

# Índice General

<b>1</b>	<b>Cadenas radiactivas naturales</b>	<b>1</b>
1.1	Radiactividad . . . . .	1
1.2	Cadenas radiactivas . . . . .	2
1.3	Radiactividad Natural . . . . .	4
1.3.1	Solución a la ecuación de Bateman . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Espectroscopía de rayos gamma con centelladores</b>	<b>8</b>
2.1	Componentes de un espectro . . . . .	8
2.1.1	Fotopico . . . . .	8
2.1.2	Fondo Compton . . . . .	10
2.1.3	Pico de retrodispersión Compton . . . . .	11
2.1.4	Picos de escape simple y doble . . . . .	12
2.1.5	Efectos combinados . . . . .	12
2.2	Características generales de los detectores . . . . .	13
2.2.1	Resolución en energía . . . . .	13
2.2.2	Eficiencia . . . . .	14
2.2.3	Función respuesta . . . . .	15
2.2.4	Tiempo de respuesta y tiempo muerto . . . . .	16
2.3	Detectores de centelleo . . . . .	16
2.3.1	Características generales . . . . .	16
2.3.2	Cristales inorgánicos . . . . .	17
2.3.3	Respuesta a la salida de luz de un centellador . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Simulación de espectros</b>	<b>19</b>
3.1	Método de Monte Carlo . . . . .	19
3.1.1	Función acumulativa para el fotopico y el pico de retrodispersión	20
3.1.2	Función acumulativa para el fondo Compton . . . . .	21
3.2	Datos de entrada del programa de simulación . . . . .	21
3.2.1	Intensidades de los principales rayos gamma provenientes de las cadenas radiactivas naturales . . . . .	21
3.2.2	Calibración Canal-Energía y desviación estándar como función de la energía . . . . .	24
3.3	Cálculo de la probabilidad de interacción . . . . .	24
3.3.1	Intensidad para cada componente del espectro . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Resultados de la simulación</b>	<b>29</b>
4.1	Comparación de espectros monoenergéticos . . . . .	29
4.2	Espectros polienergéticos . . . . .	32
4.2.1	Comparación entre espectros naturales simulados y experimentales	34
4.3	Conclusiones . . . . .	35
<b>A</b>	<b>Algunas ramificaciones y tiempos de vida para la serie del torio</b>	<b>37</b>
<b>B</b>	<b>Diagrama de bloques del programa de simulación</b>	<b>39</b>
<b>C</b>	<b>Código fuente del programa de simulación</b>	<b>40</b>

# Capítulo 1

## Cadenas radiactivas naturales

Según la teoría de la *nucleosíntesis*, en la formación de los elementos (principalmente en el interior de las estrellas) se crearon elementos estables e inestables. Siendo éstos últimos *radiactivos* y en su gran mayoría transuránicos (número de protones mayor a 92). La radiactividad natural es la que proviene de los elementos radiactivos que se encuentran en la naturaleza y será estudiada en el presente capítulo.

### 1.1 Radiactividad

La *radiactividad* es el fenómeno por el cual un núcleo inestable espontáneamente emite una partícula o un fotón (ver Figura 1.1) [1].

Muchos procesos radiactivos incluyen el *decaimiento  $\alpha$* , en el cual el núcleo pierde energía en forma de masa al emitir un núcleo de  ${}^2\text{He}$ , pasando de tener número de masa  $A$  a tener  $A-4$ ; el *decaimiento  $\beta$* , en el cual se emite un electrón (decaimiento  $\beta^-$ ) y un antineutrino mediante la transformación de un neutrón en un protón dentro del núcleo ( $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ ), o un positron (decaimiento  $\beta^+$ ) y un neutrino mediante la transformación de un protón en un neutrón ( $p \rightarrow n + e + \nu$ ); y la emisión de rayos gamma, los cuales son radiación electromagnética con un rango de energías que va desde los cientos de keV hasta las unidades o decenas de MeV.

La *actividad* de una muestra radiactiva se define como el número de decaimientos por unidad de tiempo y se expresa en  $\mu\text{Ci}$  (micro-Curie) o en  $\text{Bq}$  (Becquerel), las cuales se han definido como

$$\mu\text{Ci} = 3.7 \text{ desintegraciones/s (dps)} \quad (1.1)$$

$$1 \text{ Bequerel (Bq)} = 1 \text{ desintegración/s.} \quad (1.2)$$

Las *cadenas radiactivas* están constituidas por todos los núcleos que son producidos cuando un primer núcleo (El núcleo más pesado dentro de la cadena y que es denominado *padre*) decae a otro núcleo (llamado *hijo*) y éste a su vez decae a otro núcleo inestable y así sucesivamente hasta alcanzar finalmente un núcleo estable.

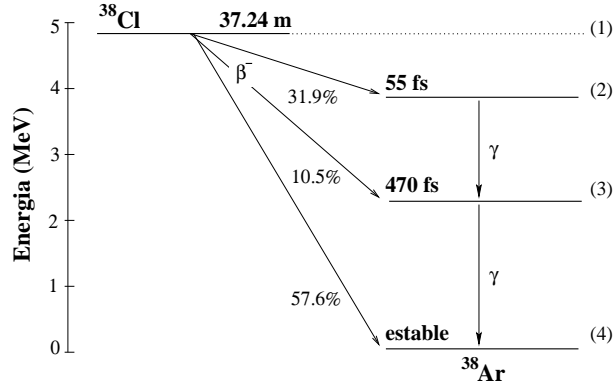


Figura 1.1: Esquema de decaimiento del  $^{38}\text{Cl}$ . Se muestran el tiempo de vida media y la energía del estado base del  $^{38}\text{Cl}$  (representado por (1)) respecto al estado base del núcleo hijo  $^{38}\text{Ar}$  (4), así como las energías y los tiempos de vida media de los dos primeros estados excitados del  $^{38}\text{Ar}$  ((2) y (3)). Se especifican las probabilidades relativas para el decaimiento  $\beta^-$  del  $^{38}\text{Cl}$  a los estados del  $^{38}\text{Ar}$  y cuando los estados excitados se pueblan, decaen por emisión  $\gamma$  a otro estado excitado de menor energía cumpliendo ciertas reglas de selección.

