores perfectos ya que en general el momento de inercia a lo largo de una banda no permanece constante. A continuación en la Figura 2.5, se muestra un gráfica del número de protones Z en función del número de neutrones N para una razón $E(4^+)/E(2^+) > 2.8$ y no de 3.33 como se esperaría para rotores rígidos. También cabe notar que estos se encuentran lejos de capas cerradas como debería esperarse según lo descrito en la introducción del capítulo en donde cercano a capas cerradas se tienen núcleos con forma nuclear esférica y por lo tanto no rotan.

2.3 Modelo nuclear de cúmulos

El modelo nuclear de cúmulos más conocido como “*Nuclear cluster Model*” [2, 7] consiste en tomar al núcleo como compuesto de entes con identidad propia; es decir, los nucleones se agrupan formando subestructuras ubicadas espacialmente en el núcleo. Este modelo apareció en los comienzos de la física nuclear, con base en el decaimiento α que indicaba intuitivamente que el núcleo podría estar conformado por subestructuras que emergían de su interior, describiendo más acertadamente niveles energéticos de núcleos ligeros en comparación con métodos provenientes de la física atómica como el de Hartree. Recientemente se ha regresado al modelo de “cluster”, incluyendo métodos algebraicos [11, 12], debido a que éstos parecen proporcionar herramientas que facilitan los cálculos del modelo.

Se tiene una idea de cúmulos en términos del modelo de gas de Fermi, dentro del cual

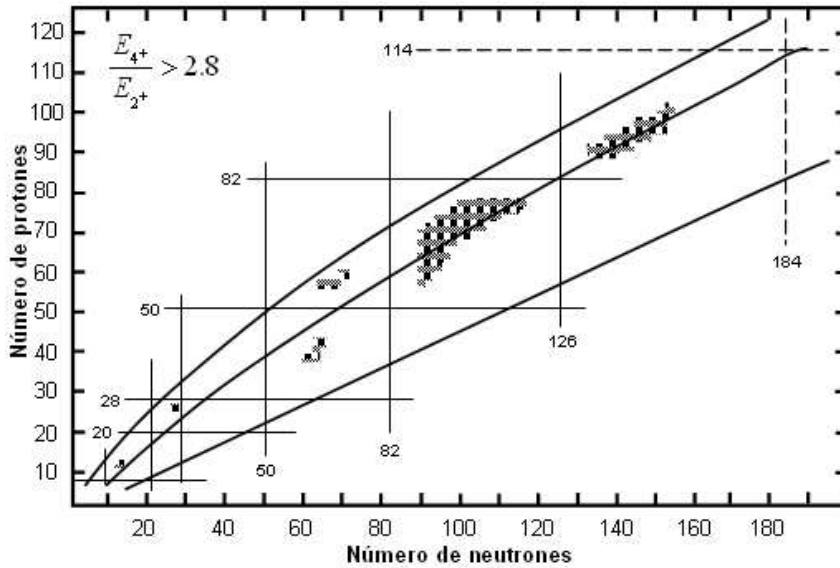


Figura 2.5: Número de protones en función del número de neutrones de núcleos, en donde los puntos negros presentan la relación $E(4^+)/E(2^+) > 2.8$.

se tiene un gas de nucleones cuya probabilidad de condensación en cúmulos y estabilidad energética aumenta a medida que decrece la densidad nuclear, hecho que ocurre en la superficie del núcleo. Entonces, como cálculos del modelo de capas predicen que la probabilidad de hallar dos protones o neutrones juntos es alta en la superficie nuclear, se dice que los núcleos ligeros son esencialmente superficiales y por lo tanto se tiene que el modelo de cúmulos funciona mejor para éstos. Ejemplos de distintas posibilidades de conformación en cúmulos para esta clase de núcleos son mostrados en la Figura 2.6 la cual presenta la energía de ligadura para cada una de estas configuraciones en función del número de masa, de donde se puede observar que las configuraciones más estables son las que constan completamente de partículas alfas.

2.3.1 Modelo de partícula alfa

Espectros energéticos de núcleos ligeros de tipo $4n^1$ muestran características colectivas que no son fácilmente explicadas por los modelos de capas convencionales, es por eso, que desde 1938 se ha propuesto un modelo para esta clase de núcleos que sea capaz de explicar tales características, este es: el modelo de partícula alfa [6, 8, 9]. El modelo de partícula alfa es un caso particular de configuración en cúmulos cuya probabilidad de formación con respecto a otra clase de cúmulos resulta ser la más alta debido a su alta simetría y energía de ligadura.

¹Los núcleos de tipo $4n$ son aquellos que se encuentran conformados por $2n$ neutrones, $2n$ protones y por lo tanto n partículas α

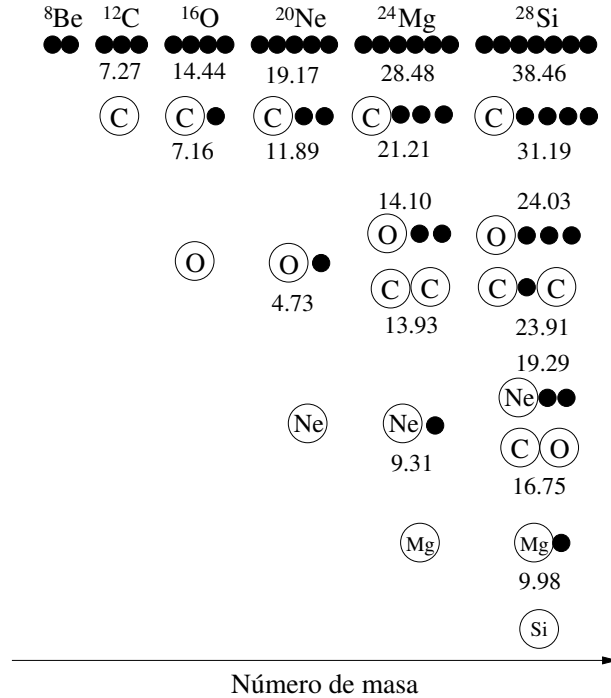


Figura 2.6: Energía de ligadura (MeV) en función del número de masa para distintas clases de configuraciones en cúmulos para núcleos ligeros. La energía de ligadura (números cerca de cada configuración) aumenta en dirección y , en donde las configuraciones más ligadas poseen más partículas alfa (puntos negros); mientras que en el eje x aumenta el número de masa. Los símbolos químicos encerrados en círculos son configuraciones posibles en cúmulos.

De acuerdo al modelo, el potencial entre dos partículas alfa (Figura 2.7) proviene de la física molecular siendo de carácter similar al que existe entre dos átomos neutros. Esto es, a distancias menores que el punto de equilibrio r_0 , se tiene un término de intercambio el cual es repulsivo, mientras que a distancias mayores de este punto existe una contribución atractiva similar al potencial de Van der Waals. Adicionalmente, al estar las partículas alfa cargadas positivamente, se añade a los anteriores el término repulsivo coulombiano correspondiente, en donde se asume que el potencial de interacción resultante entre un par de partículas no es alterado debido a la presencia de una tercera.

Entonces teniendo en cuenta lo asumido anteriormente, se tiene que la separación de mínima energía entre dos partículas alfa es r_0 , hecho que lleva a proponer que éstas formen poliedros regulares con una separación entre sí de r_0 ². Es decir, si se ubican en los vértices (Figura 2.8), forman un triángulo equilátero en el ^{12}C , en el ^{16}O forman un tetraedro, en el ^{24}Mg un octaedro, en el ^{32}S una estructura hexagonal bipiramidal (octaedro con

²A excepción del ^8Be , el cual se encuentra constiuído por 2 partículas α ligadas por una línea.

partículas α ubicadas en las caras)³, entre otras³.

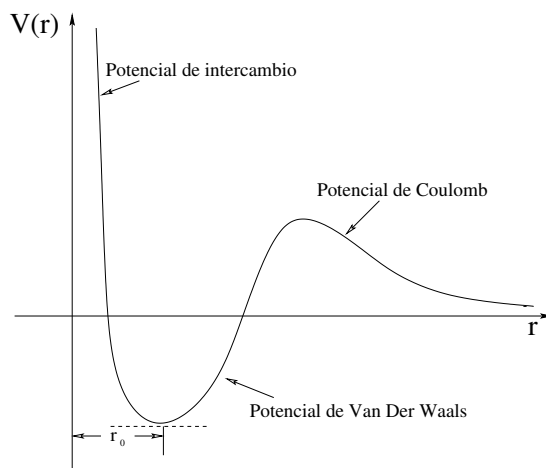


Figura 2.7: Potencial de interacción entre un par de partículas alfa.

La Figura 2.9 muestra la densidad de probabilidad de posición de las partículas alfa calculada en base a modelos de cúmulos, la cual sugiere que estos arreglos geométricos podrían darse dentro del núcleo.

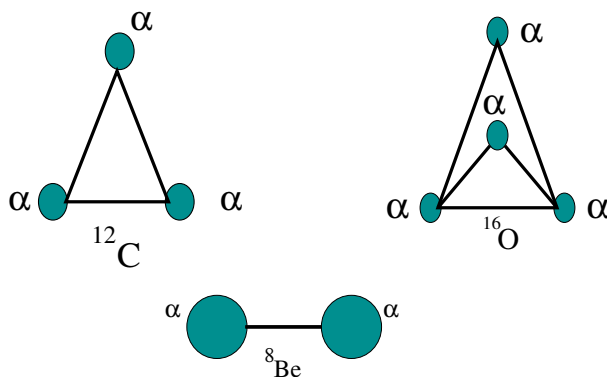


Figura 2.8: Configuraciones geométricas de cúmulos α para los núcleos ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$ y ${}^{16}\text{O}$ según el modelo de partícula alfa.

Dentro del modelo, cada línea o enlace que une las partículas entre sí representa la interacción entre ellas con lo cual se tiene que el número de enlaces N del ${}^8\text{Be}$ es uno, el del ${}^{12}\text{C}$ es tres, el del ${}^{16}\text{O}$ es 6, etc. Entonces, la energía de ligadura se halla como si el núcleo estuviese solamente conformado por partículas alfa y la de una sola partícula alfa se halla

³Cabe notar que en algunas configuraciones propuestas se tienen en cuenta interacciones entre pares de partículas alfa y por lo tanto ya no se encuentran entre sí a la misma distancia r_0 .

dividiendo el número de enlaces del núcleo respectivo, esto es:

$$E_\alpha = \frac{nU(\alpha) - U(n\alpha)}{N}.$$

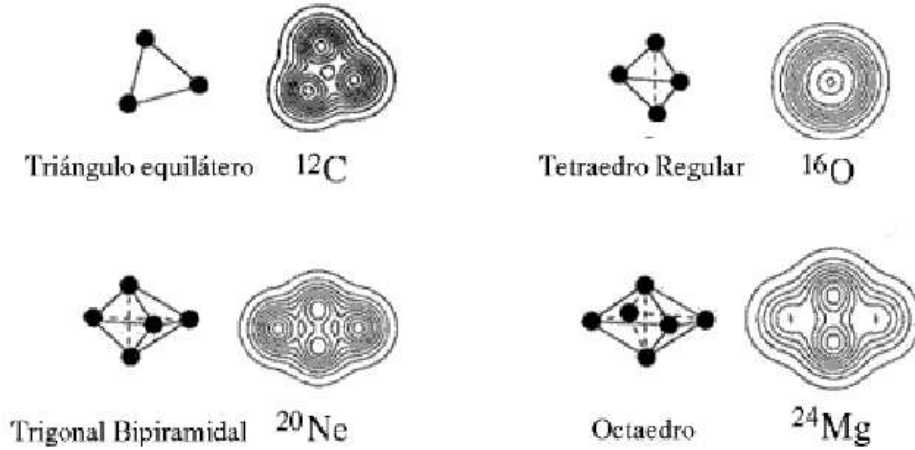


Figura 2.9: Densidad de probabilidad de posición de cúmulos conformados por partículas alfa en algunos núcleos ligeros.

La Tabla 2.2 presenta el número de partículas α para una serie de núcleos ligeros, el número de enlaces entre ellas, la energía de ligadura del núcleo por composición de éstas y su energía de enlace entre sí, la cual para todos los núcleos a excepción del ^8Be presenta un valor aproximadamente igual revelando este hecho el carácter de saturación de la fuerza nuclear ya que el resultado es análogo al encontrado para la energía de ligadura por nucleón que presenta un valor constante alrededor de 8.5 MeV.

Tabla 2.2: Cálculos de energía de ligadura por partícula α y de energía entre éstas realizados por Hafstad y Teller [9] según el modelo de partícula alfa (tomada de [6]).

Núcleo	n	Configuración	N	B_α (Mev)	E_α (Mev)
^8Be	2	Pesa	1	-0.12	-0.12
^{12}C	3	Triángulo	3	7.33	2.45
^{16}O	4	Tetraedro	6	14.5	2.42
^{20}Ne	5	Trigonal bipiramidal	9(8)	19.3	2.14(2.41)
^{24}Mg	6	Octaedro	12	28.8	2.40
^{28}Si	7	Pentagonal bipiramidal	16	37.8	2.36
^{32}S	8	Hexagonal bipiramidal	19	46.8	2.47

En la estructura trigonal bipyramidal del ^{20}Ne el número en paréntesis significa una disminución del número de enlaces tomados en el modelo los cuales producen un valor más cercano al valor promedio obtenido para la energía de ligadura entre alfas. Este enlace se desprecia ya que se puede considerar que las partículas ubicadas en cada una de las puntas de las piramides con base triangular están lo suficientemente lejos, y la partículas en la base están lo suficientemente cerca, para que la interacción entre las partículas de las puntas se apantalle. Cabe notar, que la única discrepancia del valor de saturación E_α se encuentra para el ^8Be la cual no pudo ser explicada por Hafstad y Teller en [9].

Por otra parte, al excitarse el núcleo las partículas alfa en conjunto rotan, vibran alrededor de sus posiciones de equilibrio, o efectúan ambos movimientos produciendo un espectro de energía característico de sistemas mecánico-cuánticos que respetan la estadística de Bose-Einstein; en donde los niveles energéticos modelados son los de baja energía, ya que se debe tener en cuenta “el tiempo de difusión característico” para que tenga validez el modelo. Dicho tiempo, es el que tarda una partícula alfa en desbaratarse en sus constituyentes y es mayor que los tiempos de vibración y rotación de los cúmulos a bajas energías [8].

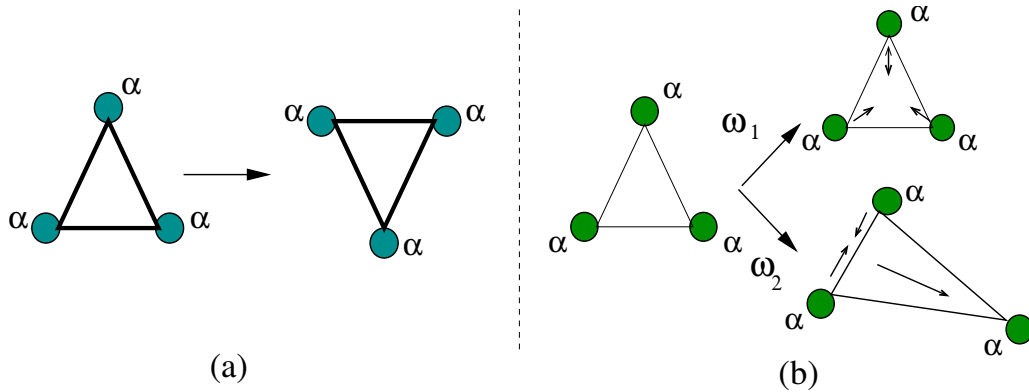


Figura 2.10: Ilustración de excitaciones colectivas del núcleo ^{12}C dentro del modelo de partícula α según Wheeler. (a) Movimiento rotacional y (b) Vibración con oscilaciones ω_1 (**Parte superior**) y ω_2 (**Parte inferior**).

Wheeler [8] presenta las energías predichas por el modelo para núcleos como el ^8Be , el ^{12}C y el ^{16}O en donde la relacionada al Berilio corresponde a la de un rotor rígido con momento de inercia \mathcal{I}_{Be} mayor al de una esfera (ec. 2.3). La del Carbono (ec. 2.4) es una contribución de energía rotacional, la cual según el modelo rotacional equivale a la de un núcleo con número impar de nucleones ($K \neq 0$), más contribuciones vibratorias caracterizadas por una vibración isotrópica del triángulo con frecuencia ω_1 y una vibración ω_2 en donde una de las partículas se aleja de las otras dos, mientras estas se acercan (Figura 2.10). La energía del Oxígeno por su parte, tiene una contribución rotacional más 3 vibratorias con frecuencias ω_1 , ω_2 y ω_3 .

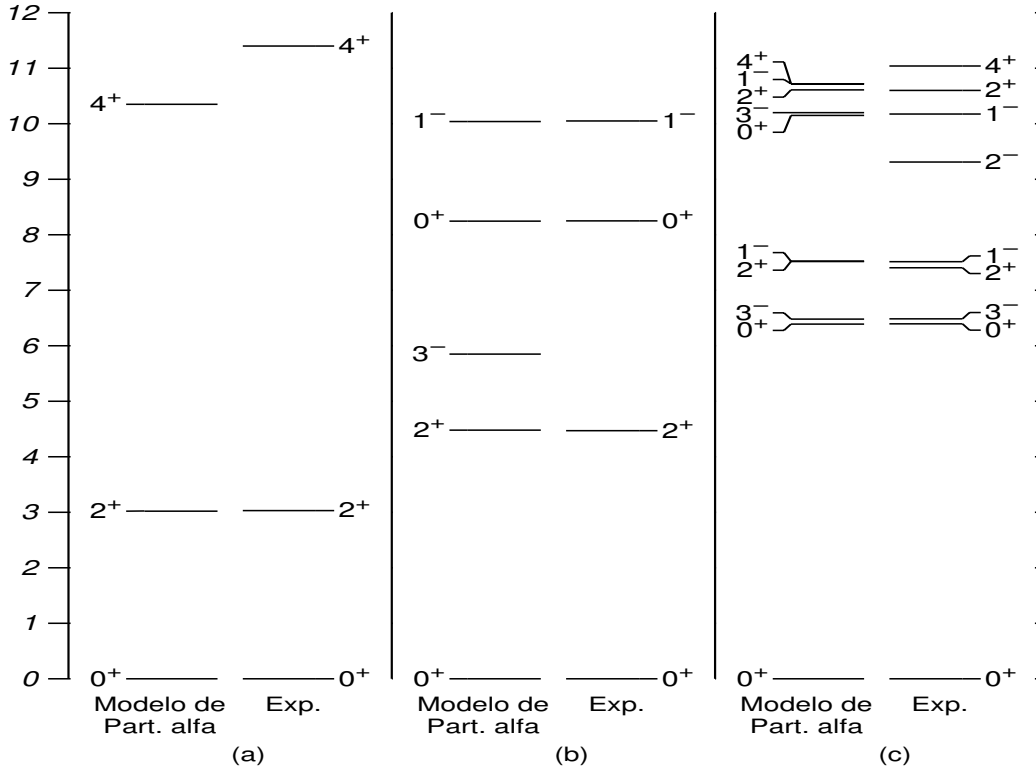


Figura 2.11: Comparación entre los espectros predichos por el modelo de partícula alfa con los experimentales, correspondientes a los núcleos: (a) ${}^8\text{Be}$, (b) ${}^{12}\text{C}$ y (c) ${}^{16}\text{O}$ (tomada de [2]).

Dichas expresiones se encuentran enunciadas a continuación:

$$E_{Be} = E_{01} + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_{Be}} J(J+1) \quad (2.3)$$

$$E_C = E_{02} + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \left[g_1 J(J+1) - (g_1 - g_2) K^2 \right] + \hbar n_1 \omega_1 + \hbar n_2 \omega_2 \quad \text{con } g_1, g_2 < 1 \quad (2.4)$$

$$E_O = E_{03} + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} J(J+1) + \hbar n_1 \omega_1 + \hbar n_2 \omega_2 + \hbar n_3 \omega_3 \quad (2.5)$$

donde \mathcal{I} es el momento de inercia de un núcleo esférico con la misma densidad y masa del núcleo en cuestión, g_1 es un parámetro que está relacionado con el momento de inercia de un triángulo equilátero con respecto al eje de simetría perpendicular al plano en donde se encuentra, g_2 está relacionado con el momento de inercia con respecto a un eje de simetría en el plano del triángulo y K es la proyección del momento total \vec{J} en el eje de la figura triangular. Una comparación entre los espectros predichos por el modelo de partícula alfa y los experimentales para los tres núcleos citados es mostrada en la Figura 2.11, la cual muestra una buena correspondencia entre éstos, aunque con una ligera discrepancia entre los estados 4^+ , 3^- y 2^- correspondientes al ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$ y ${}^{16}\text{O}$ respectivamente.

Capítulo 3

Álgebras cuánticas

Álgebras cuánticas [14, 15] o álgebras deformadas son extensiones de las teorías convencionales de grupos de Lie [14, 20], las cuales se basan en incluir dentro del álgebra asociada a cada grupo uno o varios parámetros de deformación, de tal manera que cuando éste o éstos tiendan a 1, se recupere el álgebra tradicional. Este creciente campo apareció aproximadamente desde 1980 como resultado de investigación matemática, y hoy en día la cantidad de aplicaciones que se le están dando a esta clase de teorías en diversas ramas de la física como física nuclear [16, 17], materia condensada [21], física molecular [22], física de partículas elementales [23], entre otras, es realmente sorprendente.

Para entender la idea intuitiva en lo que se refiere a álgebras cuánticas, primero nótese la idea de deformación en física. En términos de deformación se puede entender que la mecánica cuántica, por ejemplo, así como la teoría relativista, son deformaciones de la mecánica clásica en donde los parámetros respectivos de deformación corresponden a \hbar y $1/c$. En analogía con este proceso de cuantización de la física clásica, se puede deformar el espacio euclidiano vectorial bidimensional para obtener uno deformado en donde sus coordenadas no conmutan, con lo cual se construye un cálculo diferencial no conmutativo.

¿Cómo es esto?