## 1.2 Cadenas radiactivas

A principios del siglo XX Rutherford y Soddy [2] establecieron experimentalmente la *ley de decaimiento radiactivo*, la cual expresa que la actividad de una muestra radiactiva decae exponencialmente en el tiempo. En términos de la mecánica cuántica, un proceso de decaimiento está gobernado por la probabilidad de transición en la unidad de tiempo  $\lambda$  (también llamada constante de decaimiento). Si un núcleo tiene más de un modo de decaer,  $\lambda$  será la suma de las constantes de decaimiento de cada modo por separado. Luego, en una muestra de  $N$  núcleos radiactivos de la misma especie, el número promedio de decaimientos en un lapso de tiempo  $dt$  está dado por

$$dN = -\lambda N dt. \quad (1.3)$$

Si  $N$  es muy grande es posible considerarlo continuo, luego la forma diferencial de la ley de decaimientos radiactivos ( ecuación (1.3)) puede ser integrada y toma la forma exponencial

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \quad (1.4)$$

donde  $N(0)$  es el número de núcleos en el instante inicial  $t = 0$ . Luego la actividad está dada por  $\lambda N(t)$ .

En la práctica, en vez de  $\lambda$ , es más habitual usar el *tiempo de vida* el cual se define como el inverso de  $\lambda$ , es decir,

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \quad (1.5)$$

por lo tanto es justamente el tiempo que le toma a la muestra en disminuir su actividad a  $1/e$  de su actividad inicial. Es usado igualmente el *tiempo de vida medio*  $T_{1/2}$  el cual se define como el tiempo para el cual la actividad de la muestra es la mitad de la actividad inicial. De estas dos definiciones y mediante la ecuación (1.4) se llega a

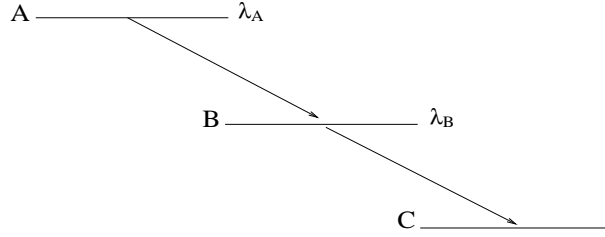


Figura 1.2: Esquema de una cadena radiactiva de tres núcleos A, B y C, siendo C un núcleo estable.

que el tiempo de vida medio y el tiempo de vida están relacionados por la siguiente expresión

$$T_{1/2} = \tau \ln 2. \quad (1.6)$$

Estudiemos, a modo de ejemplo, el caso simple de una cadena de tres núcleos, como se observa en la Figura A, en la cual el núcleo C es estable. Mediante la ley de decaimientos radiactivos se llega a las siguientes ecuaciones

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \quad (1.7)$$

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B \quad (1.8)$$

$$\frac{dN_C}{dt} = \lambda_B N_B, \quad (1.9)$$

donde  $\lambda_A$  y  $\lambda_B$  son las correspondientes constantes de decaimiento. Si inicialmente  $N_B(0) = N_C(0) = 0$ , las soluciones de las ecuaciones (1.7), (1.8) y (1.9) son respectivamente

$$N_A(t) = N_A(0)e^{-\lambda_A t} \quad (1.10)$$

$$N_B(t) = N_A(0) \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} [e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}] \quad (1.11)$$

$$N_C(t) = N_A(0) \left( 1 + \frac{1}{\lambda_A - \lambda_B} [\lambda_A e^{-\lambda_B t} - \lambda_B e^{-\lambda_A t}] \right). \quad (1.12)$$

Para el tiempo  $t_{max}$  dado por

$$t_{max} = \frac{\ln \frac{\lambda_B}{\lambda_A}}{\lambda_B - \lambda_A}, \quad (1.13)$$

la actividad  $\lambda_B N_B$  es máxima y éste punto es conocido como *equilibrio ideal*. En cualquier otro tiempo, la razón entre la actividad de B respecto a la actividad de A está dada por

$$\frac{\lambda_B N_B}{\lambda_A N_A} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} (1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t}). \quad (1.14)$$

De la anterior ecuación se pueden distinguir tres casos:

1. Si  $\lambda_A > \lambda_B$ , la razón incrementa con el tiempo

- Si  $\lambda_B > \lambda_A$ , la razón es casi constante (y mayor que 1) para  $t$  grande. Denominado *equilibrio transitorio*
- Si  $\lambda_B \gg \lambda_A$ , la razón llega a ser rápidamente cercana a 1 y se está en el denominado *equilibrio secular*. En cuyo caso la actividad del hijo es igual a la del padre.

### 1.3 Radiactividad Natural

De los elementos radiactivos, predichos por la teoría de la nucleosíntesis, están presentes en la Tierra de nuestros días los que tengan tiempos de vida mayores o comparables a la edad geológica de la Tierra, (cerca de  $4.5 \times 10^9$  años) o aquellos que a pesar de tener un tiempo de vida corto son continuamente producidos por precursores con tiempos de vida muy largos. Por lo tanto, la radiación natural es aquella que proviene del medio ambiente, es decir, de los núcleos inestables que se encuentran de forma natural en las rocas, en el agua, en las plantas, etc., o que es producida como radiación secundaria por los rayos cósmico.

En gran medida la radiación natural se debe al  $^{40}\text{K}$  ( $T_{1/2} = 1.277(8) \times 10^9$  años) y a los isótopos de los elementos pesados divididos en tres *cadena radiactivas naturales* conocidas como las series del torio, del uranio y del actinio, las cuales son originadas por el  $^{232}\text{Th}$  ( $T_{1/2} = 1.405(6) \times 10^{10}$  años), por el  $^{238}\text{U}$  ( $T_{1/2} = 4.468(3) \times 10^9$  años) y por el  $^{235}\text{U}$  ( $T_{1/2} = 7.038(5) \times 10^8$  años) respectivamente [1].

El  $^{40}\text{K}$  decae, mediante Captura electrónica ( $e^- + p \rightarrow n + \nu$ ) y con una ramificación del 10.67%, a un estado excitado del  $^{40}\text{Ar}$  ( $T_{1/2} = 1.12(4)$  ps), que a su vez decae emitiendo un rayo gamma con energía  $E_\gamma = 1460.859(5)$  keV (Figura 1.3).

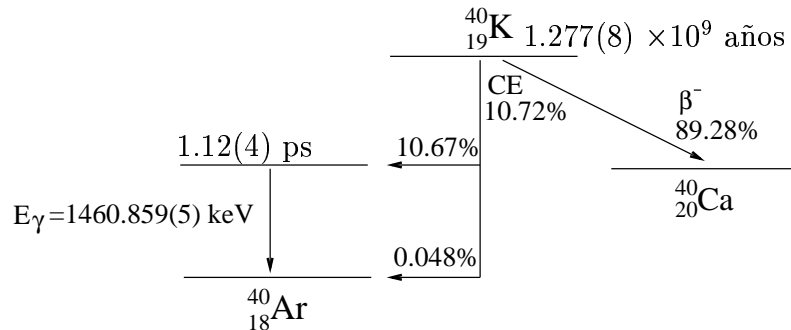


Figura 1.3: Esquema del decaimiento del  $^{40}\text{K}$  [1], el cual decae al  $^{40}\text{Ar}$  mediante Captura electrónica.

Los núcleos que hacen parte de la serie del torio (Figura 1.4) tienen número de masa  $A = 4p$  donde  $p = 52, 53, \dots, 58$ ; los de la serie del uranio (Figura 1.5) tienen  $A = 4p + 1$  donde  $p = 52, 53, \dots, 59$  y los de la serie del actinio (Figura 1.6) tienen  $A = 4p + 3$  donde  $p = 51, 52, \dots, 58$  [3].

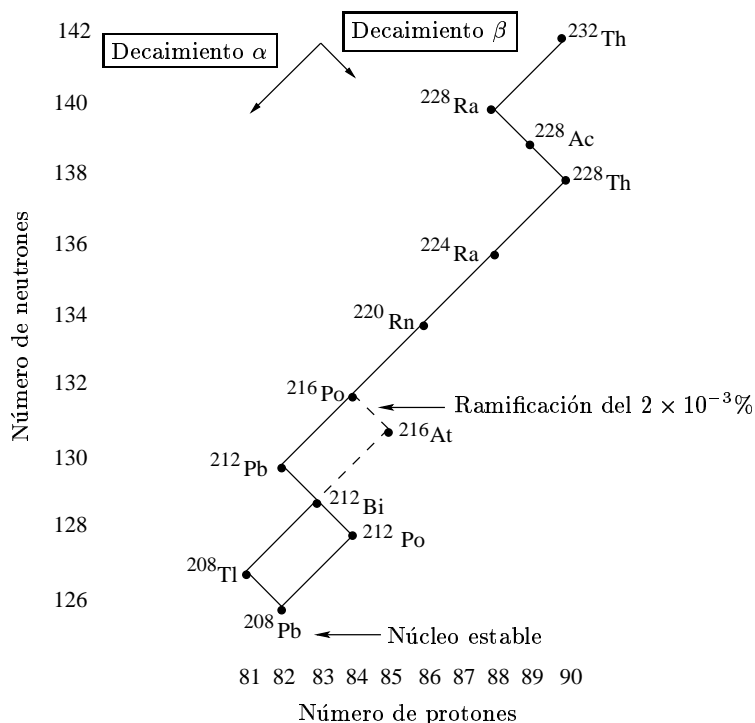


Figura 1.4: Serie radiactiva del torio. Como se observa, sólo un  $2 \times 10^{-3}\%$  de los posibles decaimientos del  $^{216}\text{Po}$  pueblan al  $^{216}\text{At}$ , lo cual indica que el  $^{216}\text{At}$  es un núcleo problemáticamente poblado.

### 1.3.1 Solución a la ecuación de Bateman

Una cadena radiactiva natural involucra decenas de estados, lo cual supone una complejidad matemática mucho más grande que la mostrada en la anterior sección. El caso general de un estado (núcleo)  $n$  que es "alimentado" por otros,  $i$  ( $i < n$ , ya que se empieza a enumerar desde el núcleo o estado más energético dentro de la cadena y un estado más energético no puede poblar a uno menos energético), que a su vez decae, está descrito por la ecuación (*ecuación de Bateman*) [4]

$$\frac{dN_n(t)}{dt} = -\lambda_n N_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} b_{ni} \lambda_i N_i(t), \quad (1.15)$$

donde  $b_{ni}$  representa el porcentaje de decaimientos del estado  $i$  al estado  $n$ .

Es de interés, en éste trabajo, averiguar las actividades de los diferentes núcleos y estados involucrados en las cadenas, para ello es necesario solucionar la ecuación de Bateman bajo ciertas suposiciones. La forma de solucionar la ecuación de Bateman será explicada a continuación.