En el espacio vectorial de funciones $f(x, y)$ se cumplen, entre otras, las siguientes relaciones de conmutación:

$$[x, y] = 0, \quad [\partial_x, \partial_y] = 0, \quad [\partial_x, x] = 1; \quad (3.1)$$

mientras que en el correspondiente espacio deformado ahora se cumple:

$$XY = qYX, \quad \partial_X \partial_Y = q^{-1} \partial_Y \partial_X, \quad \partial_X X - q^2 X \partial_X = 1 + (q^2 - 1)Y \partial_Y, \quad (3.2)$$

donde q es el parámetro de deformación.

De lo anterior se debe notar que cuando este parámetro tiende a 1, las anteriores relaciones de conmutación tienden a las dadas en (3.1).

Entonces existen dos tendencias de estudio de los “grupos cuánticos”¹, una abarca aspectos algebraicos, de operadores, de espacios vectoriales, representaciones matriciales, entre otros. Mientras que la segunda tiene que ver con la implicación de la no conmutatividad del espacio sobre la geometría diferencial.

3.1 Formalismo algebraico deformado

Para construir grupos deformados es útil definir los q -números de la siguiente manera:

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad \text{con} \quad \lim_{q \rightarrow 1} [x] = x; \quad (3.3)$$

la cual se mantiene igualmente si x es un operador y cuya cualidad interesante es su invarianza al intercambiar q por q^{-1} .

Algunos ejemplos de estos q -números, obtenidos haciendo uso de la definición (3.3) son mostrados a continuación, en donde se debe notar la correspondencia exacta con los convencionales para el cero y el uno:

$$[0] = 0, \quad [1] = 1, \quad [2] = q + q^{-1}, \quad [3] = q^2 + 1 + q^{-2}; \quad (3.4)$$

es muy usual tomar a q definido en términos de un parámetro τ como un factor real $q = e^\tau$ o como un factor de fase $q = e^{i\tau}$, en donde el q -número se convierte en:

$$[x] = \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh \tau} = \left[\tau x + \frac{(\tau x)^3}{3!} + \dots \right] \sinh^{-1}(\tau) \quad \text{si} \quad q = e^\tau, \quad (3.5)$$

$$[x] = \frac{\sin(\tau x)}{\sin \tau} = \left[\tau x - \frac{(\tau x)^3}{3!} + \dots \right] \sin^{-1}(\tau) \quad \text{si} \quad q = e^{i\tau}; \quad (3.6)$$

observándose de lo anterior, que el hecho de tener q -números implica la aparición de una dependencia potencial de x . Además, entre éstos se pueden demostrar diversas propiedades que facilitan cálculos, como por ejemplo la siguiente relación:

$$[a][b+1] - [b][a+1] = [a-b]. \quad (3.7)$$

Por otra parte, en términos de los q -números se pueden q -deformar funciones elementales como el q -factorial, el q -coeficiente binomial, la función q -exponencial, entre otras. La Tabla 3.1, muestra una comparación entre las relaciones q -deformadas y las convencionales, en donde se observa directamente que si q tiende a 1 se recuperan éstas últimas.

¹El nombre comúnmente dado a las álgebras deformadas es el de “grupos cuánticos”, el cual es erróneo en sentido literal ya que un “grupo cuántico” en realidad no es un grupo sino un álgebra con parámetro o parámetros que la deforman, que en la mayoría de los casos es aplicado a un sistema mecánico-cuántico que involucra operadores que son función de este parámetro o parámetros de deformación.

Tabla 3.1: Comparación entre funciones elementales convencionales con las q -deformadas.

Función estándar	Función q -deformada
$n! = 1.2\dots(n-1)n$	$[n]! = [1][2]\dots[n-1][n]$
$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(m-n)!n!}$	$\binom{[n]}{[m]} = \frac{[n]!}{[m-n]![n]!}$
$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!}$	$e_q(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{[n]!}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\sin_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{[2n+1]!}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\cos_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{[2n]!}$

3.2 Ejemplos de sistemas q -deformados

3.2.1 El oscilador armónico q -deformado unidimensional

Antes de entrar en detalle sobre la energía que caracteriza un oscilador armónico q -deformado unidimensional, es útil mencionar los operadores q -deformados de creación $\hat{\mathfrak{A}}^\dagger$ y de destrucción $\hat{\mathfrak{A}}$ cuya acción sobre la base del espacio de Fock de autoestados de un oscilador armónico unidimensional ordinario es:

$$\hat{\mathfrak{A}}|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle, \quad \hat{\mathfrak{A}}^\dagger|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle; \quad (3.8)$$

en donde el operador $\hat{\mathfrak{A}}$ sobre el ket $|0\rangle$ produce el estado nulo $|^0\rangle$, mientras que la acción repetida n veces del operador $\hat{\mathfrak{A}}^\dagger$ sobre el ket $|0\rangle$ origina el estado $|n\rangle$, esto es:

$$\hat{\mathfrak{A}}|0\rangle = |^0\rangle, \quad |n\rangle = \frac{\hat{\mathfrak{A}}^{\dagger n}|0\rangle}{\sqrt{[n]!}}.$$

Adicionalmente, entre los operadores creación y destrucción q -deformados se cumplen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{A}}^\dagger - q^{\pm 1}\hat{\mathfrak{A}}^\dagger\hat{\mathfrak{A}} = q^{\pm \hat{\mathcal{N}}}, \quad [\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathfrak{A}}] = -\hat{\mathfrak{A}}, \quad [\hat{\mathcal{N}}, \hat{\mathfrak{A}}^\dagger] = \hat{\mathfrak{A}}^\dagger, \quad (3.9)$$

con $\hat{\mathcal{N}}$ el operador número deformado cuya relación análoga a la convencional en términos de los correspondientes operadores deformados se encuentra dada por:

$$\hat{\mathfrak{A}}^\dagger\hat{\mathfrak{A}} = [\hat{\mathcal{N}}]; \quad (3.10)$$

además, del mismo modo se puede hallar la relación análoga a $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, escrita como:

$$\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{A}}^\dagger = [\hat{\mathcal{N}} + 1]. \quad (3.11)$$

Existen relaciones entre los operadores creación y destrucción deformados con los sin deformar, de las cuales se puede demostrar fácilmente la hermiticidad de los operadores deformados en cuestión, éstas son:

$$\hat{\mathfrak{a}} = \sqrt{\frac{[\hat{\mathcal{N}} + 1]}{\hat{\mathcal{N}} + 1}} \hat{a} = \hat{a} \sqrt{\frac{[\hat{\mathcal{N}}]}{\hat{\mathcal{N}}}}, \quad \hat{\mathfrak{a}}^\dagger = \sqrt{\frac{[\hat{\mathcal{N}} + 1]}{\hat{\mathcal{N}} + 1}} \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \sqrt{\frac{[\hat{\mathcal{N}}]}{\hat{\mathcal{N}}}},$$

observándose que se recuperan los operadores usuales de creación y destrucción si el parámetro de deformación tiende a 1.

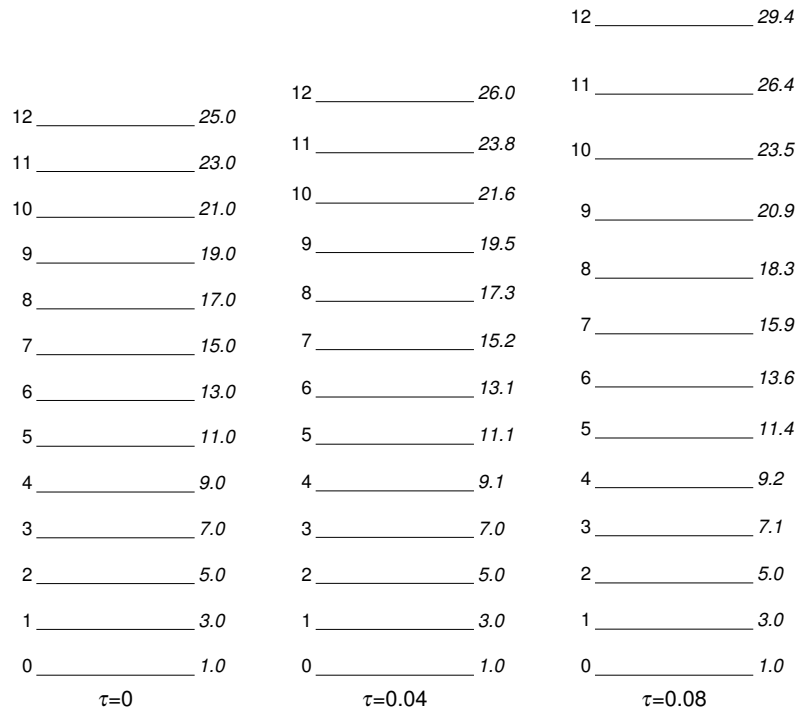


Figura 3.1: Comparación entre el espectro energético del oscilador armónico unidimensional sin deformar ($\tau = 0$) con los correspondientes deformados para distintos valores de τ con $q = e^\tau$ (ec. (3.13)), tomados en unidades de $\frac{\hbar\omega}{2}$.

Por otra parte, el hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional q -deformado se encuentra descrito de la misma manera que para el caso sin deformar sólo que en este caso los operadores escalera correspondientes son los q -deformados, es decir:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{\mathfrak{a}}\hat{\mathfrak{a}}^\dagger + \hat{\mathfrak{a}}^\dagger\hat{\mathfrak{a}}),$$

reemplazando las ecuaciones (3.10) y (3.11) para hallar el hamiltoniano en términos del operador número resulta:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}([\hat{\mathcal{N}}] + [\hat{\mathcal{N}} + 1]); \quad (3.12)$$

con lo cual se puede demostrar que la correspondiente energía del oscilador es:

$$E(n) = \frac{\hbar\omega}{2}([n] + [n + 1]).$$

Si el parámetro de deformación q es real ($q = e^\tau$) esta energía puede ser expresada como

$$E(n) = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\sinh(\tau(n + \frac{1}{2}))}{\sinh(\frac{\tau}{2})}, \quad (3.13)$$

mientras que si éste es complejo $q = e^{i\tau}$ se tiene la siguiente relación:

$$E(n) = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\sin(\tau(n + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{\tau}{2})}, \quad (3.14)$$

cuyo límite para (τ) tendiendo a cero equivale a la energía del oscilador armónico unidimensional convencional.

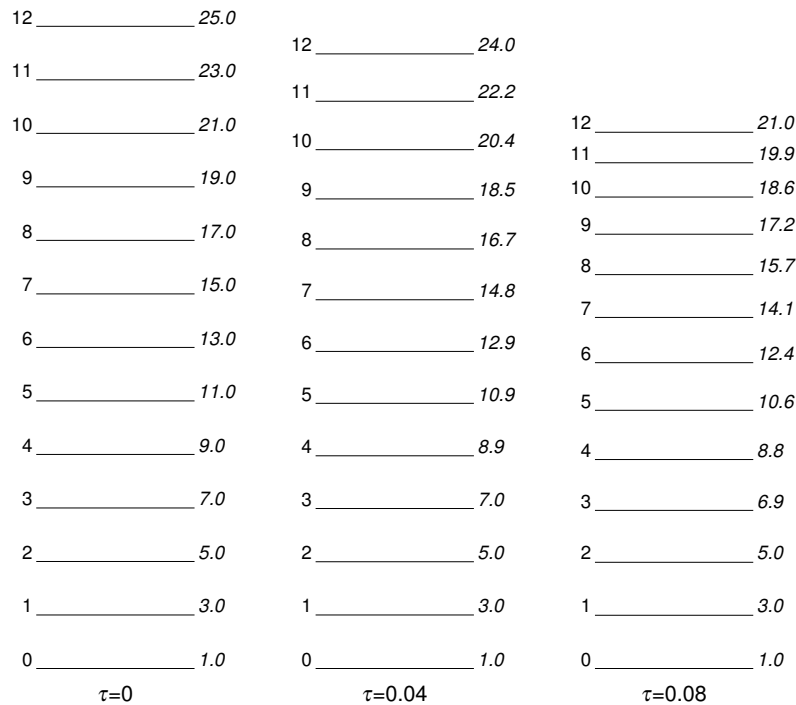


Figura 3.2: Comparación entre el espectro energético del oscilador armónico unidimensional sin deformar ($\tau = 0$) con los correspondientes deformados para distintos valores de τ con $q = e^{i\tau}$ (ec. (3.14)) tomados en unidades de $\frac{\hbar\omega}{2}$.

De las funciones para las energías en el caso deformado, se observa al expandirlas que la dependencia de la energía del oscilador con el número cuántico n ya no es lineal, si no que

depende de potencias de dicho número cuántico; por lo que se dice que la energía del oscilador presenta “anarmonicidades”. Estas mencionadas discrepancias entre los espectros energéticos del oscilador convencional y deformado son presentadas en la Figura 3.1 para el caso $q = e^\tau$ y en la Figura 3.2 para $q = e^{i\tau}$. Cabe notar de las gráficas que a medida que los valores de τ van aumentando la diferencia de los valores de energía entre números cuánticos se va haciendo mayor; de donde se tiene una “compresión” del espectro cuando q es complejo y una “elongación” cuando q es real. En adición a lo anterior, se tiene que la diferencia entre espectros no es notoria a bajos números cuánticos y pequeños parámetros τ ya que para tales valores las expresiones tienden a la de energía de un oscilador sin deformar.

Vale la pena resaltar al observar la Figura 3.1 que espectros deformados con $q = e^\tau$ son buenos candidatos para modelar bandas nucleares vibracionales, ya que en realidad en física nuclear no existen “vibradores perfectos”. Por ejemplo, existen núcleos cuyas energías de transición vibracionales son relativamente iguales, en este caso se podría tomar un vibrador deformado con un valor de τ tendiendo a cero puesto que el alejamiento de la banda con respecto a una vibracional pura no es mucho. También existen casos en donde el espectro vibracional a bajos valores de energía presentan una separación entre estados relativamente igual y a mayores valores de ésta dicha separación aumenta. En este caso sería útil tomar para modelar el espectro un vibrador q -deformado ($q = e^\tau$) con valor de τ alejado de cero ($\tau \geq 0.08$).

También al observar la Figura 3.2 se tiene que para valores altos de τ ($\tau \geq 0.08$), un sistema físico que podría ser modelado por un oscilador q -deformado con $q = e^{i\tau}$ es el de un átomo hidrogenoide en donde el espaciamiento entre niveles de energía disminuye a medida que aumenta el número cuántico. Para valores de τ cercanos a cero, al igual que en el caso $q = e^\tau$, buenos candidatos para ser modelados son espectros vibracionales nucleares.

3.2.2 Rotor rígido q -deformado

La energía de un rotor rígido q -deformado puede ser hallada en términos de los generadores q -deformados del “grupo cuántico” $SO_q(3)$ cuya álgebra tiende a la del grupo de Lie $SO(3)$ cuando el parámetro de deformación de q ésta tiende a 1. Los generadores esféricos de dicho “grupo cuántico” son los operadores de momento angular q -deformados $\hat{\mathcal{J}}^+$, $\hat{\mathcal{J}}^-$ y $\hat{\mathcal{J}}^0$ los cuales satisfacen:

$$[\hat{\mathcal{J}}^0, \hat{\mathcal{J}}^+] = \hbar \hat{\mathcal{J}}^+, \quad [\hat{\mathcal{J}}^0, \hat{\mathcal{J}}^-] = -\hbar \hat{\mathcal{J}}^-, \quad [\hat{\mathcal{J}}^+, \hat{\mathcal{J}}^-] = \hbar [2\hat{\mathcal{J}}^0]. \quad (3.15)$$

Cabe notar que las dos primeras relaciones conservan la misma forma del caso no deformado, mientras que la última corresponde al número cuántico $[2\hat{\mathcal{J}}^0]$, el cual teniendo en cuenta (3.5), puede ser escrito de la siguiente manera si ($q = e^\tau$):

$$[2\hat{\mathcal{J}}^0] = \frac{\sinh(2\tau \hat{\mathcal{J}}^0)}{\sinh(\tau)} = \frac{1}{\sinh(\tau)} \left[2\tau \hat{\mathcal{J}}^0 + \frac{1}{3!} (2\tau \hat{\mathcal{J}}^0)^3 + \frac{1}{5!} (2\tau \hat{\mathcal{J}}^0)^5 + \dots \right], \quad (3.16)$$

en cambio si se toma a q como el factor complejo $e^{i\tau}$ se tiene

$$[2\hat{\mathcal{J}}^0] = \frac{\sin(2\tau\hat{\mathcal{J}}^0)}{\sin(\tau)} = \frac{1}{\sin(\tau)} \left[2\tau\hat{\mathcal{J}}^0 - \frac{1}{3!}(2\tau\hat{\mathcal{J}}^0)^3 + \frac{1}{5!}(2\tau\hat{\mathcal{J}}^0)^5 + \dots \right]. \quad (3.17)$$

Además, se puede demostrar que la acción de los generadores del grupo deformado sobre los kets $|jm\rangle$ es la siguiente:

$$\hat{\mathcal{J}}^0|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle, \quad \hat{\mathcal{J}}^+|jm\rangle = \hbar\sqrt{[j-m][j+m+1]}|jm+1\rangle \quad (3.18)$$

$$\hat{\mathcal{J}}^-|jm\rangle = \hbar\sqrt{[j+m][j-m+1]}|jm-1\rangle, \quad (3.19)$$

de donde se observa que la acción del operador $\hat{\mathcal{J}}^0$ sobre el ket $|jm\rangle$ es de la misma forma que para el caso sin deformar mientras que la de los operadores $\hat{\mathcal{J}}^+$ y $\hat{\mathcal{J}}^-$ se encuentra en términos de q -números correspondiendo dichas acciones a los casos sin deformar cuando q tiende a 1. Además, en adición a lo anterior, se pueden encontrar las relaciones existentes entre los operadores pertenecientes al “grupo cuántico” $SO_q(3)$ y al grupo de Lie sin deformar $SO(3)$, las cuales son:

$$\hat{\mathcal{J}}^0 = J_0 \quad \hat{\mathcal{J}}^+ = \sqrt{\frac{[j-m][j+m+1]}{(j-m)(j+m+1)}} J_+ \quad \hat{\mathcal{J}}^- = \sqrt{\frac{[j+m][j-m+1]}{(j+m)(j-m+1)}} J_-;$$

de las cuales se nota la no deformación del operador J_0 y que la deformación de los operadores J_+ y J_- es consistente con el hecho de recuperar los operadores convencionales cuando el parámetro de deformación q tiende a 1.

Por otra parte, se tiene que la energía para un rotor rígido teniendo en cuenta álgebras cuánticas está dada por la siguiente relación:

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} [j][j+1], \quad (3.20)$$

la cual, si $q = e^\tau$ puede ser escrita como

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} \frac{\sinh(\tau j) \sinh(\tau(j+1))}{\sinh^2(\tau)}, \quad (3.21)$$

que al expandir en Taylor los senos hiperbólicos se convierte en:

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} \frac{1}{\sinh^2(\tau)} \left[\tau j + \frac{(\tau j)^3}{3!} + \frac{(\tau j)^5}{5!} + \dots \right] \left[\tau(j+1) + \frac{(\tau(j+1))^3}{3!} + \frac{(\tau(j+1))^5}{5!} + \dots \right] \quad (3.22)$$

e igualmente para q tomado como un factor de fase ($q = e^{i\tau}$) se tiene la siguiente expresión:

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} \frac{\sin(\tau j) \sin(\tau(j+1))}{\sin^2(\tau)}, \quad (3.23)$$

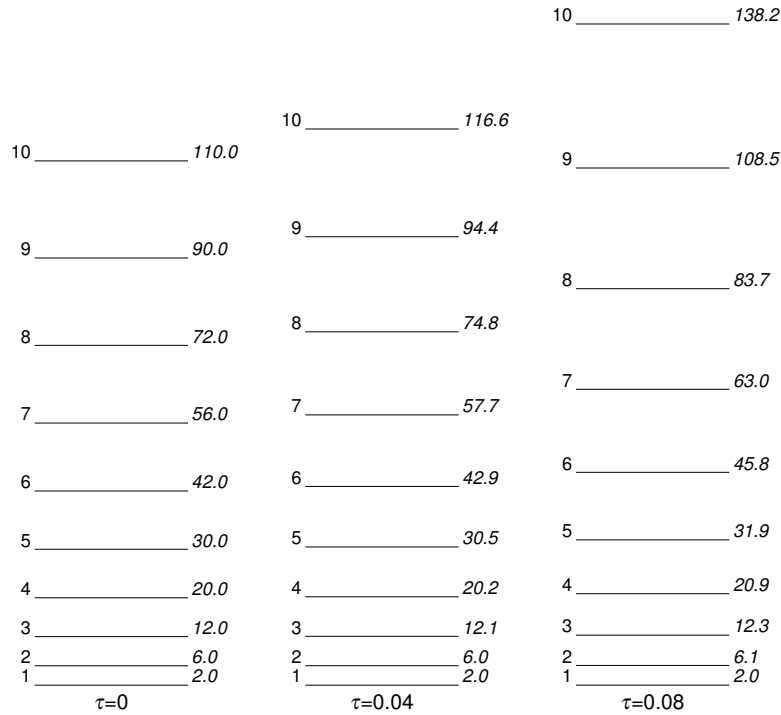


Figura 3.3: Comparación entre el espectro energético de un rotor rígido sin deformar ($\tau = 0$) con espectros deformados para distintos valores de τ siendo $q = e^\tau$ (ec. (3.21)), tomados en unidades de $\frac{\hbar^2}{2I}$.

cuya expansión en Taylor de las funciones involucradas proporciona

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} \frac{1}{\sin^2(\tau)} \left[\tau j - \frac{(\tau j)^3}{3!} + \frac{(\tau j)^5}{5!} + \dots \right] \left[\tau(j+1) - \frac{(\tau(j+1))^3}{3!} + \frac{(\tau(j+1))^5}{5!} + \dots \right]. \quad (3.24)$$

Al observar las anteriores expresiones se tiene, al igual que para el caso del oscilador, que la energía de un rotor rígido ya no depende cuadráticamente con el número cuántico j sino que aparecen anarmonicidades que pueden ser utilizadas en muchas situaciones físicas que involucren este hecho.