Suponiendo que la anterior ecuación acepta soluciones analíticas de la forma

$$N_i(t) = \sum_{j=1}^i C_{ij} e^{-\lambda_j t}, \quad (1.16)$$

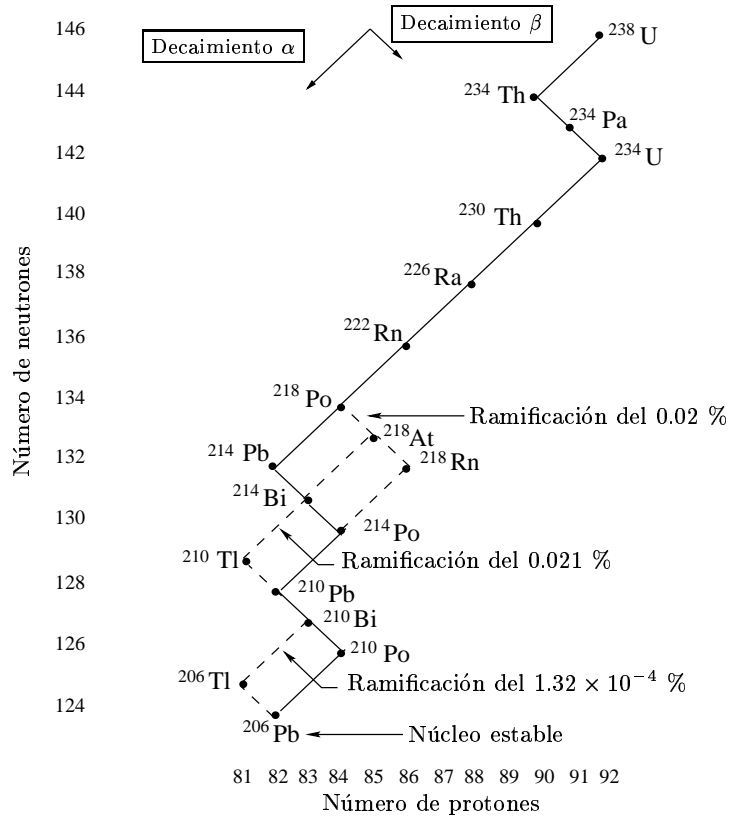


Figura 1.5: Serie radiactiva del uranio. Se observa que los núcleos de  $^{218}\text{At}$ ,  $^{208}\text{Rn}$ ,  $^{208}\text{Tl}$  y  $^{206}\text{Tl}$  son pobremente poblados.

donde  $C_{ij}$  son constantes a determinar, al incluir ésta expresión en la ecuación (1.15) y luego intercambiar adecuadamente el orden de la doble sumatoria, se obtiene que

$$-\sum_{j=1}^n C_{nj} \lambda_j e^{-\lambda_j t} = -\lambda_n \sum_{j=1}^n C_{nj} e^{-\lambda_j t} + \sum_{j=1}^{n-1} e^{-\lambda_j t} \sum_{i=j}^{n-1} C_{ij} \lambda_i b_{ni}. \quad (1.17)$$

Si se tiene en cuenta, en esta última expresión, que las funciones exponenciales son linealmente independientes ( $C_1 e^{at} + C_2 e^{bt} = C_3 e^{at} + C_4 e^{bt} \iff C_1 = C_3, C_2 = C_4$ ) y se establece que todos los tiempos de vida de los núcleos y estados dentro de las cadenas son diferentes, se obtiene la ecuación de recurrencia para los  $C_{nj}$  dada por

$$C_{nj} = \frac{\sum_{i=j}^{n-1} C_{ij} \lambda_i b_{ni}}{\lambda_n - \lambda_j}, \quad j \leq n-1. \quad (1.18)$$

Finalmente, la ecuación de recurrencia para los coeficientes de la forma  $C_{nn}$  es obtenida mediante la ecuación (1.16) en el instante inicial ( $t_0 = 0$ , luego  $e^{-\lambda_j t} = 1$ ), en la cual se necesitarán los coeficientes dados por la anterior ecuación y conocer las población inicial del estado  $n$ , y está dada por

$$C_{nn} = N_n(t_0) - \sum_{j=1}^{n-1} C_{nj}. \quad (1.19)$$



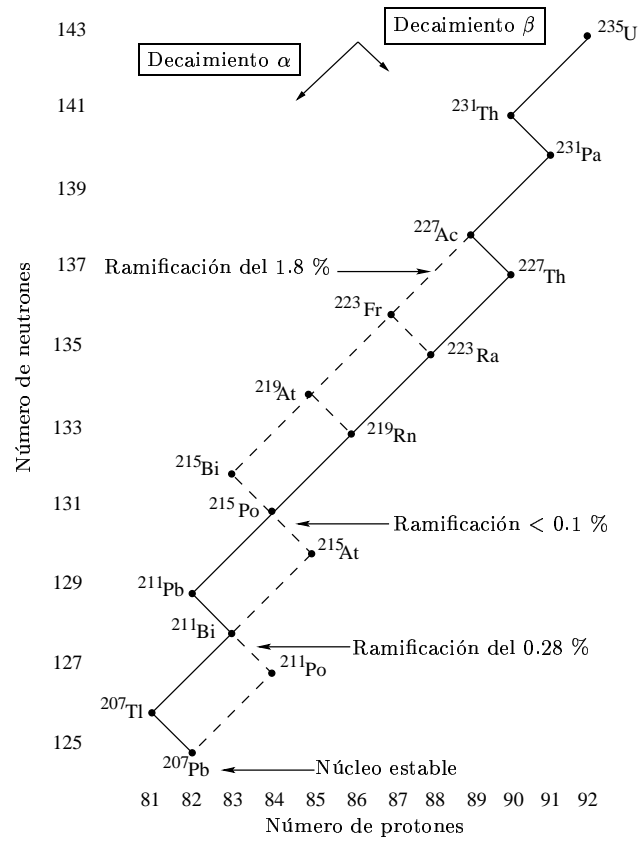


Figura 1.6: Serie radiactiva del actinio.

La explicación a como se utiliza la solución a la ecuación de Bateman se dará en el capítulo 3.

# Capítulo 2

## Espectroscopía de rayos gamma con centelladores

El detector de NaI es un detector práctico que presenta una alta eficiencia de detección de rayos gamma y al mismo tiempo es capaz de suministrar una buena resolución de energía, útil a la hora de separar las contribuciones de fuentes polienergéticas de rayos gamma.

Actualmente están en uso seis tipos de materiales centelladores clasificados como: cristales inorgánicos, líquidos orgánicos, cristales orgánicos, plásticos, gases y vidrios. Dentro de ésta clasificación el NaI(Tl) es un cristal inorgánico de centelleo.

El detector de NaI fue el primer detector sólido en ser utilizado en espectroscopía de rayos gamma, y sin embargo, permanece en la actualidad como el más utilizado para ésta aplicación. Ésto se debe a su buena producción de luz, a su excelente linealidad y al alto número atómico del yodo. Lo que se establezca en los siguientes párrafos es igualmente válido para otros materiales centelladores, tomando en cuenta sus diferencias en cuanto a las probabilidades de interacción y sus propiedades de centelleo.

### 2.1 Componentes de un espectro

La interacción entre los fotones y el material del detector da lugar a espectros con ciertos elementos característicos [5], que se muestran en la Figura 2.1 y se explican a continuación.

#### 2.1.1 Fotopico

Surge de eventos en los cuales toda la energía del rayo gamma,  $E_\gamma = h\nu$ , es absorbida por el detector, es decir, por los electrones que sufren *efecto fotoeléctrico*.

Debido a la complejidad de las funciones de onda de Dirac para los electrones atómicos, el efecto fotoeléctrico es difícil de tratar rigurosamente. Sin embargo, para fotones con energías por encima de la energía de ligadura de los electrones de la capa  $K$ ,  $E_K$  (la cual es por definición la capa electrónica más cercana al núcleo y por lo tanto la capa en la que los electrones están más ligados), y energías no relativistas ( $E_\gamma \ll m_e c^2$ ),

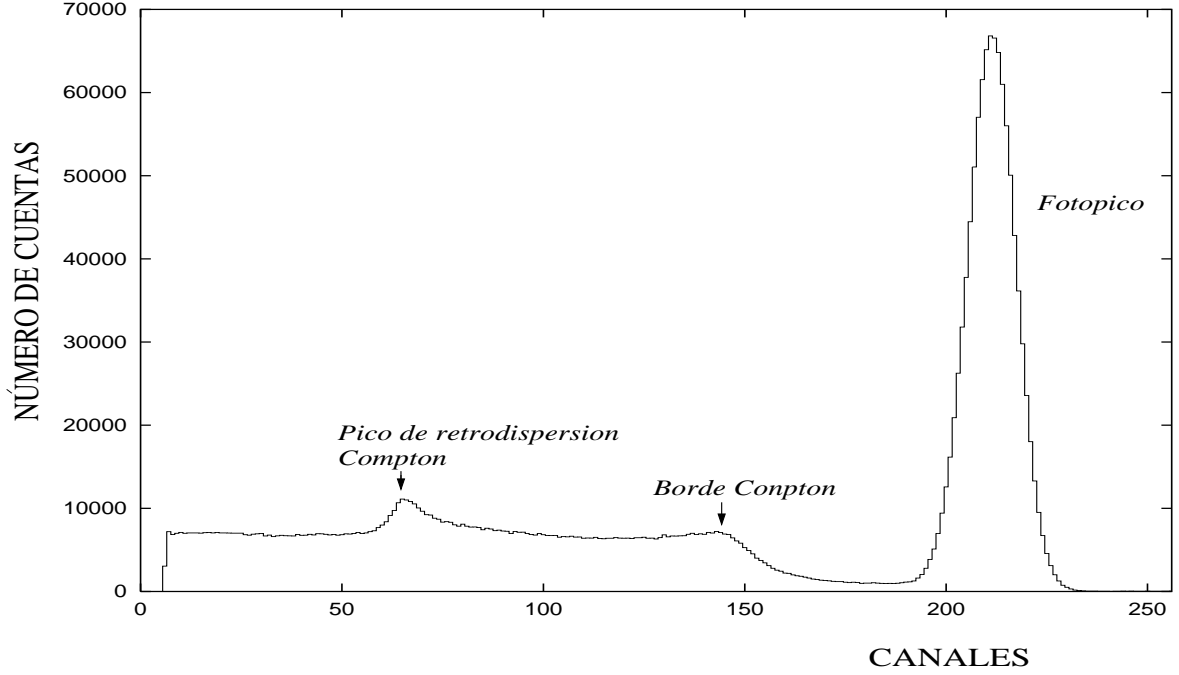


Figura 2.1: Espectro producido por una fuente gamma monoenergética (en éste caso el  $^{137}\text{Cs}$  con  $E_\gamma = 661.7 \text{ keV}$ ), detectado con un centellador de  $\text{NaI(Tl)}$ .