La Figura 3.3 muestra el espectro de un rotor rígido en comparación con los obtenidos para los casos q -deformados con parámetros τ de 0, 0.04 y 0.08 provenientes de la ecuación (3.21). Así mismo, la Figura 3.4 muestra los espectros obtenidos de la relación (3.23) en comparación con el convencional. De los espectros en cuestión se observa, que a medida que va aumentando el valor de (τ) los valores de energía asociados a un número cuántico se van alejando de los valores correspondientes a un rotor rígido.

Un aspecto a resaltar es que debido a que en física nuclear la mayoría de espectros rotacionales no son exactamente los de un rotor rígido, se tiene que en general, se podría emplear la energía de un rotor q -deformado para describirlos ya que ésta presenta *anar-*

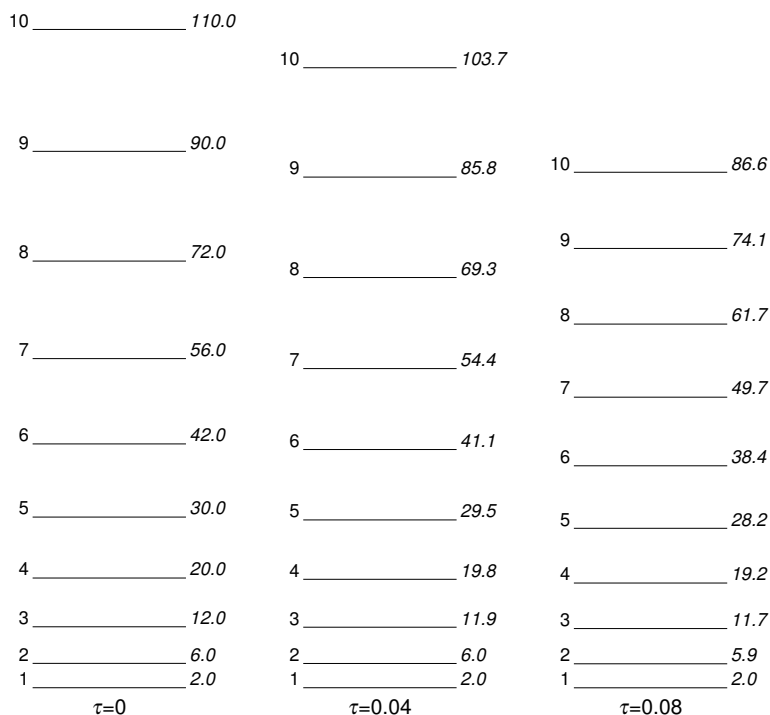


Figura 3.4: Comparación entre el espectro energético de un rotor rígido sin deformar ($\tau = 0$) con espectros deformados para distintos valores de τ siendo $q = e^{i\tau}$ (ec. (3.23)), tomados en unidades de $\frac{\hbar^2}{2I}$.

monicidades, es decir, términos perturbativos que no tiene en cuenta el modelo rotacional nuclear de rotor rígido al considerar al núcleo como un “todo rotante”.

3.3 Álgebras deformadas correspondientes a los grupos de Lie usuales

Los grupos de Lie convencionales pueden ser clasificados de acuerdo a las propiedades de las representaciones matriciales de los elementos del grupo. Entre estas se encuentran el carácter real o complejo de los elementos matriciales, si su determinante es igual a 1, si existe una relación entre su inversa y su traspuesta, entre otras. Por ejemplo, el grupo $GL(n, \mathbb{C})$ consta de representaciones matriciales complejas de n dimensiones; contenido en éste se encuentra el grupo $SL(n, \mathbb{C})$ el cual tiene asociado matrices $n \times n$ con determinante igual a 1 que pertenecen a los complejos. El grupo $SU(n, \mathbb{C})$ por su parte, presenta matrices con determinante 1 y cuya relación entre elementos de carácter complejo es tal que se cumple que las inversas de estas matrices son iguales a sus adjuntas. En cambio, las representaciones matriciales del grupo $SO(n, \mathbb{R})$ presentan determinante igual a 1 y la condición de ortogonalidad que equivale a que la inversa de éstas matrices es igual a su

traspuesta.

De acuerdo a las propiedades que clasifican los grupos de Lie se tiene que ciertos grupos se encuentran contenidos dentro de otros; entonces según lo anteriormente expuesto resulta:

$$GL(n, \mathbb{C}) \supset SL(n, \mathbb{C}) \supset SU(n, \mathbb{C}) \supset SO(n, \mathbb{R}).$$

En la Tabla 3.2 se resumen las principales características de estos grupos de Lie en donde A equivale a su representación matricial.

Tabla 3.2: Propiedades fundamentales de algunos grupos de Lie.

Nombre	Símbolo	Propiedades
<i>Grupo General Lineal Complejo</i>	$GL(n, \mathbb{C})$	$\det A \neq 0$
<i>Grupo Especial Lineal Complejo</i>	$SL(n, \mathbb{C})$	$\det A = 1$
<i>Grupo Especial Unitario Complejo</i>	$SU(n, \mathbb{C})$	$\det A = 1, A^{-1} = A^\dagger$
<i>Grupo Especial Ortogonal Real</i>	$SO(n, \mathbb{R})$	$\det A = 1, A^{-1} = A^T$

Dentro de las álgebras deformadas o grupos cuánticos se encuentra una clasificación similar para las matrices cuánticas que en este caso no conforman un grupo bajo la multiplicación matricial sino un álgebra denominada álgebra de Hopf; siendo $gl_q(n, \mathbb{C})$, $sl_q(n, \mathbb{C})$, $su_q(n, \mathbb{C})$ y $so_q(n, \mathbb{R})$ las extensiones deformadas de $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $SU(n, \mathbb{C})$ y $SO(n, \mathbb{R})$ respectivamente, es decir, existen matrices que cumplen las propiedades de un álgebra de Hopf y según sea el caso, las de especialidad, unitariedad, ortogonalidad, entre otras. Además éstas son tales que cuando el parámetro de deformación del álgebra que en este caso es q tiende a 1, se recuperan las matrices usuales del grupo de Lie correspondiente.

3.3.1 Matrices del álgebra deformada $su_q(2)$

Una matriz n dimensional perteneciente a $gl_q(n, \mathbb{C})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \dots \\ t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \dots \\ t_3^1 & t_3^2 & t_3^3 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

consta de elementos t_j^i que dependen implícitamente del parámetro q y que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación entre sí ya que son elementos de un álgebra no conmutativa:

$$t_j^i t_l^i = q^{-1} t_l^i t_j^i \quad (l > j) \quad (3.26)$$

$$t_j^i t_j^k = q^{-1} t_j^k t_j^i \quad (k > i) \quad (3.27)$$

$$[t_j^k, t_l^i] = 0 \quad (k > i, l > j) \quad (3.28)$$

$$[t_j^i, t_l^k] = -(q - q^{-1})t_l^i t_j^k \quad (k > i, l > j); \quad (3.29)$$

que para dos dimensiones se define como la matriz T dada por:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

en cuyo caso las relaciones (3.26)-(3.29) se convierten en

$$ab = q^{-1}ba, \quad ac = q^{-1}ca, \quad bd = q^{-1}db, \quad cd = q^{-1}dc, \quad (3.31)$$

$$bc = cb, \quad [a, d] = -(q - q^{-1})bc, \quad (3.32)$$

las cuales pueden ser resumidas en el diagrama de la Figura 3.5.

Dentro de $gl_q(n)$ se encuentra definida la función q determinante la cual es análoga al determinante de una matriz no deformada $n \times n$. Esta es:

$$\det_q(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) t_{\sigma_1}^1 t_{\sigma_2}^2 \dots t_{\sigma_n}^n, \quad (3.33)$$

en donde el índice σ es sobre todas las permutaciones del grupo simétrico S_n y el índice $\epsilon(\sigma)$ se encuentra descrito por la siguiente relación, la cual se anula para índices repetidos:

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{j < k} (-q^{-1/2}) = (-q^{-1/2})^{l(\sigma)} \quad (3.34)$$

siendo $l(\sigma)$ la longitud de σ .

En el caso en el que esta función q determinante sea igual a 1, se tiene que la matriz n dimensional (3.25) se encuentra en $sl_q(n)$.

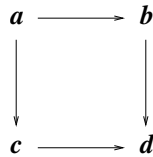


Figura 3.5: Diagrama memotécnico de relaciones de conmutación entre elementos de una matriz de $gl_q(2)$.

Perteneciente a $gl_q(2)$ también se encuentra la matriz inversa de T definida por

$$T^{-1} = \det_q T \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

luego, si se impone la condición $T^{-1} = T^\dagger$ y que $\det_q T = 1$ se puede hallar que la matriz T perteneciente a $su_q(2)$, resulta ser:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

cuyas relaciones de conmutación entre los elementos que conforman esta matriz son las siguientes:

$$ab = q^{-1}ba, \quad ab^* = q^{-1}b^*a, \quad ba^* = q^{-1}a^*b, \quad b^*a^* = q^{-1}a^*b^* \quad (3.37)$$

$$bb^* = b^*b, \quad [a, a^*] = (q^2 - 1)bb^* \quad (3.38)$$

y en donde la función q determinante asociada a esta matriz (ec. (3.36)) proveniente de la definición (3.33) conmuta con cada uno de los elementos que la conforman, ésta es:

$$\det_q T = ad - q^{-1}bc. \quad (3.39)$$

Capítulo 4

Características del núcleo ^{32}S

4.1 Estabilidad y ubicación en la tabla de isótopos

Existen núcleos que en su estado base tienen un exceso de energía (inestables) con respecto al estado base de otro estable, dentro de los cuales se encuentra el ^{32}S y por lo tanto para observar su espectro característico de excitación gamma, es necesario transmitirle mediante algún proceso energía, como por ejemplo una colisión. En la Figura 4.1 se tiene un esquema de decaimiento en una región de masa nuclear con $A = 32$, en la cual se muestra como núcleos con el mismo número de masa y distinto número tanto de protones como de neutrones, se desexcitan mediante decaimiento β o captura electrónica, hasta llegar al ^{32}S .

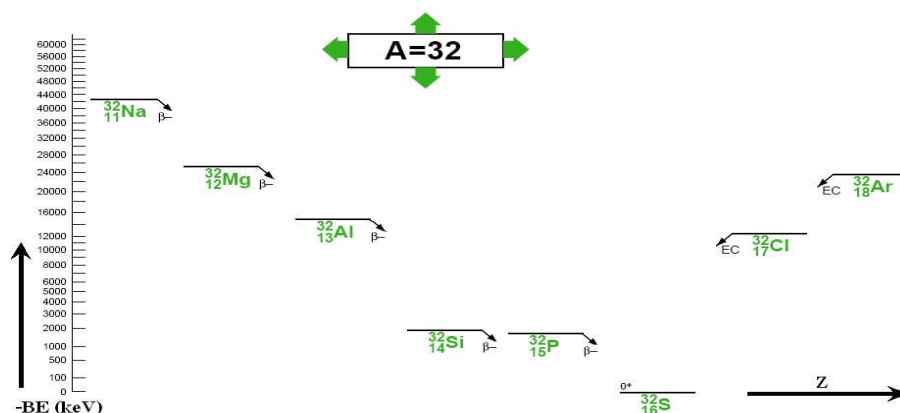


Figura 4.1: Esquema de decaimiento de núcleos en la región de $A = 32$. En el eje y se muestra la energía de ligadura tomando como referencia la del ^{32}S y en el eje x aumenta el número de protones para cada núcleo de izquierda a derecha. Observe que el ^{32}S es el más ligado y por lo tanto el más estable.

4.2 Análisis del esquema de niveles

En esta sección se presenta un esquema de niveles del ^{32}S para energías menores que 9000 keV (bajas energías de excitación) en orden ascendente de spin, del cual se observan las banda del estado base y de Yrast. La banda del estado base (Figura 4.2) es de naturaleza vibracional, cuyas excitaciones asociadas son de carácter cuadrupolar, es decir, presenta, un estado de excitación que involucra un fonón y otro estado dos fonónico al doble de la energía del primero (ver sección 2.1).

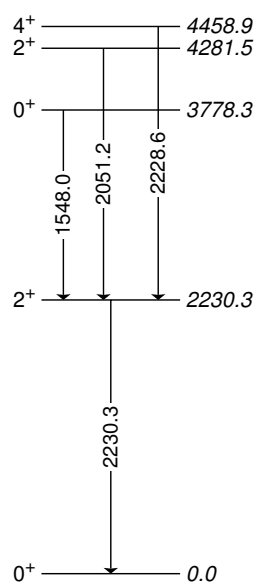


Figura 4.2: Banda del estado base del núcleo ^{32}S .

Existen varias formas de chequear si la banda es vibracional, la más sencilla es la simple comparación de las figuras (2.1) y (4.2), en donde se observa que el spin de cada estado con su paridad corresponden, y que el triplete energético asociado al estado dos fonónico se encuentra aproximadamente al doble de la energía del primer estado excitado. Sin embargo, como es de suponerse, esto no es suficiente para definir si los estados en cuestión son vibratoriales, por eso se tienen en cuenta dos criterios adicionales. El primero es la razón $E(4_1^+)/E(2_1^+)$ entre el estado con spin 4^+ perteneciente al triplete dos fonónico y el estado 2^+ del primer estado excitado¹; la cual teóricamente es 2 y para este núcleo en particular es de 1.92 muy cerca al valor esperado teórico. El segundo tiene que ver con el carácter cuadrupolar eléctrico $E2$ involucrado en las transiciones $4_1^+ \rightarrow 2_1^+$ y $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$;

¹El subíndice 1 significa que es el estado de más baja energía con el spin y la paridad dados.

esto es, si se cumple²:

$$\frac{B(E2 : 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2 : 2_1^+ \rightarrow 0^+)} = 2$$

se tiene que los estados pertenecen a una banda vibracional de carácter cuadrupolar, siendo $B(E2 : 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ y $B(E2 : 2_1^+ \rightarrow 0^+)$ probabilidades de transición cuadrupolar eléctrica. Esta razón para el ^{32}S se encuentra dada experimentalmente [24] por 1.7 ± 0.3 , de donde se concluye que la banda es vibracional. En la Figura 4.3 se muestra un esquema experimental de la razón $\frac{B(E2:4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2:2_1^+ \rightarrow 0^+)}$ en función de $E(4_1^+)/E(2_1^+)$ de donde se observa que la banda del estado base de este núcleo es evidentemente vibracional.

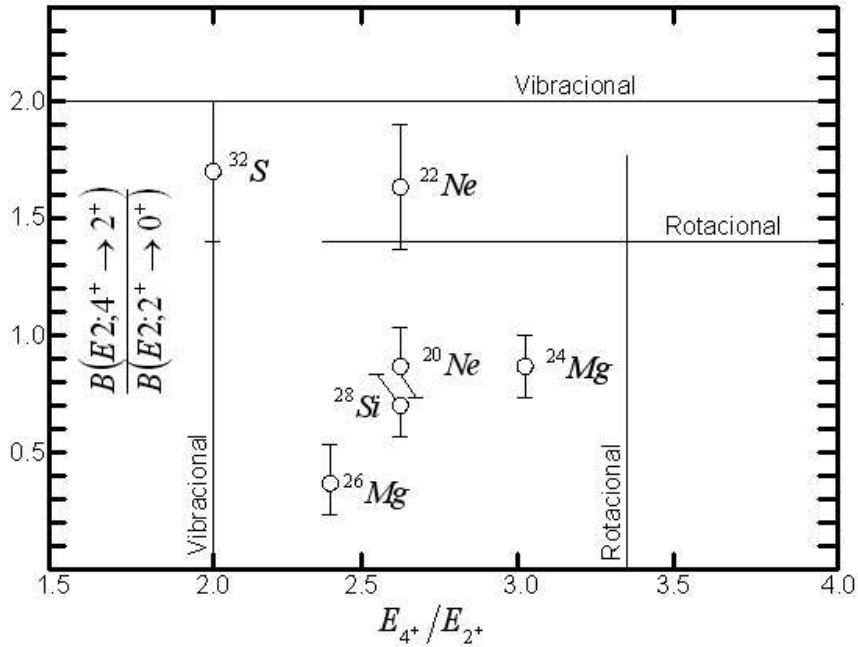


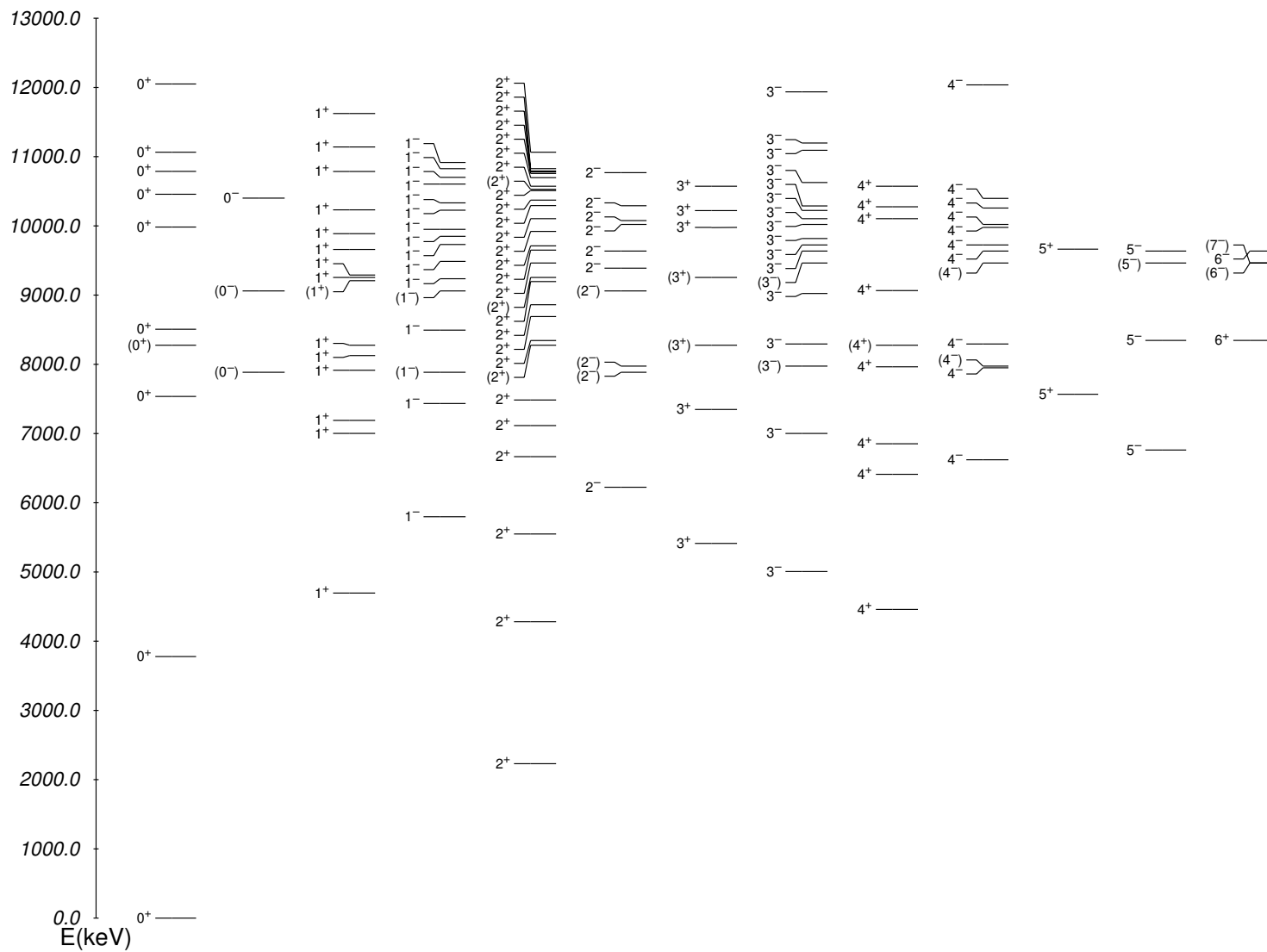
Figura 4.3: Esquema experimental de la razón $\frac{B(E2:4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2:2_1^+ \rightarrow 0^+)}$ en función de $E(4_1^+)/E(2_1^+)$ para algunos núcleos con A entre 20 y 32. Para núcleos rotacionales los valores teóricos de $\frac{B(E2:4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2:2_1^+ \rightarrow 0^+)}$ y $E(4_1^+)/E(2_1^+)$ son aproximadamente 1.4 y 3.3.

²La probabilidad de transición $B(E2 : j_i \rightarrow j_f)$ entre un estado j_f y uno j_i está dada por $B(E2 : j_i \rightarrow j_f) = \frac{1}{2j_i+1} \langle \phi_i | E2 | \phi_j \rangle$.

Espectro del ^{32}S en orden ascendente de spin

30

4.2. Análisis del esquema de niveles



Ahora, a partir del esquema de niveles energéticos del ^{32}S [25] de la página anterior, se obtiene la banda Yrast al tomar para un determinado spin la mínima energía o equivalentemente para una energía el máximo spin; es decir, en una gráfica de energía en función del spin no existen estados por debajo de la curva que la describe. Esta se presenta en la Figura 4.4 la cual muestra los niveles 0^+ , 2^+ y 4^+ pertenecientes a la banda del estado base y los estados 5^- y 7^- que no presentan una correlación aparente de tipo vibracional con los 3 primeros.

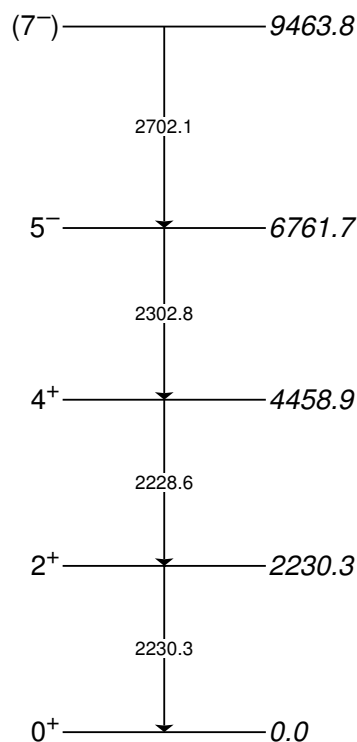


Figura 4.4: Banda de Yrast del núcleo ^{32}S .