la sección transversal  $\Phi_{foto}$  puede ser calculada usando la aproximación de Born (en la cual se supone que tanto la función de onda de la radiación incidente como las funciones de onda de la radiación dispersada y del electrón dispersado son ondas planas [6], aproximación que es válida en el rango de energías de la radiación incidente antes establecido), en cuyo caso se obtiene que [7]

$$\Phi_{foto} = 4\sqrt{2}\alpha^4 Z^5 \phi_0 \left( \frac{m_e c^2}{E_\gamma} \right)^{7/2} \text{ por átomo,} \quad (2.1)$$

siendo  $m_e$  la masa del electrón,  $\phi_0 = 8\pi r_e^2/3 = 6.651 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$  y  $\alpha = 1/127$ . Para energías cercanas a la energía de la capa  $K$  se debe multiplicar la ecuación (2.1) por un factor de corrección, de lo cual se obtiene que

$$\Phi_{foto} = \phi_0 \frac{2^7 \pi (137)^3}{Z^2} \left[ \frac{\nu_k}{\nu} \right]^4 \frac{e^{-\xi \cot^{-1} \xi}}{1 - e^{-2\pi\xi}} \text{ por átomo,} \quad (2.2)$$

donde  $\nu_k = (Z - 0.03)^2 m_e c^2 \alpha^2 / 2h$  y  $\xi = \sqrt{\nu_k / (\nu - \nu_k)}$ . Fórmulas para  $L$  y  $M$  también han sido calculadas [8] pero su expresiones son mucho más complicadas que la anteriormente presentada.

Para altas energías,  $E_\gamma \gg E_K$ , la sección transversal frecuentemente estará dada por [9]

$$\Phi_{foto} = 4\pi r_e^2 Z^5 \alpha^4 \frac{m_e c^2}{E_\gamma}. \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Fondo Compton

Algunas veces el rayo gamma incidente no entrega toda su energía al detector, solamente incide sobre él realizando *dispersión Compton*. En este proceso, el fotón incidente es dispersado por un electrón libre o débilmente ligado, que a su vez es expulsado del átomo con una energía  $T$  dada por

$$T = E_\gamma - E'_\gamma = E_\gamma \left( \frac{\gamma(1 - \cos\theta)}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)} \right), \quad (2.4)$$

donde

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)} \quad (2.5)$$

es la energía del fotón dispersado,  $\gamma = E_\gamma/m_e c^2$  y  $\theta$  es el ángulo entre las direcciones de movimiento del fotón incidente y el dispersado.

Cabe aclarar que para que se produzca el fondo Compton, en el sentido exacto de la expresión, el fotón dispersado debe escapar del detector, de lo contrario se producen efectos combinados que serán tratados posteriormente.

La sección transversal para la dispersión Compton  $d\sigma/d\Omega$  es calculada usando electrodinámica cuántica y es conocida como la fórmula de Klein-Nishina [7]:

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos\theta)]^2} \left( 1 + \cos^2\theta + \frac{\gamma^2(1 - \cos\theta)^2}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)} \right), \quad (2.6)$$

donde  $r_e$  es el radio del electrón clásico. La integración de (2.6) sobre  $d\Omega$  conduce a que la probabilidad total de ocurrencia de dispersión Compton por electrón está dada por

$$\sigma_c = 2\pi r_e^2 \left[ \frac{1 + \gamma}{\gamma^2} \left( \frac{2(1 + \gamma)}{1 + 2\gamma} - \frac{1}{\gamma} \ln(1 + 2\gamma) \right) + \frac{1}{2\gamma} \ln(1 + 2\gamma) - \frac{1 + 3\gamma}{(1 + 2\gamma)^2} \right]. \quad (2.7)$$

Otra expresión, muy importante en espectroscopía debido a que establece la forma del fondo Compton, es la distribución de energía de los electrones dispersados por Compton, la cual se obtiene mediante (2.6) y está dada por

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\pi r_e^2}{m_e c^2 \gamma^2} \left[ 2 + \frac{s^2}{\gamma^2(1 - s)^2} + \frac{s}{1 - s} \left( s - \frac{2}{\gamma} \right) \right], \quad (2.8)$$

para  $s = T/E_\gamma$  y  $0 \leq T \leq T_{max}$ , donde  $T_{max}$  es la energía cinética máxima que el electrón gana cuando el fotón sufre retrodispersión ( $\theta = 180^\circ$ ) y está dada por

$$T_{max} = E_\gamma \left( \frac{2\gamma}{1 + 2\gamma} \right). \quad (2.9)$$

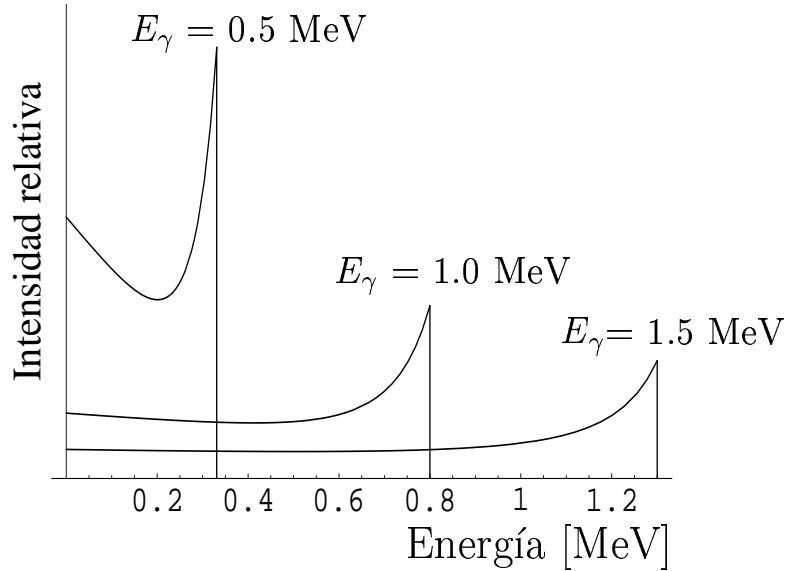


Figura 2.2: Distribución de energía de los electrones dispersión por Compton, según la ecuación (2.8).

En la Figura 2.2 se muestra la distribución en energía de los electrones dispersados por Compton para rayos gamma de diferentes energías. Precisamente, los electrones que ganan la energía máxima posible  $T_{max}$  son los que forman el denominado *Borde Compton* (ver Figura 2.1).

### 2.1.3 Pico de retrodispersión Compton

Debido a que el detector está encapsulado en un material protector, algunos fotones pueden primero ser dispersados por Compton por el material protector y luego realizar efecto fotoeléctrico con el detector, es decir, que antes de ser absorbidos por el detector, realizan dispersión Compton con las paredes del mismo. La Figura 2.3 muestra la dependencia de la energía de los fotones dispersados  $E'_\gamma$  (según la ecuación (2.5)) como una función del ángulo de dispersión  $\theta$  para fotones con diferentes energías. De la forma de cada una de éstas curvas se deduce que para ángulos mayores que cerca de  $110^\circ - 120^\circ$  resultan fotones dispersados de prácticamente la misma energía que cuando los fotones son retrodispersados, en cuyo caso el fotón tiene un mínimo valor de energía dado por

$$E_{\gamma rC} = E_\gamma - T_{max}. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, muchos de los fotones de una fuente monoenergética pueden ser dispersados con energías próximas a  $E_\gamma$  y como resultando de ello aparecerá un pico de cierta anchura (que se considerará una gaussiana) en el espectro alrededor de  $E_\gamma$ .

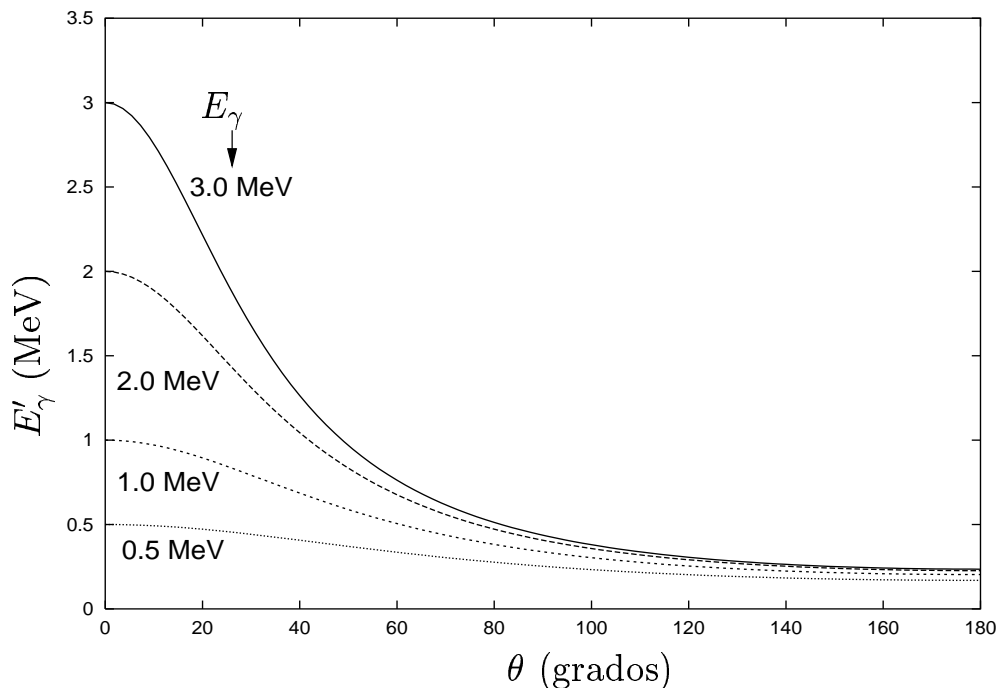


Figura 2.3: Distribución de energía de los fotones que realizan dispersión Compton ( $E'_\gamma$ , según la ecuación (2.5)) como una función del ángulo de dispersión ( $\theta$ ) para diferentes energías.

### 2.1.4 Picos de escape simple y doble

Un rayo gamma con energía  $E_\gamma \geq 2m_e c^2 = 1.022$  MeV y en presencia de un núcleo atómico puede transformarse en un par electrón-positrón (*producción de pares*). El par se reparte la energía resultante de tal manera que

$$T_e^- + T_e^+ = E_\gamma - 2m_e c^2, \quad (2.11)$$

con  $T_e^-$ : energía cinética del electrón y  $T_e^+$ : energía cinética del positrón.

El proceso inverso también puede ocurrir, en el cual el positrón se aniquila con un electrón produciendo dos fotones en direcciones opuestas y cada uno con energía  $m_e c^2$ . Si los dos fotones resultantes de la aniquilación, son absorbidos por el detector, el fotón incidente es registrado con energía correcta y registrado en el fotopico. Si uno o los dos fotones de aniquilación escapan del detector, el fotón incidente con energía  $E_\gamma$  es registrado con energía menor:  $E_\gamma - m_e c^2$  (pico de escape simple) y  $E_\gamma - 2m_e c^2$  (pico de escape doble). Estos picos no aparecen en el espectro del  $^{137}\text{Cs}$  (Figura 2.1) ya que a los 661 keV no hay producción de pares.

### 2.1.5 Efectos combinados

En el proceso de interacción de la radiación gamma con la materia se pueden presentar otros efectos resultantes de la combinación de los efectos ya mencionados o efectos

adicionales. Estos efectos no serán tenidos en cuenta en el presente trabajo, pero a continuación son descritos los más importantes.

- Compton múltiple

Para que exista Compton múltiple, un fotón debe sufrir por lo menos una dispersión Compton después de haber sufrido la misma dispersión en una primera oportunidad. Éste proceso puede repetirse en varias oportunidades hasta que toda la energía del fotón sea depositada en el detector, en cuyo caso será contabilizado en el fotopico, o hasta que el fotón escape con cierta energía, en cuyo caso es posible que la energía depositada sea superior a la energía máxima (dada por la ecuación (2.9)) que se puede obtener en una sola dispersión Compton.