A altas energías de excitación ($E > 9$ MeV) el núcleo ^{32}S ha sido poco estudiado. Sin embargo, se ha logrado obtener por medio de la reacción $^{16}\text{O}(^{20}\text{Ne},\alpha)^{32}\text{S}$ un espectro de excitación característico, en donde el ^{20}Ne es disparado contra un blanco de ^{16}O , originándose de tal proceso el núcleo ^{32}S altamente excitado y una partícula α . Los espectros obtenidos de esta forma parecen tener un comportamiento $J(J+1)$ lo que indica que podrían ser rotacionales [26]. También se han realizado cálculos según el modelo de cúmulos tomando al ^{32}S como compuesto por dos ^{16}O y en tal caso se han predicho bandas cuyas energías parecen seguir la misma secuencia ($J(J+1)$) y las cuales están acorde con los resultados experimentales [27].

En las Figura 4.5 se encuentran dos bandas, que según [26] y [27] parecen ser rotacionales; aunque, al observarlas y analizar las energías de transición no presentan un comportamien-

to rotacional perfecto. En la Banda 2 los datos provienen de dos experimentos distintos y el estado base de 9.6 MeV se halla muy próximo al primer estado excitado que es de 9.7 MeV, de tal forma que no parece ser el valor cabeza de banda, es más en [27] los autores enuncian que éste no se encuentra confirmado experimentalmente pero lo proponen con relación a otro experimento en donde existe un pequeño pico experimental alrededor de este valor con spin 0^+ que parece pertenecer a la misma banda.

Es por estas discrepancias que muestran las bandas en cuestión con respecto a las “rotacionales perfectas” que se pretende utilizar la energía de un rotor q -deformado para su descripción ya que el comportamiento $J(J + 1)$ con algunas variaciones podría ser modelado con las anarmonicidades adicionales que introduce. Las bandas de Yrast y del estado base no se analizarán en este trabajo; puesto que en la primera los estados no parecen estar correlacionados y en la segunda es necesario introducir otro parámetro de ajuste y sólo se tienen tres puntos ³.

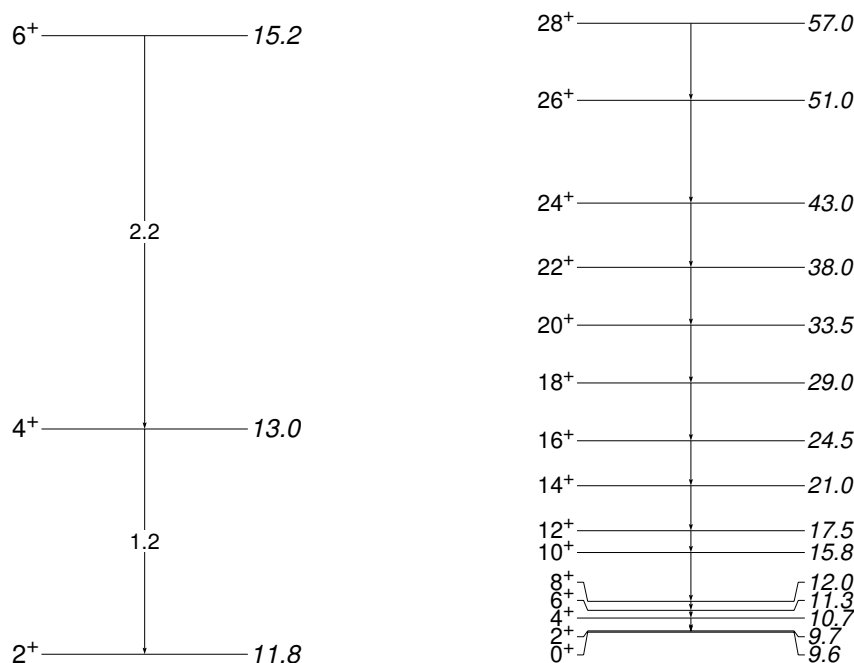


Figura 4.5: Bandas rotacionales a altas energías de excitación ($E > 9$ MeV) del núcleo ^{32}S . Los datos experimentales de la Banda 1 (**Izquierda**) son tomados de [26], mientras que los de la Banda 2 (**Derecha**) se encuentran en [27].

³En [18, 28] se presenta que para ciertas regiones nucleares ($A \sim 80, 150$), en el modelamiento de bandas vibracionales es útil añadir un parámetro (c) a la energía del rotor q deformado; ya que, según el valor, permite que a partir de la energía de un rotor se obtenga la de un vibrador. Esta energía q deformada se encuentra descrita por $E = \frac{\hbar^2}{2I} [j][j + c]$.

4.3 Configuración geométrica del ^{32}S según el modelo de cúmulos α

Según el modelo de partícula alfa el ^{32}S puede poseer una configuración geométrica en su estado de equilibrio. Al estar conformado por 8 partículas alfas se puede pensar en arreglos con 8 vértices o caras. Por ejemplo, una configuración propuesta podría ser, el tomar un octaedro **regular** y ubicar las partículas alfa en las caras de éste, en cuyo caso las simetrías involucradas serían las de un cubo ya que se puede inscribir dentro del octaedro de tal forma que las partículas alfa se ubiquen en sus vértices (Figura 4.6). Otra analizada en este escrito y estudiada en otros trabajos [6], es tomar un octaedro **irregular**, de tal forma que al colocar 6 determinadas partículas en los centros de las caras de éste se ubiquen en el mismo plano hexagonal y las dos restantes, se arreglen perpendiculares al plano, una debajo de la otra, de tal manera que formen un hexágono bipiramidal (Figura 4.6 lado izquierdo). Como ya se mencionó anteriormente, otra configuración en cúmulos es la propuesta en [27], la cual se introduce para analizar los niveles de energía altamente excitados ($> 9\text{MeV}$) del ^{32}S y toma a este núcleo como compuesto por dos oxígenos, ya que, como se observó para el caso del ^8Be un arreglo de este estilo podría proporcionar bandas rotacionales (ver Figura 2.8 y ecuación (2.3)).

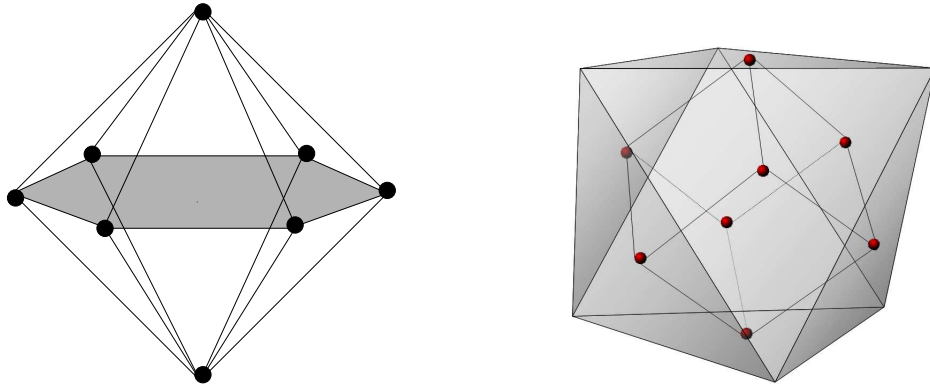


Figura 4.6: En la **Izquierda** se muestra la configuración geométrica (hexagonal bipiramidal) propuesta en este trabajo, en la cual se encontraría el núcleo ^{32}S en el primer estado de una banda con comportamiento rotacional. A la **Derecha** se ilustra otro arreglo geométrico posible (octaedro regular) para el mismo núcleo según el modelo de cúmulos.

4.3.1 Simetrías de una configuración hexagonal bipiramidal

Si se toma al eje z perpendicular al plano hexagonal (plano $x - y$) se tiene invarianza bajo rotaciones alrededor de este eje en un ángulo de $2\pi/3$ y $2\pi/6$. Mientras que al analizar el plano $x - y$ se tiene que las rotaciones que dejan invariante la estructura, son en un ángulo

π alrededor de los ejes cuyas direcciones se encuentran en la Tabla 4.1, en donde en cada renglón se muestran dos ejes con dirección opuesta. En cambio, si se analizan vectores de rotación sobre los planos $y - z$, $x - z$ o en el caso más general, aquellos cuyas direcciones poseen 3 componentes distintas de cero, se tiene que no se presentan simetrías de rotación.

Tabla 4.1: Dirección de los vectores unitarios ubicados en el plano $x - y$ alrededor de los cuales, al rotar en un ángulo π , la figura hexagonal bipiramidal permanece invariante.

Dirección	ángulo
$n_x \hat{i} ; -n_x \hat{i}$	π
$\frac{\sqrt{3}}{2} n_x \hat{i} + \frac{1}{2} n_y \hat{j} ; -\frac{\sqrt{3}}{2} n_x \hat{i} - \frac{1}{2} n_y \hat{j}$	
$\frac{1}{2} n_x \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} n_y \hat{j} ; -\frac{1}{2} n_x \hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} n_y \hat{j}$	
$n_y \hat{j} ; -n_y \hat{j}$	
$-\frac{\sqrt{3}}{2} n_x \hat{i} + \frac{1}{2} n_y \hat{j} ; \frac{\sqrt{3}}{2} n_x \hat{i} - \frac{1}{2} n_y \hat{j}$	
$-\frac{1}{2} n_x \hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} n_y \hat{j} ; \frac{1}{2} n_x \hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} n_y \hat{j}$	

Capítulo 5

Obtención del espectro q -deformado para una simetría hexagonal bipiramidal

Uno de los principales propósitos para la introducción de álgebras cuánticas en la descripción de espectros nucleares, es el tratar de explicar el espectro característico de excitación de una gran variedad de núcleos por medio de un sólo modelo. Con ese ánimo se han realizado trabajos que han descrito regiones nucleares alrededor del número de masa 150 (tierras raras) [17] y $A \sim 80$ [28] en donde se ha ajustado el espectro experimental de la banda base de estos núcleos a la energía de un rotor rígido q -deformado describiendo acertadamente el modelo teórico estos estados. Teniendo esto en mente, se tiene que rotaciones q -deformadas, en general, son buenas candidatas para modelar espectros nucleares, lo cual conduce a pensar que en particular, rotaciones finitas q -deformadas podrían brindar una adecuada descripción de espectros nucleares.

Como ya se mencionó, según el modelo de partícula alfa en el estado base de un núcleo ligero sus cúmulos conforman una configuración geométrica determinada; es decir, estos arreglos poseen simetrías específicas. En el caso a considerar correspondiente al núcleo ^{32}S no sólo se proponen a las partículas alfa ubicadas en las caras de un octaedro, siendo esta configuración equivalente a ubicar a las partículas en las puntas de un hexagono bipiramidal, cuando el octaedro en cuestión es irregular; sino que se plantea que dicha configuración es la de los estados de una banda rotacional.

La forma de obtener los espectros de las bandas rotacionales (Figura 4.5 (sección 4.2) propuesta en este trabajo, es a partir del conocimiento de la energía de un sistema físico incluido en el grupo de rotaciones q -deformado $so_q(3)$: el rotor rígido. Entonces, tomando la idea “clásica” de que se pueden obtener rotaciones discretas pertenecientes a un grupo finito a partir del conocimiento de rotaciones continuas relacionadas al grupo $SO(3)$ [29], se propone un procedimiento análogo en donde se parte del “grupo cuántico” $so_q(3)$ para

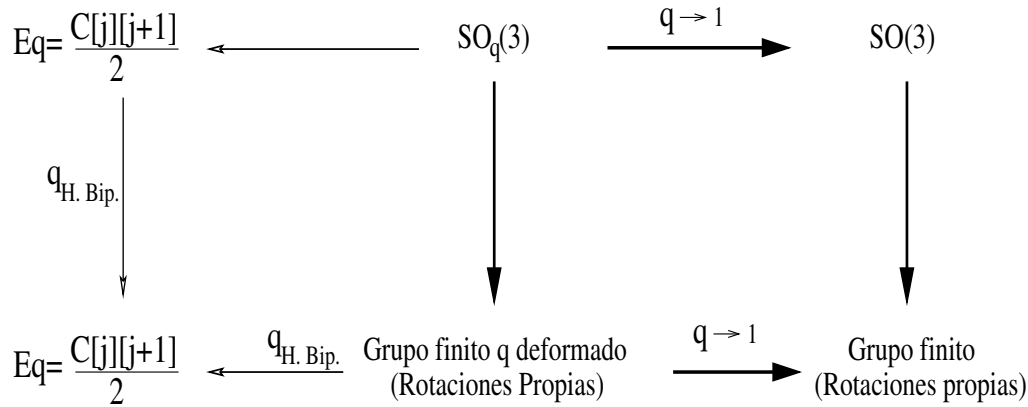


Figura 5.1: Ilustración del procedimiento utilizado en este trabajo para la obtención del espectro q -deformado característico de una configuración hexagonal bipiramidal correspondiente al ^{32}S .

obtener rotaciones q -deformadas finitas relacionadas a las simetrías de una configuración hexagonal bipiramidal¹. Luego, de las respectivas restricciones o condiciones que se deben cumplir para que los resultados sean físicamente correctos (sección 5.4) se obtendría un valor del parámetro q asociado a la energía de un rotor rígido deformado que se encuentre relacionado con las simetrías mencionadas, el cual proporcionaría el espectro específico del ^{32}S . Un esquema ilustrativo del procedimiento propuesto para la obtención del espectro q -deformado en cuestión se encuentra en la Figura 5.1.

En realidad, el punto de partida de este trabajo es la representación matricial tridimensional del operador rotación q -deformado, la cual bajo la restricción de que su determinante, que en este caso es la función q -determinante en tres dimensiones sea igual a 1, proporcionaría el parámetro q para cada simetría del hexágono bipiramidal.

Antes de entrar en detalle en la obtención de los resultados deformados, se presentará a continuación una pequeña descripción de la parte “clásica” con el fin de entender mejor la parte deformada.

¹Nótese que estas rotaciones son propias ya que pertenecen a $SO(3)$ y $so_q(3)$, sin embargo si se desean rotaciones finitas impropias se puede tomar como punto de partida el grupo $O(3)$, en cuyo caso se consideraría su contraparte deformada $O_q(3)$.

5.1 Rotaciones tridimensionales en términos de los parámetros de Cayley-Klein

Debido a que las partículas alfa en el ^{32}S conforman un arreglo tridimensional, se tiene que el caso de interés es la matriz de rotación en 3 dimensiones. Dentro del marco no deformado es muy usual encontrar esta matriz en términos de los ángulos de Euler. Sin embargo ésta resulta poco práctica a la hora de relacionar un ángulo de rotación alrededor de un eje que en general presenta las 3 componentes tridimensionales con estos ángulos. Es por esta razón que en este escrito se presenta la matriz de rotación en términos de unos parámetros que se encuentran directamente relacionados con el ángulo y eje de rotación, conocidos como parámetros de Cayley-Klein.

Estos parámetros son introducidos en la representación fundamental del grupo $SU(2)$ la cual equivale a la matriz de rotación con $J = 1/2$ dada a continuación:

$$\mathfrak{D}(e^{\frac{-i}{\hbar}\vec{J}\cdot\vec{n}\theta}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

en donde los parámetros de Cayley-Klein α y β se encuentran dados por

$$\alpha = \cos(\theta/2) - in_z \text{sen}(\theta/2) \quad \beta = (-n_y - in_x) \text{sen}(\theta/2) \quad (5.2)$$

siendo θ el ángulo de rotación alrededor de un eje arbitrario en la dirección \vec{n} .

Para construir representaciones matriciales con un valor de momento angular distinto de $1/2$, se puede utilizar la expresión para un elemento matricial de rotación que relaciona el acople de dos momentos angulares conocida como ley del producto de Wigner, que en el caso particular de $J = 1$ es:

$$D_{m'm}^1(\alpha, \beta) = \sum_{m_1, m'_1, m_2, m'_2} C_{m_1 m_2 m}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1} C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1} D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta) D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta) \quad (5.3)$$

en donde $C_{m_1 m_2 m}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1}$ y $C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1}$ son coeficientes de Clebsh-Gordan mientras que $D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta)$ y $D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta)$ corresponden a los elementos matriciales de (5.1).

Entonces teniendo en cuenta lo anterior, se puede encontrar que la matriz de rotación para $J = 1$ en términos de los parámetros de Cayley-Klein resulta ser:

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\alpha\beta & \beta^2 \\ -\sqrt{2}\alpha\beta^* & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* & \sqrt{2}\alpha^*\beta \\ (\beta^*)^2 & -\sqrt{2}\alpha^*\beta^* & (\alpha^*)^2 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Otra manera de encontrar esta matriz es teniendo en cuenta que la función de onda rotada para un acople par de espines es la siguiente [30]:

$$u(jm, \theta) = \frac{(\chi_+(\theta))^{j+m}(\chi_-(\theta))^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad (5.5)$$

en donde $\chi_+(\theta)$ y $\chi_-(\theta)$ son espinores rotados descritos en términos de la base espinorial con $J = 1/2$ ($\chi_+(0)$ y $\chi_-(0)$) y están descritos en términos de los parámetros de Cayley-Klein por:

$$\chi_+(\theta) = \alpha\chi_+(0) + \beta\chi_-(0) \quad (5.6)$$

$$\chi_-(\theta) = -\beta^*\chi_+(0) + \alpha^*\chi_-(0). \quad (5.7)$$

Si se reemplazan las ecuaciones (5.6) y (5.7) en (5.5), se utiliza el teorema binomial y se toma que el efecto del operador rotación sobre un estado $|jm\rangle$ es:

$$\begin{aligned} |jm\theta\rangle &= R(\theta)|jm0\rangle \\ |jm\theta\rangle &= \sum_{m'=-j}^j |jm'0\rangle \langle jm'0|R(\theta)|jm0\rangle \\ |jm\theta\rangle &= \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^j(\theta)|jm'0\rangle, \end{aligned} \quad (5.8)$$

se puede deducir que el elemento matricial de rotación con $J = 1$ de un ángulo θ alrededor de un eje arbitrario en dirección de un vector \vec{n} es:

$$\begin{aligned} D_{m'm}^1(\alpha, \beta) &= \sum_x \frac{(-1)^x \sqrt{(1+m)!(1-m)!(1+m')!(1-m')!}}{(x)!(1-m'-x)!(1+m-x)!(x-m+m')!} \\ &\times \beta^x \alpha^{*1+m-x} \alpha^{1+m'-x} \beta^{*m'-m-x}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

por medio del cual se obtiene la matriz de rotación dada en (5.4).

5.2 Matriz de rotación q -deformada con $j = 1$

Un procedimiento análogo a la construcción de la matriz de rotación “clásica”² en 3 dimensiones, se puede llevar a cabo por medio de la ley del producto de Wigner q -deformado la cual enuncia que el q acoplamiento (producto tensorial) de dos representaciones matriciales con $J = 1/2$ puede resultar en un elemento matricial perteneciente a la matriz de rotación q -deformada con $J = 1$, $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \downarrow 1)$ ³. En el caso en cuestión esta ley se encuentra descrita por la siguiente expresión:

$${}^q D_{m'm}^1(T) = \sum_{m_1, m'_1, m_2, m'_2} {}^q C_{m_1 m_2 m}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1} {}^q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1} {}^q D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}}(T) {}^q D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}}(T), \quad (5.10)$$

siendo ${}^q C_{m_1 m_2 m}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1}$ y ${}^q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1}$ coeficientes de Clebsh-Gordan q -deformados. Mientras que ${}^q D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}}$ y ${}^q D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}}$ son elementos matriciales de la matriz de rotación T con $J = 1/2$

²Es muy usual en álgebras cuánticas denominar a sistemas no deformados como clásicos.

³Esta matriz construida de esta forma es conocida como representación matricial tridimensional de $su_q(2)$.

perteneciente a $su_q(2)$ dada en (3.36).

Entonces, teniendo en cuenta esta ley se puede encontrar (Apéndice B) que la matriz de rotación q -deformada con $J = 1$ puede ser escrita por:

$$\begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{[2]}q^{1/2}ab & b^2 \\ -\sqrt{[2]}q^{3/2}ab^* & aa^* - q^2bb^* & \sqrt{[2]}q^{1/2}ba^* \\ q^2(b^*)^2 & -\sqrt{[2]}q^{3/2}b^*a^* & (a^*)^2 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

de donde se observa que cuando q tiende a 1 se recupera la matriz de rotación no deformada dada en (5.4) si

$$a \rightarrow \alpha, \quad b \rightarrow \beta, \quad a^* \rightarrow \alpha^* \quad y \quad b^* \rightarrow \beta^*.$$

Esta matriz tiene una particularidad y es que los elementos que la conforman no conmutan entre sí; es decir, cumplen las relaciones (3.37) y (3.38), ya que esta matriz viene del q acoplamiento de dos matrices cuyos elementos cumplen estas mismas relaciones de conmutación.

5.3 Función de rotación q -deformada

El estudio de las "grupos cuánticos" muestra que la introducción de álgebras no conmutativas se encuentra íntimamente relacionada con la aparición de espacios con coordenadas no conmutantes y viceversa⁴. Esta idea de "*espacios no conmutativos*" conduce a pensar en cuál sería la clase de sistemas que estarían íntimamente relacionados con éstos y en cómo cambiarían sus propiedades físicas. A continuación se muestra cómo un espacio no conmutativo espinorial bidimensional q -deformado influye en las propiedades de un sistema frente a rotaciones tridimensionales, de donde se origina la matriz de rotación q -deformada dada en (5.11).

Al igual que en el caso "clásico" se puede construir un estado q -deformado con números cuánticos de momento angular total j y proyección m en el eje z a partir de la combinación de $j + m$ proyecciones de espinores $1/2$ hacia arriba y $j - m$ hacia abajo de la siguiente manera:

$$u_q(jm) = q^{\frac{1}{2}(j-m)(j+m)} \frac{(\chi_+(T))^{j+m}(\chi_-(T))^{j-m}}{\sqrt{[j+m]![j-m]!}} \quad (5.12)$$

en donde los espinores rotados $\chi_+(T)$ y $\chi_-(T)$ pueden ser escritos en términos de los elementos de la matriz rotación q -deformada para spin $1/2$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \chi_+(T) \\ \chi_-(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -qb^* \\ b & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(0) \\ \chi_-(0) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

con $\chi_+(0)$ y $\chi_-(0)$ representando los espinores base.

⁴Ver Apéndice C.

Como los q -espinores base q -conmutan, es decir, cumplen la relación de conmutación

$$\chi_+(0)\chi_-(0) = q^{-1}\chi_-(0)\chi_+(0) \quad (5.14)$$

y como las entradas no conmutantes de la matriz dada en (5.13) cumplen las relaciones de conmutación (3.37) y (3.38), se tiene que se puede utilizar en (5.12) el teorema q binomial el cual para dos elementos cumpliendo $AB = q^{-2}BA$ se encuentra definido como:

$$(A + B)^n = \sum_{r=0}^n q^{r(n-r)} \frac{[n]!}{[r]![n-r]!} A^r B^{n-r}.$$

Entonces, reemplazando (5.13) en (5.12) y utilizando el teorema q -binomial se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} u_q(jm) &= \sum_{x=0}^{j+m} \sum_{x'=0}^{j-m} q^{\frac{1}{2}(j-m)(j+m)+x(j+m-x)+x'(j-m-x')} \frac{\sqrt{[j+m]![j-m]!}}{[x]![x']![j+m-x]![j-m-x']!} \\ &\quad \times a^x (-qb^*)^{j+m-x} b^{x'} a^{*j-m-x'} \chi_+(0)^x \chi_-(0)^{j+m-x} \chi_+(0)^{x'} \chi_-(0)^{j-m-x'}; \end{aligned} \quad (5.15)$$

y al utilizarse el hecho de que cuando dos variables q conmutan ($vw = q^{-1}wv$) se cumple

$$w^n v^m = q^{mn} v^m w^n,$$

la expresión (5.15) se convierte en

$$\begin{aligned} u_q(jm) &= \sum_{x=0}^{j+m} \sum_{x'=0}^{j-m} q^{\frac{1}{2}(j-m)(j+m)+x(j+m-x)+x'(j-m-x')+x'(j+m-x)} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{[j+m]![j-m]!}}{[x]![x']![j+m-x]![j-m-x']!} \\ &\quad \times a^x (-qb^*)^{j+m-x} b^{x'} a^{*j-m-x'} \chi_+(0)^{x+x'} \chi_-(0)^{2j-x-x'}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Si se realiza el cambio de variable $m' = x + x' - j$ en la anterior relación resulta

$$\begin{aligned} u_q(jm) &= \sum_x \sum_{m'=-j}^j q^{\frac{1}{2}(j-m)(j+m)+x(j+m-x)+(j+m'-x)(x-m-m')+(j+m'-x)(j+m-x)} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{[j+m]![j-m]!}}{[x]![j+m'-x]![j+m-x]![x-m-m']!} \\ &\quad \times a^x (-qb^*)^{j+m-x} b^{j+m'-x} a^{*x-m-m'} \chi_+(0)^{j+m'} \chi_-(0)^{j-m'}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

de donde se obtiene el estado $u_q(jm)$ en términos del estado inicial $u_q(0)$ teniendo en cuenta (5.12), esto es:

$$\begin{aligned}
u_q(jm) &= \sum_{x,m'} q^{\frac{1}{2}(j-m)(j+m)+x(j+m-x)+(j+m'-x)(x-m-m')+(j+m'-x)(j+m-x)-\frac{1}{2}(j-m')(j+m')} \\
&\quad \times \frac{\sqrt{[j+m]![j-m]![j+m']![j-m']!}}{[x]![j+m'-x]![j+m-x]![x-m-m']!} \\
&\quad \times a^x (-qb^*)^{j+m-x} b^{j+m'-x} a^{*x-m-m'} u_q(jm, 0).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Por otro lado, como el estado $|jm\rangle$ puede ser escrito en términos de elementos matriciales de rotación q -deformados de manera análoga a la mostrada en la ecuación (5.8) para el caso “clásico”, es decir:

$$|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^j {}^q D_{m'm}^j(T) |jm'0\rangle, \tag{5.19}$$

se puede concluir de (5.18) y de (5.19) que el elemento de rotación ${}^q D_{m'm}^j(T)$ se encuentra dado por:

$$\begin{aligned}
D_{m'm}^j(T) &= \sum_x q^{\frac{1}{2}(j-m)(j+m)+x(j+m-x)+(j+m'-x)(x-m-m')+(j+m'-x)(j+m-x)-\frac{1}{2}(j-m')(j+m')} \\
&\quad \times \frac{\sqrt{[j+m]![j-m]![j+m']![j-m']!}}{[x]![j+m'-x]![j+m-x]![x-m-m']!} a^x (-qb^*)^{j+m-x} b^{j+m'-x} a^{*x-m-m'},
\end{aligned} \tag{5.20}$$

el cual al realizar los cambios de variable $s_1^1 = x$, $s_2^1 = j+m-x$, $s_1^2 = j+m'-x$ y $s_2^2 = x-m-m'$ resulta ser

$$\begin{aligned}
{}^q D_{m'm}^j(T) &= \sum_{s_1^1} \frac{\sqrt{[j+m]![j-m]![j+m']![j-m']!}}{[s_1^1]![s_2^1]![s_1^2]![s_2^2]!} \\
&\quad \times q^{\frac{1}{2}(s_1^1+s_2^1)(s_2^1+s_2^2)+(s_2^1 s_1^2)} (a)^{s_1^1} (-qb^*)^{s_2^1} (b)^{s_1^2} (a^*)^{s_2^2}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Si se toma a j como 1 en la anterior relación se llega a la matriz dada en (5.11) de donde se puede concluir que la no conmutatividad de los espinores base se encuentra íntimamente relacionada con la obtención de esta matriz de rotación deformada.

5.4 Función q -determinante para la matriz de rotación tridimensional

En la sección (5.2) se mostró la forma explícita de la matriz rotación q -deformada tridimensional proveniente del q -producto tensorial de dos matrices de spin 1/2, señalándose

también, que los elementos de dicha matriz cumplen las mismas relaciones de conmutación dadas para la representación fundamental de $su_q(2)$. Así mismo, en la sección (5.3) se mostró que esta matriz puede ser hallada a partir de su construcción sobre un espacio con coordenadas no conmutativas y por lo tanto la deformación del álgebra y del espacio sobre el cual se construya, se encuentran íntimamente relacionados. En esta sección se presenta la función q -determinante aplicada a esta matriz en particular, la cual es análoga a la función determinante para matrices tridimensionales no deformadas.

Teniendo en cuenta (3.33) resulta que el q -determinante de una matriz tridimensional se encuentra definido por:

$$\det_q(R^1) = \sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3=1}^3 \epsilon(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)t_{\sigma_1}^1 t_{\sigma_2}^2 t_{\sigma_3}^3, \quad (5.22)$$

el cual al sumarse sobre el índice σ_3 se convierte en:

$$\det_q(R^1) = \sum_{\sigma_1\sigma_2=1}^3 \epsilon(\sigma_1\sigma_21)t_{\sigma_1}^1 t_{\sigma_2}^2 t_1^3 + \sum_{\sigma_1\sigma_2=1}^3 \epsilon(\sigma_1\sigma_22)t_{\sigma_1}^1 t_{\sigma_2}^2 t_2^3 + \sum_{\sigma_1\sigma_2=1}^3 \epsilon(\sigma_1\sigma_23)t_{\sigma_1}^1 t_{\sigma_2}^2 t_3^3;$$

ahora, si se suma sobre los dos índices restantes y se tiene en cuenta que la función $\epsilon(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ se anula para índices repetidos, se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \det_q(R^1) = & \epsilon(321)t_3^1 t_2^2 t_1^3 + \epsilon(231)t_2^1 t_3^2 t_1^3 + \epsilon(312)t_3^1 t_1^2 t_2^3 \\ & + \epsilon(132)t_1^1 t_3^2 t_2^3 + \epsilon(213)t_2^1 t_1^2 t_3^3 + \epsilon(123)t_1^1 t_2^2 t_3^3. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Al reemplazar en la anterior los elementos matriciales de la matriz (5.11), según el ordenamiento matricial mostrado en (3.25); y si se tiene en cuenta la definición (3.34) de la función sigma y el número de permutaciones $l(\sigma)$ necesarias para obtener $\epsilon(123)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \det_q(R^1) = & -q^{-1}(-qb^*)^2(aa^* + qb(-qb^*))b^2 + q^{-1}[2]a(-qb^*)^2a^*b^2 + q^{-1}[2](-qb^*)^2ab^2a^* \\ & - [2]a^2(-qb^*)a^*ba^* - [2]a(-qb^*)aba^* + a^2(aa^* + qb(-qb^*))a^*2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Por otra parte, se puede demostrar a partir de las relaciones de conmutación (3.37) y (3.38), que se cumplen las siguientes relaciones

$$(-qb^*)^2aa^*b^2 = aa^*(-qb^*b)^2, \quad (-qb^*)^2b(-qb^*)b^2 = (-qb^*b)^3, \quad (5.25)$$

$$a(-qb^*)^2a^*b^2 = q^{-2}aa^*(-qb^*b)^2, \quad (-qb^*)^2ab^2a^* = q^{-2}(-qb^*b)^2aa^*, \quad (5.26)$$

$$a^2(-qb^*)a^*ba^* = q^{-3}(aa^*)^2(-qb^*b) + q^{-2}(q^{-4} - q^{-2})aa^*(-qb^*b)^2, \quad (5.27)$$

$$a(-qb^*)aba^* = q^{-3}(-qb^*b)(aa^*)^2 - q^{-5}(q - q^{-1})(-qb^*b)^2aa^*, \quad (5.28)$$

$$a^2(-qb^*b)a^* = q^{-4}(-qb^*b)(aa^*)^2 - q^{-6}(q - q^{-1})(-qb^*b)^2aa^*, \quad (5.29)$$

$$a^3a^*3 = (aa^*)^3 - q^{-2}(q - q^{-1})(1 + q^{-1}[2])(-qb^*b)(aa^*)^2 + q^{-5}(q - q^{-1})^2[2](-qb^*b)^2aa^*, \quad (5.30)$$

teniendo en cuenta que aa^* conmuta con $-qb^*b$, al redefinir $x = aa^*$, $y = -qb^*b$, sumar y restar $3q^{-2}$, $3q^{-1}$, $q^{-3}y^3$ se llega a que el q -determinante se convierte en:

$$\begin{aligned} \det_q(R^1) = & x^3 - 3q^{-1}x^2y + 3q^{-2}xy^2 - q^{-3}y^3 + (2q^{-3} - q^{-1} + q^{-8} - 2q^{-7})xy^2 \\ & + (q^{-3} - 1)y^3 + (q^{-5} + 2q^{-3} + q^{-1} - 2q^{-2} - 2q^{-4})x^2y, \end{aligned} \quad (5.31)$$

además, como la siguiente expresión es válida

$$(x - q^{-1}y)^3 = x^3 - 3q^{-1}x^2y + 3q^{-2}xy^2 - q^{-3}y^3$$

y como $x - q^{-1}y$ es equivalente a 1 ya que proviene de la definición del q -determinante para la representación fundamental de $su_q(2)$ (ec. (3.39)), se llega a:

$$\begin{aligned} \det_q(R^1) = & 1 + (2q^{-3} - q^{-1} + q^{-8} - 2q^{-7})xy^2 + (q^{-3} - 1)y^3 \\ & + (q^{-5} + 2q^{-3} + q^{-1} - 2q^{-2} - 2q^{-4})x^2y. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Es muy útil, expresar el q -determinante de la representación tridimensional de $su_q(2)$ en términos del mínimo de parámetros posibles, entonces como $x = 1 + q^{-1}y$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \det_q(R^1) = & 1 + (q^{-1} - 2q^{-2} + 2q^{-3} - 2q^{-4} + q^{-5})y \\ & - (q^{-1} - 2q^{-2} + 2q^{-3} - 4q^{-4} + 4q^{-5} - 2q^{-6} + 2q^{-7} - q^{-8})y^2 \\ & - (1 + q^{-2} - 2q^{-3} - 2q^{-5} + 2q^{-6} - q^{-7} + 2q^{-8} - q^{-9})y^3 \end{aligned} \quad (5.33)$$

el cual al factorizar términos se convierte en

$$\begin{aligned} \det_q(R^1) = & 1 + q^{-5}(q - 1)^2(1 + q^2)y - q^{-8}(q - 1)(q^3 + q - 1)(q^3 - q^2 - 1)y^2 \\ & - q^{-9}(q - 1)(1 + q^2)(q^3 + q - 1)(q^3 + q^2 - 1)y^3. \end{aligned} \quad (5.34)$$

De lo anterior se observa que el efecto de deformar el álgebra o el “espacio” sobre una rotación, es cambiar la norma del vector rotado; ya que, el q -determinante de la matriz deformada tridimensional de rotación en cuestión, no es naturalmente 1; contrariamente a lo sucedido en el caso “clásico” en donde el determinante de las representaciones matriciales del operador rotación si presentan este valor, indicando esto que se conserva la norma de dicho vector. Ahora, como se desean asociar estas rotaciones deformadas con un sistema físico rotante que se encuentra ubicado espacialmente en un espacio tridimensional que es invariante bajo rotación alrededor de ejes específicos, es necesario que la norma del vector rotado que se encuentra asociado a alguna simetría se conserve, es decir, se debe exigir que el q -determinante sea igual a 1. De esta relación, se encuentra una dependencia del parámetro q con los ángulos y ejes de rotación de un sistema físico rotante y por lo tanto, es posible obtener una relación particular entre los ángulos y ejes de rotación que dejan una configuración hexagonal bipiramidal invariante. Esta función es:

$$\begin{aligned} & (q - 1)^2(1 + q^2)y - q^{-3}(q - 1)(q^3 + q - 1)(q^3 - q^2 - 1)y^2 \\ & - q^{-4}(q - 1)(1 + q^2)(q^3 + q - 1)(q^3 + q^2 - 1)y^3 = 0; \end{aligned} \quad (5.35)$$

cabe notar, que y es una función de b el cuál es el análogo deformado del parámetro de caley Klein β (5.1) y por lo tanto se espera una dependencia de éste con el ángulo y eje de rotación, ya que cuando el parámetro q tiende a 1, el elemento matricial q -deformado de rotación tridimensional b se convierte en β .

5.5 Obtención del elemento matricial b cuando $n_z = 0$

En (5.35) se mostró una relación entre q y y que a su vez depende de b ; pero, ¿Cuál es la forma explícita de este elemento? Para hallarla, se analizará la representación matricial cuando $j = 1$, del operador rotación q -deformado $e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} \theta}$ cuando $n_z = 0$ ya que los ejes de rotación alrededor de los cuales existe invarianza de rotación de la figura hexagonal bipiramidal se encuentran en el plano $(x - y)$, además de un eje en dirección z , pero este no es de importancia ya que rotaciones alrededor de este eje no se deforman puesto que la acción del operador $\hat{\mathcal{J}}_Z$ sobre un ket $|jm\rangle$ es la misma del operador no deformado (ver ec. A.4).

Obsérvese primero como puede ser expresado un elemento matricial del operador rotación al expandir la exponencial, esto es:

$$\langle jm' | e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} \theta} | jm \rangle = \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i\theta}{\hbar} \right)^n \langle jm' | (\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^n | jm \rangle, \quad (5.36)$$

también se puede escribir (5.36) en términos de una relación que involucra una suma de elementos de una serie par, de una serie impar y de $\delta_{mm'}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle jm' | e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} \theta} | jm \rangle = & \delta_{mm'} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{\hbar^{2n} (2n)!} D_{m'm}^j \left((\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^{2n} \right) \\ & + i \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n-1}}{\hbar^{2n-1} (2n-1)!} D_{m'm}^j \left((\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^{2n-1} \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ahora, calcúlese la matriz asociada a $\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n}$ teniendo en cuenta que los vectores $\hat{\mathcal{J}}_x$ y $\hat{\mathcal{J}}_y$ se pueden escribir en términos de los operadores deformados esféricos de momento angular como

$$\hat{\mathcal{J}}_x = \frac{\hat{\mathcal{J}}_+ + \hat{\mathcal{J}}_-}{2}, \quad \hat{\mathcal{J}}_y = \frac{\hat{\mathcal{J}}_+ - \hat{\mathcal{J}}_-}{2i};$$

entonces, (5.36) se convierte en

$$\langle jm' | \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} | jm \rangle = \frac{n_x - in_y}{2} \langle jm' | \hat{\mathcal{J}}_+ | jm \rangle + \frac{n_x + in_y}{2} \langle jm' | \hat{\mathcal{J}}_- | jm \rangle. \quad (5.38)$$

Para hallar la representación matricial de este operador cuando $j = 1$ se utilizan las relaciones (A.4) y (A.5) que muestran la acción sobre un ket $|jm\rangle$ de estos operadores deformados y que las componentes esféricas de \vec{n} pueden ser expresadas en términos de las cartesianas por:

$$n_+ = -\frac{n_x + in_y}{\sqrt{2}}, \quad n_- = \frac{n_x - in_y}{\sqrt{2}}, \quad n_0 = n_z, \quad (5.39)$$

luego en términos matriciales se tiene

$$\langle 1m' | \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} | 1m \rangle =: \frac{\hbar n_-}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{[2]} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{n_+} \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{[2]} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{[2]} & 0 \end{pmatrix}; \quad (5.40)$$

sumando las anteriores matrices y realizando el cambio de variable $\eta = \hbar\sqrt{\frac{[2]}{2}}n_-$ y $\eta^* = \hbar\sqrt{\frac{[2]}{2}}n_+$ se llega a

$$\langle 1m' | \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} | 1m \rangle =: \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ \eta^* & 0 & \eta \\ 0 & \eta^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Teniendo en cuenta esta matriz, se puede calcular la representación matricial de $(\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^2$, $(\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^3$, ... a partir de la multiplicación una vez, dos veces, ... de la representación matricial de $\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n}$. Por ejemplo, las matrices asociadas al término cuadrático, cúbico y cuártico de $\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n}$ son:

$$(\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^2 =: \begin{pmatrix} \eta\eta^* & 0 & \eta^2 \\ 0 & \Omega & 0 \\ \eta^{*2} & 0 & \eta^*\eta \end{pmatrix}, \quad (\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^3 =: \begin{pmatrix} 0 & \eta\Omega & 0 \\ \Omega\eta^* & 0 & \Omega\eta \\ 0 & \eta^*\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

$$(\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^4 =: \begin{pmatrix} \eta\Omega\eta^* & 0 & \eta\Omega\eta \\ 0 & \Omega^2 & 0 \\ \eta^*\Omega\eta^* & 0 & \eta^*\Omega\eta \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

en donde en se ha tomado la notación $\Omega = \eta^*\eta + \eta\eta^*$.

Para obtener b se hallará el elemento matricial de la esquina superior derecha de (5.11), el cual al observar las matrices correspondientes a $(\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^2$, $(\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^4$, hallar el elemento n -ésimo $(\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n})^{2n}$ y utilizar la ecuación (5.37), se puede concluir⁵:

$$\langle 11 | e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} \theta} | 1-1 \rangle = \eta \left(\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(\theta\sqrt{\Omega})^{2n}}{(2n)!} \right) \frac{\eta}{\Omega}, \quad (5.44)$$

la cual al sumarse desde cero se convierte en

$$\langle 11 | e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} \theta} | 1-1 \rangle = \eta (\cos \vartheta - 1) \frac{\eta}{\Omega}, \quad (5.45)$$

con $\vartheta = \theta\sqrt{\Omega}$.

Por otro lado, de la definición de Ω y η se tiene

$$\Omega = -\frac{[2]}{2} (n_+ n_- + n_- n_+) \quad (5.46)$$

Hasta ahora se ha mencionado que una característica interesante que presentan las matrices q -deformadas pertenecientes a un “grupo cuántico” es que sus elementos no conmutan entre sí; y que esta conmutación depende de cómo no conmutan los ejes coordenados del espacio sobre el cual se construyen (Apéndice C). También se mencionó que los elementos matriciales de la matriz de rotación q -deformada para $J = 1$ cumplen las mismas relaciones de conmutación que satisfacen los elementos matriciales de la matriz de rotación $J = 1/2$

⁵Con el ordenamiento matricial de (5.11) dado como m' , $m = 1, 0, -1$.

(ec.(3.37) y ec.(3.38)), debido a que provienen del acople de éstos (ley del Producto de Wigner q -deformada (5.10)). Por lo tanto, al estar las matrices dadas en (5.41), (5.42) y (5.43) relacionadas con la representación matricial del operador rotación de interés y al depender sus elementos matriciales de η , η^* y Ω , se puede inferir que éstos no conmutan entre si; es más, como η , η^* dependen de n_+ y n_- se tiene que estas últimas tampoco conmutan.

Sin embargo, no se ha tenido en cuenta un detalle y es que las matrices asociadas a $\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n}$ fueron construídas con $n_0 = 0$; de lo cual surgen dos preguntas: ¿influye este hecho en las relaciones de conmutación de los elementos de $D^1(T)$, ¿cómo influye? y ¿cuáles serían las relaciones de conmutación?

Para responderlas, primero, tómesese la matriz de rotación deformada de interés ($J=1$), que al ser aplicada sobre un vector tridimensional con coordenadas esféricas x_+ , x_- , x_0 y al tener en cuenta las relaciones de conmutación que satisfacen los elementos a , a^* , b , b^* involucrados en esta matriz (ec. 5.11); se obtiene que las componentes de este vector cumplen:

$$x_0x_+ = qx_+x_0 \quad x_0x_- = qx_+x_- \quad [x_+, x_-] = -(q - q^{-1})x_0x_0; \quad (5.47)$$

y como lo anterior es para cualquier vector descrito en base esférica, se tiene que en particular el vector \vec{n} satisface las mismas relaciones de conmutación; esto es:

$$n_0n_+ = qn_+n_0 \quad n_0n_- = qn_+n_- \quad [n_+, n_-] = -(q - q^{-1})n_0n_0. \quad (5.48)$$

Ahora, vale la pena recordar que se están tomando rotaciones alrededor de un eje en el plano $x - y$ y por lo tanto n_0 es cero; este hecho es muy interesante puesto que hace, teniendo en cuenta las anteriores relaciones de conmutación, que los elementos n_+ y n_- conmuten, contrariamente a lo esperado para el caso analizado en el párrafo anterior, en donde se consideró que el vector \vec{n} tenía las tres componentes esféricas y que sus componentes no conmutaban entre sí. Estos hechos, conducen a pensar de que si un eje de rotación se encuentra con componentes n_+ , n_- y n_0 distintos de cero, esta situación influye “fuertemente” en si los elementos de la matriz de rotación q -deformada con $J = 1$ conmutan.

Esta conmutación de estas dos componentes esféricas de \vec{n} , lleva a que también conmuten las coordenadas cartesianas n_x y n_y y por lo tanto se tiene de las relaciones (5.46) y (??) que Ω se encuentra dada por

$$\Omega = \frac{[2]}{2}(n_x^2 + n_y^2); \quad (5.49)$$

la cual se convierte en

$$\Omega = \frac{[2]}{2}. \quad (5.50)$$

al tener en cuenta que \vec{n} es un vector unitario y por lo tanto $n_x^2 + n_y^2 = 1$.

Por lo tanto, al reemplazar (5.50) y la definición de η en 5.45 se obtiene

$$\langle 11 | e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{n} \theta} | 1 - 1 \rangle = (\cos \vartheta - 1) n_-^2 \quad \text{con} \quad \vartheta = \sqrt{\frac{[2]}{2}} \quad (5.51)$$

y reemplazando a n_- según la definición dada en (5.39) resulta

$$\langle 11 | e^{\frac{-i}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{n} \theta} | 1 - 1 \rangle = (\cos \vartheta - 1) \frac{n_x - i n_y}{2}. \quad (5.52)$$

Si se utiliza que $\frac{\cos(\psi)-1}{2} = \text{sen}^2(\psi/2)$ se tiene que el elemento matricial de la esquina superior de la matriz (5.11) es⁶:

$$b^2 = \text{sen}^2(\vartheta/2)(n_y + i n_x)^2 \quad (5.53)$$

de donde se obtiene que el análogo deformado b al parámetro β de Cayley Klein introducido en el caso “clásico” (ec. (5.1)) es:

$$b = -\text{sen}(\vartheta/2)(n_y + i n_x), \quad (5.54)$$

el cual tiende a β cuando el parámetro q tiende a 1, como se esperaba.

5.6 Parámetro τ para ejes de rotación en el plano $x - y$

Anteriormente, se mencionó sobre el interés de obtener una relación explícita que involucre los ángulos y ejes asociados a invarianzas de rotación de un hexágono bipiramidal con el parámetro q . Entonces, por medio del q -determinante se pudo hallar tal expresión que asocia el análogo deformado al parámetro de Caley Klein β (b) y dicho parámetro q , obteniéndose la foma explícita de b para rotaciones cuyo eje se encuentra en el plano $x - y$ alrededor de los cuales las rotaciones de invarianza de la figura se deforman (ver sección 4.3). Por lo tanto, al resolver la ecuación (5.35) en función de y se pueden hallar 3 soluciones, de las cuales una es cero y las otras dos son la solución de una cuadrática que involucran potencias de orden 15 de q , es decir:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = f_1(q), \quad y_3 = f_2(q).$$

Ahora, como las siguientes relaciones son válidas

$$y = -qb^*b, \quad b = -\text{sen}(\vartheta/2)(n_y + i n_x), \quad \vartheta = \sqrt{\frac{[2]}{2}}\theta$$

se tiene que

$$y = -q\text{sen}^2(\vartheta/2), \quad (5.55)$$

en donde se ha tenido en cuenta que una rotación que no tiene componente n_z proporciona a n_x y n_y conmutando entre sí, da como resultado que el parámetro y no dependa del eje

⁶Se hace las distinción de primar el elemento para resaltar que este elemento es obtenido para el caso $n_z = 0$; sin embargo no es necesaria puesto que los conmutadores de n_x y n_y se cancelan, sin embargo el análisis de la conmutación es relevante ya que se tendrá en cuenta en la siguiente sección.

de rotación⁷.

Al despejar el ángulo de rotación θ de (5.55), resulta la expresión buscada

$$\theta = \pm 2\sqrt{\frac{2}{q + q^{-1}}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{-y_i}{q}}\right) \quad i = 1, 2, 3; \quad (5.56)$$

y como un ángulo de rotación que rota alrededor de un eje de simetría de tal forma que si se rota n veces se tiene la misma figura (rotación C_n) puede ser escrito como $\theta = 2\pi/n$, se llega a una relación entre n y q , esta es:

$$n = \pm \pi \sqrt{\frac{q + q^{-1}}{2}} \left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{-y_i}{q}}\right) \right)^{-1}. \quad (5.57)$$

Al estar y_1 y y_2 involucradas con polinomios de tan alto orden y como n debe ser un número entero y real se tiene que una forma de hallar una relación entre el ángulo de rotación y q , es por medio del método gráfico, en donde se buscan valores cumpliendo esta condición del parámetro q o equivalentemente de τ , si se toma a $q = e^\tau$.

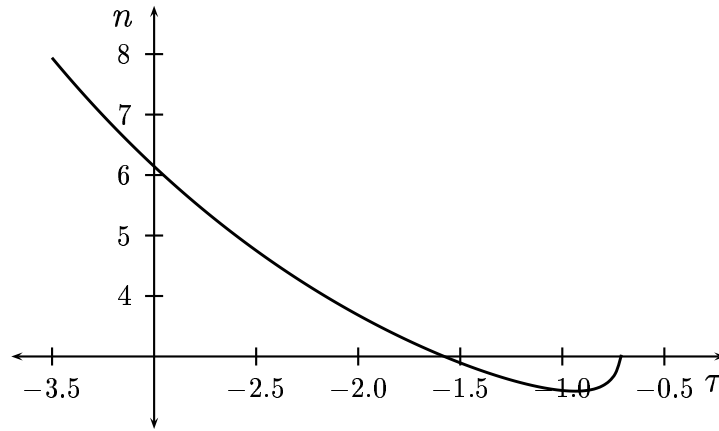


Figura 5.2: Número n relacionado al ángulo de una rotación C_n en función del parámetro τ para la solución $y_2 = f_1(q)$ de la ecuación (5.35). Esta se muestra en el rango de valores de n y τ en el cual la parte imaginaria de n se anula.

En la Figura 5.2 se muestra la parte real de n en función del parámetro τ la cual proviene de tomar a $q = e^\tau$ en la ecuación (5.35) y reemplazar en ésta la relación obtenida para y_2 ⁸. Al observar la figura se hallan valores de n variando entre 4 y 8 con sus respectivos parámetros τ entre -3.5 y -0.5; encontrándose que la mínima simetría es una C_3 para una

⁷Notése que al tener una matriz con elementos no conmutantes construída sobre un “espacio no conmutativo”, para que estos dos aspectos se encuentren íntimamente relacionados entre sí, se tiene que las componentes del vector sobre el cual actúa dicha matriz no conmutan.

⁸En este escrito se omiten las funciones explícitas de las funciones y_1 y y_2 , ya que son expresiones de muchos elementos que no proporcionan mejor información que la gráfica.

valor τ de -1.5. Como $n = 2$ no se encuentra en esta figura no se puede concluir acerca de un valor de τ para las simetrías rotacionales deformadas de un hexágono bipiramidal.

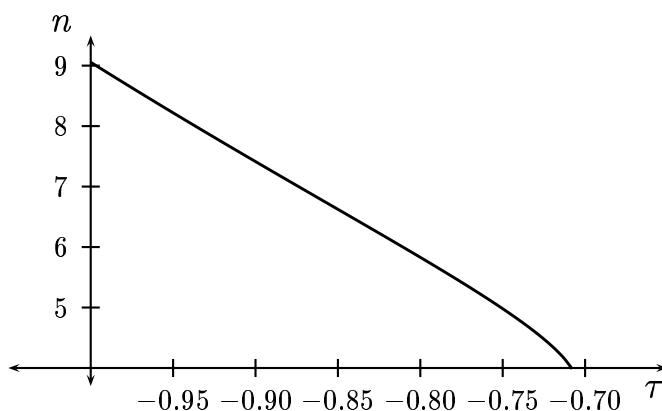


Figura 5.3: Número n relacionado al ángulo de una rotación C_n en función del parámetro τ para la solución $y_3 = f_2(q)$ de la ecuación (5.35). Esta se muestra en el rango de valores de n y τ en el cual la parte imaginaria de n se anula.

Análogamente, para la solución y_3 se tiene la Figura 5.3 de la que se pueden observar los valores de τ para ángulos variando de $2\pi/4$ a $2\pi/9$. El mínimo valor de τ es -0.70 el cual está asociado a una simetría C_4 que en este caso es la menor; e igualmente a lo expuesto anteriormente no se tienen resultados para rotaciones de π .

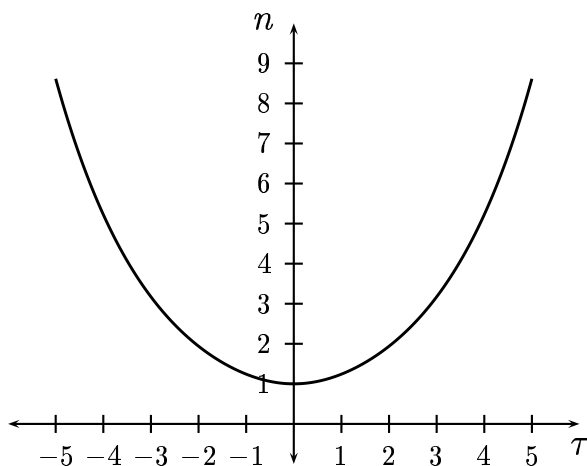


Figura 5.4: Número n relacionado al ángulo de una rotación C_n en función del parámetro τ para la solución $y_1 = 0$ de la ecuación (5.35). Esta se muestra en el rango de valores de n y τ en el cual la parte imaginaria de n se anula.

Por último como la solución y_1 es cero, se puede hallar analíticamente de (5.57) la siguiente

expresión:

$$n = \frac{\sqrt{\cosh\tau}}{m},$$

de la cual se obtiene la Figura 5.4 para $m = 1$. De ésta se observa que los valores de interés, cuando la parte imaginaria de n se anula, varían para n entre 1 y 9, mientras que para τ entre 1 y 5. Vale la pena destacar que en esta figura se puede encontrar un valor para $n = 2$ y por lo tanto el parámetro τ buscado para rotaciones deformadas alrededor de ejes de simetría de un hexágono bipiramidal es 2.1.

En la Figura 5.5 se encuentra la energía teórica que debería tener el núcleo ^{32}S si se modelase como un rotor deformado que rota alrededor de un eje en el plano $x - y$; es decir, tiene un valor de $\tau = 2.1$ y de $\hbar^2/2I$ calculado teniendo en cuenta el mayor momento de inercia que debería tener el ^{32}S si rota alrededor de un eje de simetría en el plano en cuestión, inscrito en un núcleo esférico de radio $1.2 * (32)^{1/3}$ fm ($\hbar^2/2I = 0.07$ MeV); los cuales al reemplazarse en la energía de un rotor rígido q -deformado cuando el parámetro q es elegido como $q = e^\tau$ (ec.(3.21)) dan como resultado el espectro en cuestión. Al observar esta figura se tienen valores muy altos de energía con relación a los valores típicos de los espectros nucleares, en particular, con los espectros de comportamiento rotacional del ^{32}S mostrados en la sección 4.2.

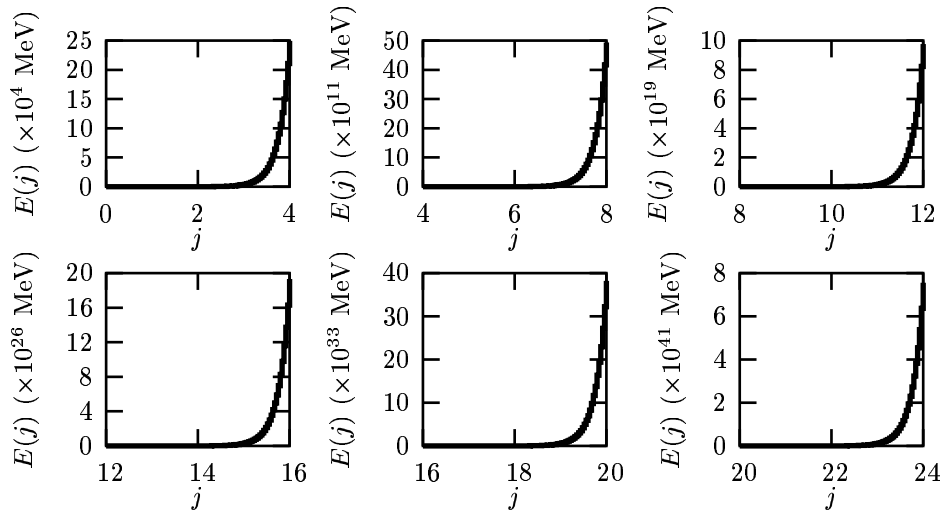


Figura 5.5: Espectro energético teórico del núcleo ^{32}S según la energía de un rotor q -deformado asociado a simetrías C_2 con eje de rotación en el plano $x - y$ ($\tau = 2.1$ y $\hbar^2/2I = 0.07$ MeV).

Lo anterior podría significar que el espectro del ^{32}S , según el modelo teórico, no se origina a partir de rotaciones alrededor de ejes en el plano $x - y$, pero no dice nada acerca de rotaciones alrededor de otros ejes que en particular posean las 3 componentes cartesianas.

Recuérdese que dentro del modelo se desea analizar el espectro del ^{32}S producido por rotaciones alrededor de los ejes de simetría y por tanto, una relación entre el ángulo, los ejes de simetría y el parámetro q estaría proporcionando cual es la configuración geométrica de este núcleo en el primer estado energético de una banda rotacional (cabeza de banda).

Por otra parte, también puede existir el caso en el cual el núcleo rote alrededor de un eje que no esté asociado a una simetría de rotación y producir un espectro característico. En este caso, se podría pensar en un cálculo para configuraciones geométricas asociadas al ^{32}S que roten alrededor de un eje, que no sea necesariamente uno que deje invariante su figura geométrica y por supuesto, que no quede en el plano $x - y$ (ya que los cálculos obtenidos anteriormente son válidos para esta situación), ni en el eje z (puesto que alrededor de este eje las rotaciones no se deforman).

Ahora, al observar la Figura 5.3 y obtener de ésta el mínimo valor posible de τ para las soluciones $f_1(q)$, $f_2(q)$ y $f_3(q)$ de (5.35) resulta la Figura 5.6, la cual proviene de graficar la energía de un rotor rígido q -deformado con dicho valor para núcleos con $A = 237$. Esto con el fin de obtener una apreciación de cómo serían los mínimos rangos de energía según el modelo teórico usado, que se tendrían para núcleos con configuraciones cuyos ejes de rotación se encuentran en el plano $x - y$. En esta figura se observa que aún para el caso de mínimo valor predicho de τ , se tiene que el espectro energético presenta valores muy grandes para poderlos asociar a la energía de un núcleo rotante y por tanto, en general, se necesitaría un valor del momento de inercia muy pequeño para que las energías obtenidas de las Figuras 5.2, 5.3, y 5.4 presenten estos valores típicos. Entonces, se puede pensar en que los resultados teóricos hallados no son válidos para modelar espectros con comportamiento rotacional nucleares, sino otra clase de sistemas rotantes altamente excitados.

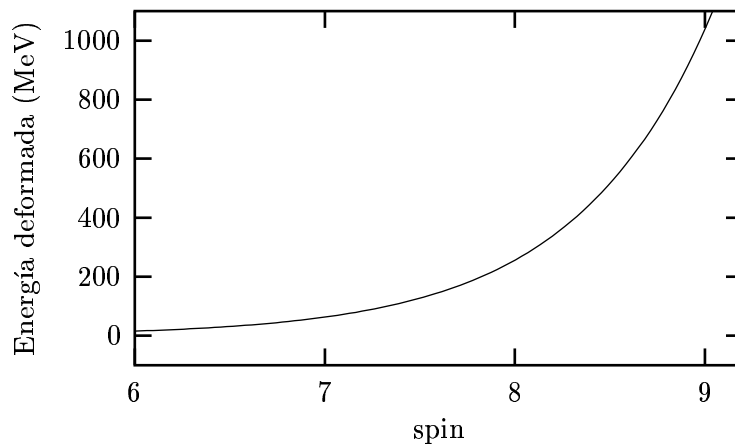


Figura 5.6: Energía rotacional q -deformada con factor $\hbar^2/2I$ para núcleos con $A = 237$ y $\tau = -0.7$.

Capítulo 6

Análisis de bandas del ^{32}S con comportamiento rotacional

Una forma de analizar el comportamiento de una banda rotacional es por medio de dos cantidades conocidas como el momento de inercia cinético $I^{(1)}$ y dinámico $I^{(2)}$ [19, 31] en función de la frecuencia de rotación del núcleo; ya que en general, estas cantidades presentan variaciones si las bandas de interés no son las de un rotor perfecto, en cuyo caso son constantes, puesto que el momento de inercia no cambia a lo largo de una banda.

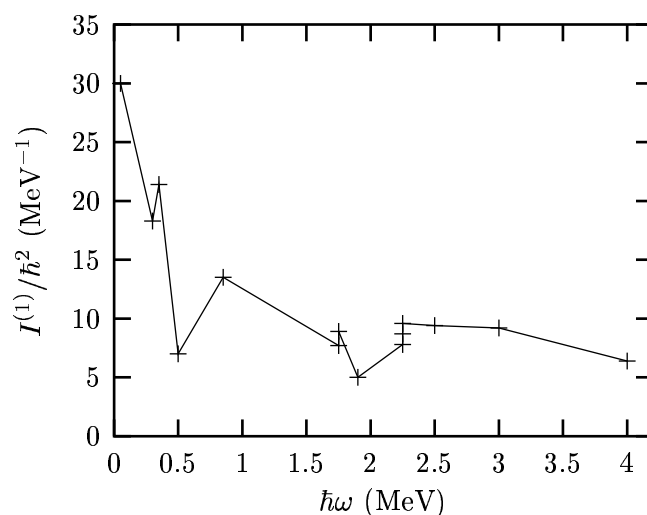


Figura 6.1: Momento de inercia cinético en función de la frecuencia de rotación (MeV) de la Banda 2 del núcleo ^{32}S mostrada en la sección 4.2; calculado con las ecuaciones (6.3), (6.5) y los datos de energía experimental dados en [27].

Estos momentos de inercia se encuentran definidos como:

$$I^{(1)} = \frac{\hbar\sqrt{j(j+1)}}{\omega} \quad (6.1)$$

$$I^{(2)} = \hbar d \frac{\sqrt{j(j+1)}}{d\omega} \quad (6.2)$$

los cuales se pueden escribir en términos de cantidades experimentales (energías de transición $E_\gamma(j_f \rightarrow j_i)$), esto es

$$\frac{I^{(1)}}{\hbar^2} = \frac{2j-1}{E_\gamma(j \rightarrow j-2)} \quad (6.3)$$

$$\frac{I^{(2)}}{\hbar^2} = \frac{4}{E_\gamma(j+2 \rightarrow j) - E_\gamma(j \rightarrow j-2)}; \quad (6.4)$$

en donde son útiles las expresiones

$$\hbar\omega^{(1)} = \frac{E_\gamma(j \rightarrow j-2)}{2} \quad (6.5)$$

$$\hbar\omega^{(2)} = \frac{E_\gamma(j+2 \rightarrow j) + E_\gamma(j \rightarrow j-2)}{4}. \quad (6.6)$$

Teniendo en consideración lo anterior surgen las Figuras 6.1 y 6.2 las cuales presentan los momentos de inercia cinético y dinámico en función de ω para analizar el comportamiento rotacional de la Banda 2 mencionada en la sección 4.2.

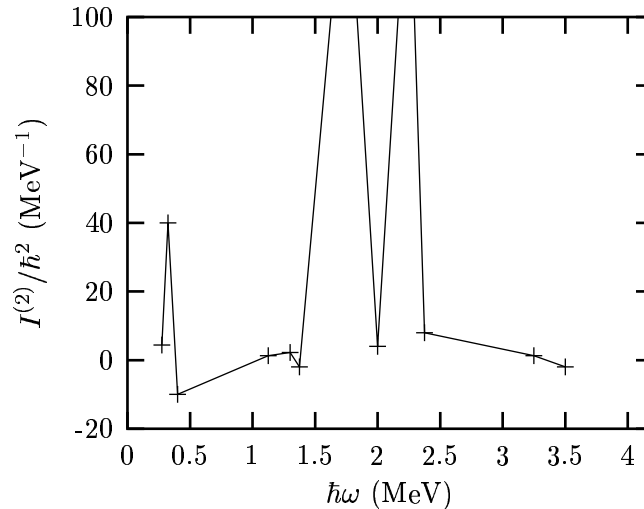


Figura 6.2: Momento de inercia dinámico en función de la frecuencia de rotación (MeV) de la Banda 2 del núcleo ^{32}S mostrada en la sección 4.2; calculado con las ecuaciones (6.4), (6.6) y los datos de energía experimental dados en [27].

En la Figura 6.1 se observa una disminución notable del momento de inercia en el rango de frecuencias $0 < \omega < 0.5$, de donde se podría intuir una imagen en la cual al comienzo (en las primeras energías de excitación de la banda) el núcleo a medida que va rotando se comprime manteniendo su masa constante y por tanto disminuyendo su momento de inercia. En el rango de frecuencias $0.5 < \omega < 2.4$ la variación del momento de inercia no es tan alto como en el anterior, apareciendo el fenómeno denominado *upbending* el cual constituye un aumento del momento de inercia a frecuencia constante. Por último, en el rango $2.4 < \omega < 4$ se tiene que el cambio de momento de inercia no es muy notorio lo que indica que estos 4 estados se acercan a la definición de banda “rotacional perfecta”.

Una forma de apreciar mejor las variaciones del momento de inercia con la frecuencia de rotación es por medio de la Figura 6.2 en donde se estudia las variaciones locales del momento de inercia cinético. En ésta se observa un pico aproximadamente a una frecuencia de 0.3 MeV el cual se debe a que a su alrededor el cambio del momento de inercia en función de la frecuencia es apenas de unas centésimas de MeV. Igualmente se presentan dos picos que crecen esquemáticamente hasta el infinito alrededor de frecuencias de 1.75 MeV y 2.25 MeV en donde también se muestra el *upbending*.

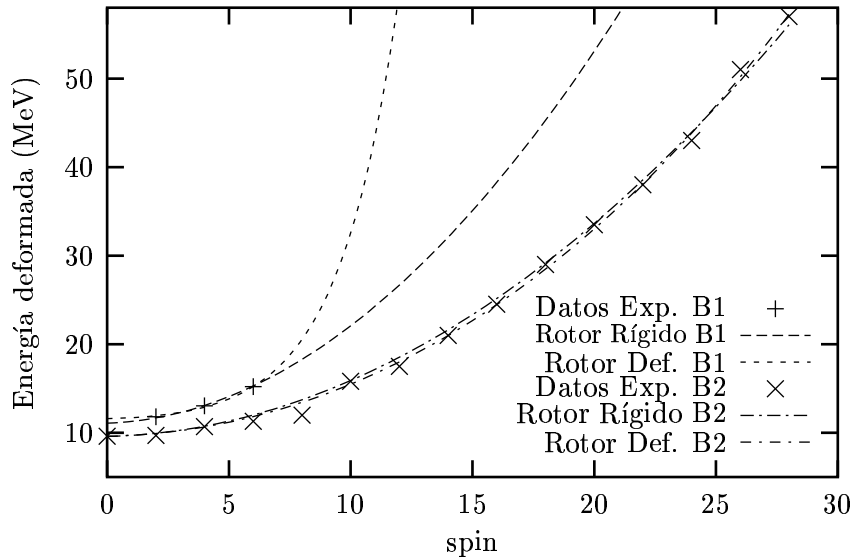


Figura 6.3: Energías experimentales de las bandas excitadas 1 y 2 del ^{32}S en función del spin y ajustes de éstas a las expresiones de un rotor rígido y uno q -deformado con $q = e^\tau$ (ec. 3.21).

Por otro lado, en la Figura 6.3 se tienen las energías experimentales de las bandas excitadas 1 y 2 del ^{32}S (sección 4.2) en función del spin, así como los ajustes de éstas a las energías teóricas de un rotor rígido y uno q -deformado con $q = e^\tau$ (ec. 3.21). En éstas se tuvo en cuenta un corrimiento E_0 ya que son bandas excitadas; el cual para la Banda 1 se ajustó al desconocer la energía del estado 0^+ (valor cabeza de banda), mientras que

para la Banda 2 se tomó como 9.6 MeV. De esta figura se observa que efectivamente las bandas presentan un comportamiento $J(J + 1)$ aunque el ajuste de rotor rígido no pasa por todos los puntos de la Banda 2 como era de esperarse a partir del análisis previo de los momentos de inercia, en donde se muestra que el comportamiento no es “perfectamente” rotacional; es más, el punto $((I, E) = 8, 12 \text{ MeV})$ es el que se encuentra más alejado de las curvas de los rotores rígido y deformado. Se tienen dos posibles explicaciones a este hecho, una es que tal vez existe otra banda no descubierta experimentalmente en donde existe un estado energético muy próximo que hace que exista una separación (repulsión) entre los dos de tal forma que se aleja el punto en cuestión de la banda rotacional. La otra explicación es que los 5 primeros estados podrían pertenecer a otra banda y entonces lo que se presenta en realidad es un cruce de bandas que puede ser visualizado en los picos de la Figura 6.2 que muestran el *upbending* el cual se presenta típicamente cuando existe este fenómeno.

Ahora, al observar los ajustes de la Banda 1 se tiene que los puntos experimentales pasan por las curvas asociadas a las dos expresiones teóricas en cuestión; sin embargo la predicción de los estados con spin 8 y 10 difiere notable entre las dos. Una forma de apreciar el ajuste con relación a cada uno de los estados energéticos experimentales de las dos bandas, así como la predicción de los dos siguientes excitados se tiene en las Tablas 6.2 (Banda 1) y 6.3 (Banda 2); en las cuales se muestra las energías experimentales y calculadas teóricamente con los parámetros dados en la Tabla 6.1 obtenidos al ajustar.

Tabla 6.1: Parámetros obtenidos al ajustar las energías de un rotor rígido (Rígido) y uno q -deformado (q -Def) a los datos experimentales de las bandas excitadas 1 y 2 del ^{32}S por medio del programa Gnunplot [32]; en donde ϵ_{rel} es el valor porcentual del error del ajuste con respecto al valor obtenido.

		Rígido	q -Def
Banda 1	$\hbar^2/2I$ (MeV)	0.100(3)	0.051(2)
	ϵ_{rel} (%)	3.02	3.26
	τ		0.204(7)
	ϵ_{rel} (%)		3.44
	E_{01} (MeV)	11.08(6)	11.63(7)
	ϵ_{rel} (%)	0.56	0.68
Banda 2	$\hbar^2/2I$ (MeV)	0.0572(5)	0.0527(4)
	ϵ_{rel} (%)	0.94	0.68
	τ		0.0194(8)
	ϵ_{rel} (%)		4.20

De la Tabla 6.3 se tiene que los errores porcentuales más bajos entre los dos ajustes, para la mayoría de estados de la Banda 2, corresponden a los calculados teniendo en cuenta la energía de un rotor q -deformado, lo que indica que es buena candidata para modelar esta banda. Cabe notar que en ninguna de las dos bandas a analizar se halló un valor de χ^2 para observar la fidelidad del ajuste; ya que, los errores experimentales no fueron reportados en [26] y [27]. Es por ello que se recurrió a calcular los errores porcentuales indicados en las Tablas 6.2 y 6.3 que indican cómo es éste para cada función punto a punto. Sin embargo es usual utilizar la expresión $\chi^2 = \sum_i^n (\text{Valor Exp} - \text{Valor Teor})^2$ [18] para hallar qué tal es el ajuste en promedio. El cual para la Banda 1 es

$$\chi_{\text{Rígido}}^2 = 0.02, \quad \chi_{q\text{-Def}}^2 = 0.05$$

y para la Banda 2 está dado por

$$\chi_{\text{Rígido}}^2 = 9.01, \quad \chi_{q\text{-Def}}^2 = 4.91.$$

Del anterior se puede afirmar nuevamente que el mejor ajuste a las energías experimentales es el q -deformado, para la Banda 2. Mientras para la Banda 1, si bien es mejor el de rotor rígido según este criterio, los valores de χ^2 no están muy alejados, lo que llevaría a pensar que lo ideal sería analizar bandas con muchos más puntos experimentales para poder afirmar cual de los ajustes entre rotor rígido y q -deformado es el más acertado.

Tabla 6.2: Comparación de la energía experimental (Exp.) de cada spin perteneciente a la Banda 1 con la calculada para un rotor rígido (Rígido) y q -deformado (q -Def.). El error porcentual se halla por medio de $\epsilon\% = |\text{Valor Exp.} - \text{Valor Teór.}| / \text{Valor Exp.} \times 100\%$.

spin	Exp.	Rígido	$\epsilon\%_{\text{Rígido}}$	q -Def.	$\epsilon\%_{q\text{-Def}}$
2	11.80	11.68	1.04	11.96	1.32
4	13.04	13.08	0.31	12.96	0.65
6	15.20	15.28	0.53	15.32	0.78
8		18.28		20.71	
10		22.08		32.93	

Al comparar la razón $\hbar^2/2I$ obtenida del ajuste de un rotor rígido para la Banda 1 con el calculado para un núcleo esférico dado por la siguiente expresión

$$I_{esf} = \frac{2}{5}MR^2 = 0.0138A^{5/3}\hbar^2/\text{MeV},$$

en donde A , M y R es su número de masa, masa y radio, respectivamente; se encuentra que éstos son exactos en la primera cifra decimal ya que $\hbar^2/2I_{esf} = 0.11$ MeV; mientras que el valor de un rotor q -deformado es aproximadamente la mitad de éstos valores, hecho que se ve reflejado en la predicción de los siguientes estados de excitación. Además como el resultado teórico de un núcleo esférico concuerda bastante bien con el del ajuste del rotor rígido se podría pensar que a lo largo de esta banda el núcleo está ligeramente deformado.

Tabla 6.3: Comparación de la energía experimental (Exp.) de cada spin perteneciente a la Banda 2 con la calculada para un rotor rígido (Rígido) y q -deformado (q -Def). El error porcentual se halla por medio de $\epsilon\% = |\text{Valor Exp.} - \text{Valor Teór.}|/\text{Valor Exp.} \times 100\%$.

spin	Exp.	Rígido	$\epsilon\%_{\text{Rígido}}$	q -Def.	$\epsilon\%_{q\text{-Def}}$
0	9.60	9.60	0	9.60	0
2	9.70	9.94	2.51	9.92	2.23
4	10.70	10.74	0.41	10.66	0.41
6	11.30	12.00	6.22	11.82	4.65
8	12.00	13.72	14.32	13.43	11.90
10	15.80	15.89	0.58	15.48	2.04
12	17.50	18.52	5.85	17.98	2.76
14	21.00	21.61	2.91	20.96	0.19
16	24.50	25.16	2.69	24.43	0.29
18	29.00	29.16	0.56	28.41	2.04
20	33.50	33.62	0.37	32.92	1.72
22	38.00	38.54	1.43	38.00	0.00
24	43.00	43.92	2.14	43.67	1.56
26	51.00	49.75	2.44	49.97	2.02
28	57.00	56.05	1.67	56.93	0.12
30		62.80		64.60	
32		70.00		73.02	

Del mismo modo, de la relación $\hbar^2/2I$ para la Banda 2 se obtiene

$$\left(\frac{I}{\hbar}\right)_{\text{Rotor Rígido}} = 8.74(8)\text{MeV}^{-1}$$

$$\left(\frac{I}{\hbar}\right)_{\text{Rotor } q\text{-deformado}} = 9.49(7)\text{MeV}^{-1}$$

los cuales están en buena correspondencia con el rango aproximado de valores de momento de inercia ($7.5 \text{ MeV} < I/\hbar < 10 \text{ MeV}$) que varían muy poco con la frecuencia mostrados en la Figura 6.1. Además, si se toma el valor promedio aproximado de I/\hbar^2 de esta región como 9 MeV^{-1} para calcular cuáles deberían ser las dimensiones de un hexágono bipiramidal con este momento de inercia. Se tiene que la distancia de las partículas alfa situadas en el plano hexagonal, que es la misma de éste a cada una de las 2 que se ubican perpendicularmente en el eje z (ver Figura 4.6 **Izquierda**), es:

$$r_{\text{hex}} = 4.33 \text{ fm.}$$

Ahora si se toma la configuración de “pesa” conformada por dos ^{16}O propuesta en [27] se tiene que la distancia entre oxígenos para $I/\hbar^2 = 9 \text{ MeV}^{-1}$ está dada por:

$$r_{\text{pesa}} = 4.84 \text{ fm;}$$

en donde estas dos configuraciones muestran que en la región en donde el momento de inercia para la Banda 2 se comporta como un rotor rígido, el ^{32}S a lo largo de la banda se encuentra deformado, ya que el radio esférico calculado para este núcleo resulta ser:

$$r_{\text{esf}} = 3.81 \text{ fm.}$$

Capítulo 7

Resumen y conclusiones

Un hecho interesante de las álgebras cuánticas es que la no conmutación de los elementos de las matrices deformadas se encuentra directamente relacionada con la no conmutatividad de las coordenadas sobre el cual se construyen. En el caso particular de interés asociado a rotaciones tridimensionales deformadas, esta situación influye de tal forma que las componentes de \vec{n} , que indica la dirección del vector alrededor del cual se efectúa la rotación deformada, no conmutan entre sí; a menos que éste se encuentre sobre el plano $x - y$ en donde los elementos matriciales en cuestión conmutan análogamente al caso “clásico”.

Entonces teniendo en cuenta lo anterior, que las rotaciones que se deforman y que dejan invariante una figura hexagonal bipiramidal asociada al núcleo ^{32}S son alrededor de vectores localizados en el plano $x - y$; se obtiene un valor para el parámetro $\tau = 2.1$ asociado con rotaciones de un ángulo π . El cual al ser reemplazado en la expresión energética de un rotor q -deformado con el momento de inercia del ^{32}S hallado para un eje en el mismo plano; proporciona un espectro cuyas energías de excitación son muy altas para describir, en general, cualquier espectro nuclear que rote este ángulo alrededor de los ejes en cuestión. Es más, los cálculos efectuados no sólo muestran estos valores teóricos para rotaciones de π sino hasta simetrías C_9 ($\theta = 2\pi/9$). Por lo tanto, se debe buscar una aplicación de los resultados a otros sistemas físicos altamente excitados.

De acuerdo a esto, se propone efectuar cálculos para otras configuraciones en cúmulos del ^{32}S y realizar así la predicción teórica para ejes de simetría cuyas direcciones presentan las tres componentes cartesianas y observar con ello si el efecto de n_z es tal, que es capaz de reducir el valor teórico de los parámetros τ asociados a una geometría específica. Asimismo, se propone otra explicación sobre el desacuerdo teórico en donde se tiene que el núcleo se encuentra rotando alrededor de un eje distinto a uno de simetría. En tal caso, el modelo sería incapaz de predecir cuál sería la configuración geométrica de la cabeza de banda de un espectro rotacional, ya que no se podría tener una relación directa entre geometría y espectro.

Con respecto a los ajustes de las energías teóricas de un rotor rígido y q -deformado a las

bandas experimentales excitadas 1 y 2, se tiene que éstos muestran un comportamiento $J(J + 1)$ como se indica en los artículos [26] y [27], pero no son “perfectamente rotacionales”. En particular dichas variaciones con respecto a tal rotor se presentan para la Banda 2 en gráficas que ilustran el comportamiento del momento de inercia en función de la frecuencia de rotación del núcleo en cuestión. De este hecho se toma ventaja al ajustar la expresión teórica de un rotor q -deformado, la cual tiene en cuenta estas discrepancias con respecto a un rotor ideal y que muestra para la Banda 2, en los cálculos de los errores porcentuales con respecto a los experimentales y en el valor de \varkappa (9.01 para el rotor rígido y 4.91 para el q -deformado respectivamente); que en general álgebras cuánticas es buena candidata para modelar esta banda. En cambio, teniendo en cuenta la Banda 1, se tiene que los valores de \varkappa se encuentran muy próximos (0.02 y 0.05 para el rotor rígido y el q -deformado respectivamente) como para *asegurar* que el rotor rígido es mejor.

Por último, al observar que el valor de $\hbar^2/2I$ hallado para el ajuste de la energía de un rotor rígido a la Banda experimental 1 y el calculado al considerar al ^{32}S como esférico son 0.100(3) MeV y 0.11 MeV respectivamente, se puede observar que a lo largo de esta banda el núcleo se encuentra levemente deformado. Mientras que al analizar los parámetros $\hbar^2/2I$ resultantes de los ajustes de los espectros teóricos de rotor rígido y deformado, que corresponden al rango de valores en donde el momento de inercia es constante para la Banda 2, se tiene que si se considera al núcleo como conformado por partículas en un hexágo bipiramidal o por dos ^{16}O en un “pesa” se puede concluir que a lo largo de esta banda éste se encuentra deformado.

Apéndice A

Energía de un rotor q -deformado

El hamiltoniano de un rotor q -deformado se propone de manera análoga al de un rotor rígido no deformado, el cual es:

$$H_{\text{rígido}} = \frac{\hbar^2}{2I} C$$

donde C es el operador de casimir de segundo orden del grupo $\text{SO}(3)$, el cual es equivalente a la siguiente relación

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_0^2 \\ &= J_- J_+ J_0 (J_0 + 1) \\ &= J_+ J_- J_0 (J_0 - 1) \\ &= J^2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Entonces, el hamiltoniano asociado a un rotor q -deformado se encuentra descrito por

$$H_{\text{def}} = \frac{\hbar^2}{2I} \mathcal{C}, \tag{A.2}$$

siendo \mathcal{C} el operador de casimir q -deformado de segundo orden del grupo $so_q(3)$.

A continuación se mostrará el procedimiento para encontrar el operador \mathcal{C} , así como su acción sobre un ket $|jm\rangle$; para obtener posteriormente la relación explícita dada en (A.2). Pero antes de entrar en detalle sobre los cálculos necesarios para encontrar tal relación teórica, es útil recordar el álgebra q -deformada de $so_q(3)$

$$[\hat{\mathcal{J}}^0, \hat{\mathcal{J}}^+] = \hbar \hat{\mathcal{J}}^+, \quad [\hat{\mathcal{J}}^0, \hat{\mathcal{J}}^-] = -\hbar \hat{\mathcal{J}}^-, \quad [\hat{\mathcal{J}}^+, \hat{\mathcal{J}}^-] = \hbar [2\hat{\mathcal{J}}^0], \tag{A.3}$$

así como la acción de los operadores esféricos deformados de momento angular sobre la base de momento angular $|jm\rangle$ ¹

$$\hat{\mathcal{J}}^0 |jm\rangle = m |jm\rangle, \quad \hat{\mathcal{J}}^+ |jm\rangle = \sqrt{[j-m][j+m+1]} |jm+1\rangle, \tag{A.4}$$

¹Estas relaciones se muestran con $\hbar = 1$ por facilidad en los cálculos.

$$\hat{\mathcal{J}}^- |jm\rangle = \sqrt{[j+m][j-m+1]} |jm-1\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Ahora, teniendo en cuenta (A.3) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}^0 (\hat{\mathcal{J}}^-)^l &= \hat{\mathcal{J}}^0 \hat{\mathcal{J}}^- (\hat{\mathcal{J}}^-)^{l-1} \\ &= (\hat{\mathcal{J}}^- \hat{\mathcal{J}}^0 - \hat{\mathcal{J}}^-) (\hat{\mathcal{J}}^-)^{l-1} \\ &= \hat{\mathcal{J}}^- \hat{\mathcal{J}}^0 (\hat{\mathcal{J}}^-)^{l-1} - (\hat{\mathcal{J}}^-)^l \\ &= \hat{\mathcal{J}}^- \hat{\mathcal{J}}^0 \hat{\mathcal{J}}^- (\hat{\mathcal{J}}^-)^{l-2} - (\hat{\mathcal{J}}^-)^l \\ &= (\hat{\mathcal{J}}^-)^2 \hat{\mathcal{J}}^0 (\hat{\mathcal{J}}^-)^{l-2} - (\hat{\mathcal{J}}^-)^2 (\hat{\mathcal{J}}^-)^{l-2} - (\hat{\mathcal{J}}^-)^l \\ &\quad \vdots \\ &= (\hat{\mathcal{J}}^-)^l (\hat{\mathcal{J}}^0 - l) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

y con lo anterior resulta

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{J}}^0)^k (\hat{\mathcal{J}}^-)^l &= (\hat{\mathcal{J}}^0)^{k-1} \hat{\mathcal{J}}^0 (\hat{\mathcal{J}}^-)^l \\ &= (\hat{\mathcal{J}}^0)^{k-1} (\hat{\mathcal{J}}^-)^l (\hat{\mathcal{J}}^0 - l) \\ &= (\hat{\mathcal{J}}^0)^{k-2} (\hat{\mathcal{J}}^-)^l (\hat{\mathcal{J}}^0 - l)^2 \\ &\quad \vdots \\ &= (\hat{\mathcal{J}}^-)^l (\hat{\mathcal{J}}^0 - l)^k. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Además, se puede demostrar que es válida la relación

$$[2\hat{\mathcal{J}}^0] (\hat{\mathcal{J}}^-)^l = (\hat{\mathcal{J}}^-)^l [2(\hat{\mathcal{J}}^0 - l)], \quad (\text{A.8})$$

teniendo en cuenta la definición de la función q -número $[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$, es decir

$$\begin{aligned} [2\hat{\mathcal{J}}^0] (\hat{\mathcal{J}}^-)^l &= \frac{q^{2\hat{\mathcal{J}}^0} - q^{-2\hat{\mathcal{J}}^0}}{q - q^{-1}} (\hat{\mathcal{J}}^-)^l \\ &= \frac{e^{2\hat{\mathcal{J}}^0 \ln q} - e^{-2\hat{\mathcal{J}}^0 \ln q}}{q - q^{-1}} (\hat{\mathcal{J}}^-)^l \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

y que se cumple

$$e^{2\hat{\mathcal{J}}^0 \ln q} (\hat{\mathcal{J}}^-)^l = (\hat{\mathcal{J}}^-)^l e^{2(\hat{\mathcal{J}}^0 - l) \ln q},$$

en donde esta última se ha hallado en base a la ecuación (A.7).

Entonces, análogamente a (A.1) se propone al operador de casimir q -deformado \mathcal{C} como la siguiente función de los operador esféricos deformados $\hat{\mathcal{J}}^+$, $\hat{\mathcal{J}}^-$ y $\hat{\mathcal{J}}^0$, la cual debe elegirse de tal forma que conmute con dichos operadores, esto es:

$$\mathcal{C} = \hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp + f(\hat{\mathcal{J}}^0). \quad (\text{A.10})$$

Luego, obsérvese la conmutación de (A.10) con $\hat{\mathcal{J}}^0$, de la cual es suficiente hallar $[\hat{\mathcal{J}}^0, \hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp]$ puesto que $[\hat{\mathcal{J}}^0, f(\hat{\mathcal{J}}^0)] = 0$; por lo tanto se encuentra

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{J}}^0, \hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp] &= \\ &= \pm \hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp \mp \hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp \\ &= 0; \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

ahora para los generadores $\hat{\mathcal{J}}^+$ y $\hat{\mathcal{J}}^-$ se tiene que la siguiente relación de conmutación no se anula, es decir:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{J}}^\pm, \hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp] &= \hat{\mathcal{J}}^\pm [\hat{\mathcal{J}}^\pm, \hat{\mathcal{J}}^\mp] \\ &= \mp \hat{\mathcal{J}}^\mp [2\hat{\mathcal{J}}^0] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

y por lo tanto un factor importante es el conmutador $[\hat{\mathcal{J}}^\mp, f(\hat{\mathcal{J}}^0)]$, hecho que conlleva a proponer la función $f(\hat{\mathcal{J}}^0)$ en términos de q -números, de tal forma que cuando el parámetro q tienda a 1 se recupere el casimir de $SU(2)$, esta es:

$$f(\hat{\mathcal{J}}^0) = [\hat{\mathcal{J}}^0 + \alpha][\hat{\mathcal{J}}^0 - \alpha], \quad (\text{A.13})$$

con lo cual se tiene

$$[\hat{\mathcal{J}}^\pm, f(\hat{\mathcal{J}}^0)] = \hat{\mathcal{J}}^\pm [\hat{\mathcal{J}}^0 + \alpha][\hat{\mathcal{J}}^0 - \beta] - [\hat{\mathcal{J}}^0 + \alpha][\hat{\mathcal{J}}^0 - \beta] \hat{\mathcal{J}}^\pm,$$

de donde resulta la siguiente expresión teniendo en cuenta (A.8)

$$[\hat{\mathcal{J}}^\pm, f(\hat{\mathcal{J}}^0)] = \hat{\mathcal{J}}^\pm [\hat{\mathcal{J}}^0 + \alpha][\hat{\mathcal{J}}^0 - \beta] - \hat{\mathcal{J}}^\pm [\hat{\mathcal{J}}^0 + (\alpha \pm 1)][\hat{\mathcal{J}}^0 - (\beta \pm 1)]$$

y utilizando la siguiente propiedad de los q -números

$$[a + b] = [a + 1][b] - [a][b - 1]$$

resulta

$$[\hat{\mathcal{J}}^\pm, f(\hat{\mathcal{J}}^0)] = \mp \hat{\mathcal{J}}^\pm [2\hat{\mathcal{J}}^0 + \alpha + \beta \pm 1].$$

Entonces teniendo en cuenta (A.12) y la anterior relación, se tiene que para que el conmutador $[\hat{\mathcal{J}}^\pm, \mathcal{C}]$ se anule se debe cumplir que $\alpha + \beta = \mp 1$ y por lo tanto se tiene:

$$\mathcal{C} = \hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp + [\hat{\mathcal{J}}^0 + \alpha][\hat{\mathcal{J}}^0 - (\alpha \pm 1)]; \quad (\text{A.14})$$

y si se observa la ecuación (A.1), resulta que el valor de α que se puede escoger para que se recupere el límite no deformado es 1. Por lo tanto resulta que el casimir de $su_q(2)$ es:

$$\mathcal{C} = \hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp + [\hat{\mathcal{J}}^0][\hat{\mathcal{J}}^0 - (\alpha \pm 1)]. \quad (\text{A.15})$$

Para hallar entonces el espectro energético q -deformado asociado al hamiltoniano de un rotor q -deformado, obsérvese la acción del operador de Casimir encontrado en (A.15), esto es:

$$\begin{aligned} \left(\hat{\mathcal{J}}^\pm \hat{\mathcal{J}}^\mp + [\hat{\mathcal{J}}^0][\hat{\mathcal{J}}^0 - (\alpha \pm 1)] \right) |jm\rangle &= \sqrt{[j \mp m][j \pm m + 1]} \sqrt{[j \pm m][j \mp m + 1]} |jm\rangle, \\ &+ [m][m + 1] |jm\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

en donde se ha utilizado las ecuaciones (A.4), (A.5) y que se cumple

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{J}}^0]|jm\rangle &= \frac{1}{q - q^{-1}}(e^{\hat{\mathcal{J}}^0 \ln q} - e^{-\hat{\mathcal{J}}^0 \ln q}|jm\rangle) \\ &\quad \frac{1}{q - q^{-1}}(e^{m \ln q} - e^{-m \ln q}|jm\rangle) \\ &= [m]|jm\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que $[-a] = -[a]$ y la siguiente propiedad

$$[a][b - c] + [b][c - a] + [c][a - b] \quad \text{con } a = j, \quad b = j + 1 \pm m, \quad c = m$$

se llega a que la acción del operador de Casimir q -deformado de $su_q(2)$ es:

$$\mathcal{C}|jm\rangle = [j][j + 1]|jm\rangle$$

y por lo tanto la energía de un rotor q -deformado según la ecuación (A.2) se encuentra descrita por:

$$E = \frac{\hbar^2}{2I}[j][j + 1].$$

Apéndice B

Cálculo de la matriz de rotación q deformada con $j=1$

B.1 Coeficientes q -deformados de Wigner-Clebsch Gordan

Una expresión general para los coeficientes de Wigner-Clebsch Gordan q deformados se encuentra descrita a continuación:

$$\begin{aligned}
 {}_q C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= \delta_{m, m_1 + m_2} q^{\frac{1}{2}(j_1 + j_2 - j)(j_1 + j_2 + j + 1) + (j_1 m_2 - j_2 m_1)} \Delta(j_1 j_2 j) \\
 &\times \left([j_1 + m_1]! [j_1 - m_1]! [j_2 + m_2]! [j_2 - m_2]! [j + m]! [j - m]! [2j + 1] \right)^{1/2} \\
 &\times \sum_n \frac{(-1)^n q^{-n(j_1 + j_2 + j + 1)}}{[n]! [j_1 + j_2 - j - n]! [j_1 - m_1 - n]! [j_2 + m_2 - n]! [j - j_2 + m_1 + n]! [j - j_1 - m_2 + n]!}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

con la función $\Delta(j_1 j_2 j)$ dada por:

$$\Delta(j_1 j_2 j) = \left(\frac{[j_1 + j_2 - j]! [j_1 - j_2 + j]! [-j_1 + j_2 + j]!}{[j_1 + j_2 + j + 1]!} \right)^{1/2}.$$

Anulándose estos coeficientes al no cumplirse las reglas de selección $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ y $m = m_1 + m_2$.

Teniendo en cuenta las anteriores relaciones se puede demostrar que se cumple la siguiente propiedad:

$${}_q C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = (-1)^{j_1 + j_2 - j} {}_{q^{-1}} C_{m_1 m_2 m}^{j_2 j_1 j}, \tag{B.2}$$

además de las relaciones particulares:

$${}_q C_{m \frac{1}{2} m + \frac{1}{2}}^{j \frac{1}{2} j + \frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{2}(j-m)} \sqrt{\frac{[j + m + 1]}{[2j + 1]}} \tag{B.3}$$

$${}^q C_{m-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}^{j\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{2}(j+m)} \sqrt{\frac{[j-m+1]}{[2j+1]}} \quad (\text{B.4})$$

Luego de las ecuaciones (B.3) y (B.4) se pueden hallar los coeficientes q-Wigner-Clebsch Gordan:

$${}^q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} = 1 \quad (\text{B.5})$$

$${}^q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} = q^{1/2}([2])^{-1/2} \quad (\text{B.6})$$

$${}^q C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} = 1 \quad (\text{B.7})$$

$${}^q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} = q^{-1/2}([2])^{-1/2}; \quad (\text{B.8})$$

en donde se ha utilizado en la última relación la propiedad descrita en (B.2).

B.2 Obtención de los elementos matriciales a partir del acople de $J = 1/2$

La ley se encuentra descrita por la siguiente expresión:

$${}^q D_{m'm}^1(T) = \sum_{m_1, m'_1, m_2, m'_2} {}^q C_{m_1 m_2 m}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}}(T) {}^q D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}}(T), \quad (\text{B.9})$$

siendo ${}^q C_{m_1 m_2 m}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}$ y ${}^q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}$ coeficientes de Clebsch Gordan q deformados (ver Apéndice B). Mientras que ${}^q D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}}$ y ${}^q D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}}$ son elementos matriciales de la matriz de rotación T con $J = 1/2$ perteneciente a $su_q(2)$ dada en (3.36).

Si se toma el valor $m = 1$ se tiene que los únicos valores que producen coeficientes q-Wigner-Clebsch Gordan distintos de cero para m_1 y m_2 son $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$. Hecho que convierte la expresión anterior en¹:

$${}^q D_{m'_1}^1(T) = \sum_{m'_1, m'_2} {}^q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}m'_1}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.10})$$

y sumando sobre m'_1 en la anterior resulta

$${}^q D_{m'_2}^1(T) = \sum_{m'_2} {}^q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}^q C_{\frac{1}{2}m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} + {}^q C_{-\frac{1}{2}m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{B.11})$$

¹De ahora en adelante se omitirá la dependencia en T de ${}^q D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}}$ y ${}^q D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}}$ por facilidad de escritura.

Para obtener valores no nulos, se tienen en cuenta las reglas de selección para los valores primados, obteniéndose las siguientes relaciones:

$${}^q D_{11}^1(T) = \left({}^q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right)^2, \quad (\text{B.12})$$

$${}^q D_{01}^1(T) = {}^q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}^q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}^q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right), \quad (\text{B.13})$$

$${}^q D_{-11}^1(T) = {}^q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right)^2; \quad (\text{B.14})$$

entonces, reemplazando las funciones relacionadas a los coeficientes de Clebsh Gordan q deformadas de las ecuaciones (B.12), (B.13), y (B.14) mostradas en (B.5), (B.6), (B.7) y (B.8) del apéndice B y los elementos matriciales de la matriz T hallada para $su_q(2)$ se llega a:

$${}^q D_{11}^1(T) = a^2, \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} {}^q D_{01}^1(T) &= q^{-1/2}([2])^{-1/2} a(-qb^*) + q^{1/2}([2])^{-1/2} (-qb^*) a \\ &= -\sqrt{[2]} q^{3/2} ab^*, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$${}^q D_{-11}^1(T) = (qb^*)^2, \quad (\text{B.17})$$

en donde en la ecuación (B.16) se ha utilizado una de las relaciones de conmutación citadas en (3.37) ya que se está construyendo la representación tridimensional de $su_q(2)$, es decir en el caso tridimensional se cumplen las mismas relaciones de conmutación del caso bidimensional.

Ahora, si se toma en la relación (5.10) el valor $m = 0$ se tiene

$${}^q D_{m'0}^1(T) = \sum_{m'_1 m'_2} \left({}^q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}m'_1}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} + {}^q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}m'_1}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.18})$$

la cual al sumarse sobre el índice m'_1 se convierte en:

$$\begin{aligned} {}^q D_{m'0}^1(T) &= \sum_{m'_2} {}^q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}^q C_{\frac{1}{2}m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} + {}^q C_{-\frac{1}{2}m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &+ {}^q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}^q C_{\frac{1}{2}m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} + {}^q C_{-\frac{1}{2}m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} \right); \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

de donde se obtienen las siguientes 3 relaciones al tener en cuenta que los valores permitidos de m' son 1, 0, -1:

$${}^q D_{10}^1(T) = {}^q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}^q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned}
{}^q D_{00}^1(T) = & {}_q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}_q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}_q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right) \\
& + {}_q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}_q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}_q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right), \tag{B.21}
\end{aligned}$$

$${}^q D_{-10}^1(T) = {}_q C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}_q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}_q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right). \tag{B.22}$$

Entonces, de las relaciones de conmutación que cumplen los elementos matriciales pertenecientes a la matriz T de $su_q(2)$ y de los coeficientes q-Wigner-Clebsch Gordan dados de (B.5-B.8) resulta:

$$\begin{aligned}
{}^q D_{10}^1(T) = & q^{-1/2}([2])^{-1/2}ab + q^{1/2}([2])^{-1/2}ba \\
= & \sqrt{[2]}q^{1/2}ab, \tag{B.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^q D_{00}^1(T) = & q^{-1}([2])^{-1}aa^* - ([2])^{-1}qb^*b - ([2])^{-1}qbb^* + q([2])^{-1}a^*a \\
= & ([2])^{-1}aa^*q^{-1} - ([2])^{-1}q(b^*b + bb^*) + q([2])^{-1}(aa^* - (q^2 - 1)bb^*) \\
= & aa^* - q^2bb^*, \tag{B.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^q D_{-10}^1(T) = & q^{-1/2}([2])^{-1/2}(-qb^*)a^* + q^{1/2}([2])^{-1/2}a^*(-qb^*) \\
= & -\sqrt{[2]}q^{3/2}b^*a^*. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Por otro lado, para hallar los 3 elementos restantes de la matriz de rotación q deformada con $j = 1$ se evalúa el valor $m = -1$ en la ecuación (5.10), de donde se obtiene:

$${}^q D_{m'-1}^1(T) = \sum_{m_1, m'_1, m_2, m'_2} {}_q C_{m_1 m_2 -1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}_q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}} \tag{B.26}$$

y teniendo en cuenta que $m = m_1 + m_2$ se concluye que el único valor posible para m_1 y m_2 es $-1/2$, con lo cual se llega a:

$${}^q D_{m'-1}^1(T) = \sum_{m'_1, m'_2} {}_q C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}_q C_{m'_1 m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}m'_1}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}}. \tag{B.27}$$

Si se suma sobre el índice m'_1 en la anterior relación se tiene que los elementos matriciales ${}^q D_{m'-1}^1(T)$ pueden ser expresados como:

$${}^q D_{m'-1}^1(T) = \sum_{m'_2} {}_q C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}_q C_{\frac{1}{2}m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} + {}_q C_{-\frac{1}{2}m'_2 m'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}m'_2}^{\frac{1}{2}} \right) \tag{B.28}$$

cuyos valores distintos de cero están dados por

$${}^q D_{1-1}^1(T) = {}_q C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}_q C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \tag{B.29}$$

$${}^q D_{0-1}^1(T) = {}_q C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} \left({}_q C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}_q C_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right), \tag{B.30}$$

$${}^q D_{-1-1}^1(T) = \left({}^q C_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1} {}^q D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (\text{B.31})$$

y los cuales al ser evaluados en su orden para $m' = 1, 0, -1$ se convierten en:

$${}^q D_{1-1}^1(T) = b^2, \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} {}^q D_{0-1}^1(T) &= ([2])^{-1/2} (q^{-1/2} b a^* + q^{1/2} a^* b) \\ &= ([2])^{-1/2} (q^{3/2} + q^{-1/2}) b a^* \\ &= ([2])^{-1/2} q^{1/2} b a^*, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$${}^q D_{-1-1}^1(T) = (a^*)^2. \quad (\text{B.34})$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta los 9 elementos hallados se tiene que la matriz de rotación q -deformada con $j = 1$ se encuentra descrita por:

$$\begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{[2]} q^{1/2} a b & b^2 \\ -\sqrt{[2]} q^{3/2} a b^* & a a^* - q^2 b b^* & \sqrt{[2]} q^{1/2} b a^* \\ q^2 (b^*)^2 & -\sqrt{[2]} q^{3/2} b^* a^* & (a^*)^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.35})$$

de la cual se observa que cuando q tiende a 1 se recupera la matriz de rotación no deformada dada en (5.4) si

$$a \rightarrow \alpha, \quad b \rightarrow \beta, \quad a^* \rightarrow \alpha^* \quad y \quad b^* \rightarrow \beta^*.$$

Apéndice C

Relación entre álgebra no conmutativa y coordenadas no conmutantes

Un hecho interesante de las álgebras cuánticas es que la introducción de álgebras no conmutativas lleva a la obtención de espacios con coordenadas no conmutativas y viceversa. En lo siguiente se mostrará un ejemplo de como las coordenadas no conmutantes originan un álgebra no conmutativa.

Considérese el espacio espinorial bidimensional conocido como “plano cuántico” en donde los espinores base $\chi_+(0)$ y $\chi_-(0)$ q conmutan, es decir, cumplen la siguiente relación de conmutación:

$$\chi_+(0)\chi_-(0) = q^{-1}\chi_-(0)\chi_+(0) \quad (\text{C.1})$$

y ahora supóngase que bajo una transformación esta q conmutación se conserva es decir si se tiene:

$$\begin{pmatrix} \chi'_+ \\ \chi'_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(0) \\ \chi_-(0) \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

se cumple que

$$\chi'_+\chi'_- = q^{-1}\chi'_-\chi'_+.$$

Entonces de la anterior teniendo en cuenta (C.2) resulta la siguiente expresión:

$$(a\chi_+(0) + b\chi_-(0))(-qb^*\chi_+(0) + a^*\chi_-(0)) = q^{-1}(-qb^*\chi_+(0) + a^*\chi_-(0))(a\chi_+(0) + b\chi_-(0))$$

la cual al ser desarrollada se convierte en

$$\begin{aligned} -qab^*\chi_+^2(0) + aa^*\chi_+(0)\chi_-(0) - qbb^*\chi_-(0)\chi_+(0) + ba^*\chi_-^2(0) = \\ q^{-1}(-qb^*a\chi_+^2(0) - qb^*b\chi_+(0)\chi_-(0) + a^*a\chi_-(0)\chi_+(0) + a^*b\chi_-^2(0)), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

y en donde se ha considerado que los espinores $\chi_+(0)$ y $\chi_-(0)$ conmutan con a , a^* , b y b^* . Ahora, si se factorizan términos se tiene

$$aa^*\chi_+(0)\chi_-(0) - qbb^*\chi_-(0)\chi_+(0) + b^*b\chi_+(0)\chi_-(0) - q^{-1}a^*a\chi_-(0)\chi_+(0) \\ + (b^*a - qab^*)\chi_+^2(0) + (ba^* - q^{-1}a^*b)\chi_-^2(0) = 0 \quad (\text{C.4})$$

y utilizando (C.1) en (C.4) se llega a

$$ab^* = q^{-1}b^*a, \quad ba^* = q^{-1}a^*b, \quad [a, a^*] = q^2bb^* - b^*b, \quad (\text{C.5})$$

siendo estas expresiones algunas de las relaciones de conmutación que cumplen los elementos matriciales de la representación fundamental de $su_q(2)$.

Del mismo modo, si se analiza la acción por izquierda de la matriz citada anteriormente sobre el vector traspuesto, esto es, si se toma:

$$(\chi_+'' \quad \chi_-'') = (\chi_+(0) \quad \chi_-(0)) \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

y se exige que esta transformación también sea covariante con respecto a (C.1), resultan las relaciones de conmutación restantes que cumplen los elementos matriciales en cuestión, las cuales son:

$$ab = q^{-1}ba, \quad b^*a^* = q^{-1}a^*b^* \quad [a, a^*] = q^2b^*b - bb^*, \quad (\text{C.7})$$

de donde se puede concluir al observar la relación de conmutación del extremo derecho de (C.5) y (C.7) que se cumple:

$$b^*b = bb^* \quad (\text{C.8})$$

Bibliografía

- [1] K. Heyde. *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics*. Institute of Physics Publishing, second edition, 1999.
- [2] P. E. Hodgson, E. Gadioli, and E. Gadioli Erba. *Introductory Nuclear Physics*. Oxford Science Publications, 1999.
- [3] Sven G. Nilsson and I. Ragnarsson. *Shapes and Shells in Nuclear Structure*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] A. Bohr and Ben R. Mottelson. *Nuclear Structure*, volume II. World Scientific, 1998.
- [5] Richard F. Casten. *Nuclear Structure from a Simple Perspective*. Oxford Science Publications, second edition, 2000.
- [6] J. Blatt and V. Weisskopf. *Theoretical Nuclear Physics*. Dover Publications, 1991.
- [7] W. Greiner, J. Park, and W. Scheid. *Nuclear Molecules*. World Scientific, 1995.
- [8] J. A. Wheeler. Molecular viewpoints in nuclear structure. *Phys. Rev.*, 52:1083, 1937.
- [9] L. Hafstad and E. Teller. The alpha-particle model of the nucleus. *Phys. Rev.*, 54:681, 1938.
- [10] F. Iachello and P. Van Isacker. *The Interacting Boson-Fermion Model*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1991.
- [11] R. Bijker and F. Iachello. Cluster states in nuclei as representations of a $u(\nu + 1)$ group. *Phys. Rev. C.*, 61(067305), 2000.
- [12] R. Bijker and F. Iachello. The algebraic cluster model. Three-body clusters. *Ann. Phys.*, 298:334, 2002.
- [13] M. Mariscotti, G. Scharff, and B. Buck. Phenomenological analysis of ground-state bands in even-even nuclei. *Phys. Rev.*, 178(4):1864, 1969.
- [14] F. Stancu. *Group Theory in Subnuclear Physics*. Oxford University Press, 1996.
- [15] J. Ramaswamy. An introduction to quantum algebras and their applications. *math-ph*, 0003018, 2000.

-
- [16] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, and D. Lenis. Quantum algebras in nuclear structure. *nucl-th*, 9512017, 1995.
- [17] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, A. Faessler, P. Raychev, and R. Roussev. Quantum algebraic description of vibrational and transitional nuclear spectra. *Phys. Rev. C.*, 50:497, 1994.
- [18] D. Bonatsos, S. Drenks, P. Raychev, R. Roussev, and Y. Smirnov. $su_q(2)$ description of rotational spectra and its relation to the variable moment of inertia model. *Phys. Lett B*, 251:477, 1990.
- [19] H. Ejiri and M. J. a. de Voigt. *Gamma-Ray and Electron Spectroscopy in Nuclear Physics*. Oxford Science Publications, 1989.
- [20] W. Greiner and B. Müller. *Quantum Mechanics Symmetries*. Springer-Verlag, 1989.
- [21] M. Angelova. Applications of classical and quantum algebras to molecular thermodynamics. *cond-mat*, 0201240, 2002.
- [22] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, and D. Lenis. Quantum algebraic symmetries in nuclear and molecular physics. *nucl-th*, 9512016, 1995.
- [23] A. Gavrilik. Quantum algebras in particle phenomenological description of particle properties. *Nuc. Phys. B*, 102, 2001.
- [24] F. Ingebretsen et al. Evidence for vibrational excited states in ^{32}s . *Nucl. Phys.*, A161:433–448, November 1971.
- [25] Firestone et al. *Table of Isotopes*. Wiley, New York, 1996.
- [26] K. Morita et al. Possible quasimolecular bands in ^{32}s . *Phys. Rev. Lett.*, 55(2):185–188, July 1985.
- [27] S. Ohkubo and K. Yamashita. Evidence for $^{16}\text{o}+^{16}\text{o}$ cluster bands in ^{32}s . *Phys. Rev. C.*, 66(021301), August 2002.
- [28] John Jairo Sandoval Llanos. Una aplicación del álgebra cuántica $su_q(2)$ a la física nuclear. Tesis de Pregrado. Universidad Nacional de Colombia, 2003.
- [29] S. Sternberg. *Group theory and physics*. Cambridge University Press, 1994.
- [30] Eugene P. Wigner. *Group theory and its applications to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press, 1959.
- [31] M. J. A. de Voight, J. Dudek, and Z. szymansky. High-spin phenomena in atomic nuclei. *Reviews of Modern Physics*, 55(4), October 1983.
- [32] T. Williams and et. al. *GNUNPLOT*. GNU Project and Free Software Foundation, Unix Version 3.7, 1999.