- Escape de rayos X característicos

Frecuentemente en el proceso de absorción fotoeléctrica es emitido por el átomo un rayo X característico, siendo generalmente re-absorbido cerca del sitio de interacción. Pero si el efecto fotoeléctrico ocurre cerca de la superficie del detector, el rayo X puede escapar y por lo tanto la energía depositada decrecer en una cantidad igual a la energía que se pierde por el escape.

El escape de rayos X aumenta cuando disminuye la energía o cuando la razón superficie-volumen crece.

Se debe tener presente que las anteriores ecuaciones son válidas para elementos puros. En el caso de compuestos, como el NaI, se debe intercambiar  $Z$  por un  $Z$  efectivo  $Z_{efec}$  dado por

$$Z_{efec} = \sum a_i Z_i, \quad (2.12)$$

donde  $a_i$  y  $Z_i$  son el número de átomos del elemento  $i$ -ésimo en la molécula y la carga correspondiente al  $i$ -ésimo elemento, respectivamente. Luego, el  $Z_{efec}$  para el NaI(Tl) es simplemente la suma del  $Z$  para el Na y para el I, es decir,  $Z_{efec} \simeq 11 + 53 = 64$ , debido a que el dopaje es tan sólo de partes por millón.

## 2.2 Características generales de los detectores

Las características más importantes de los detectores y en especial de los detectores gamma son:

### 2.2.1 Resolución en energía

Una vez que los rayos gamma entregan su energía a los electrones del material del detector, estos electrones son los que suministran la información acerca de la energía del rayo gamma incidente mediante ionizaciones y excitaciones que a su vez son registradas en forma de carga o de corriente. Las ionizaciones y excitaciones producidas por la

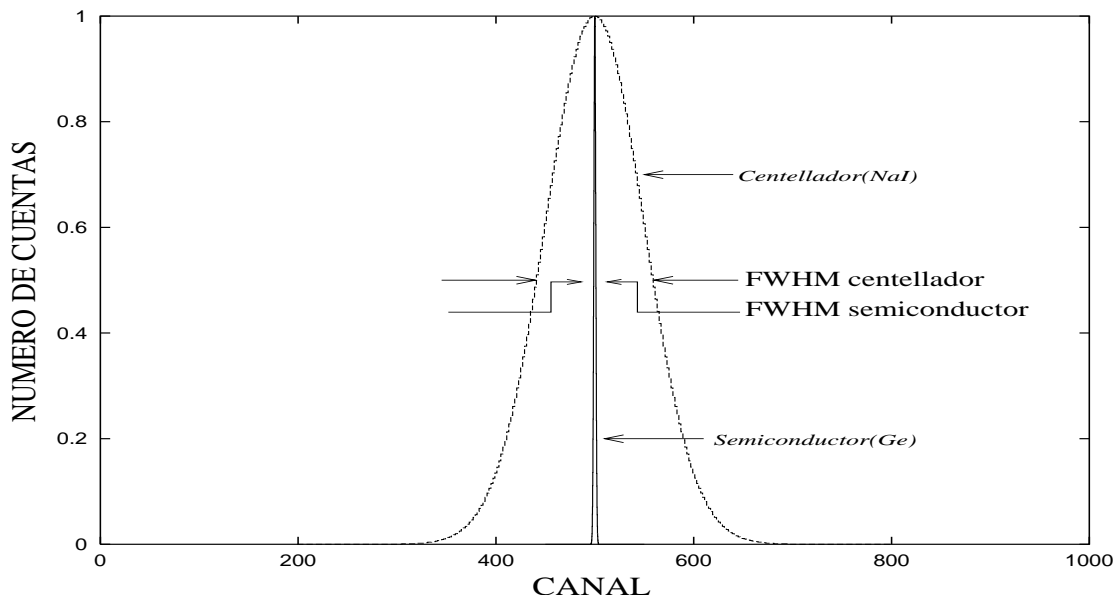


Figura 2.4: Contraste entre las resoluciones en la energía de detectores de centelleo y de semiconductor.

energía absorbida presentan fluctuaciones por lo que una transición que debería ser registrada en una única posición (ver Figura 3.1, por ejemplo) de energía presenta una distribución, casi siempre gaussiana. La capacidad de un detector para distinguir entre picos de energía muy próximos se mide con la *resolución*. Si FWHM (siglas del inglés Full Width at Half Maximum) es la “Anchura a la Mitad de la Altura” de un pico a cierta energía  $E_\gamma$ , la resolución del detector a esa energía se define como:

$$\text{resolución} = \frac{\text{FWHM}(E_\gamma)}{E_\gamma} \% \quad (2.13)$$

La Figura 2.4 muestra la ventaja en resolución que tiene un detector de Ge (el detector es un cristal semiconductor de Germanio) sobre un detector de NaI(Tl) (cristal centellador de Yoduro de Sodio con impurezas de Talio). A una energía de alrededor de 1 MeV, mientras la resolución de un centellador es del 8-9%, la de un semiconductor a la misma energía es de 0.15%. Es decir, un pico de 1 MeV tendrá un FWHM de aproximadamente 80 keV medido con un centellador, el mismo pico, medido con un detector de Germanio tendrá un ancho de alrededor de 2.5 keV.

### 2.2.2 Eficiencia

La eficiencia es una cantidad que sirve para caracterizar la capacidad de un instrumento para detectar radiación. Un detector no es igualmente eficiente en todo el rango de energía donde es sensible y existen varias definiciones de eficiencia.

Es necesario conocer la eficiencia de un detector como función de la energía para poder determinar cuántos de los fotones detectados con cierta energía son realmente emitidos



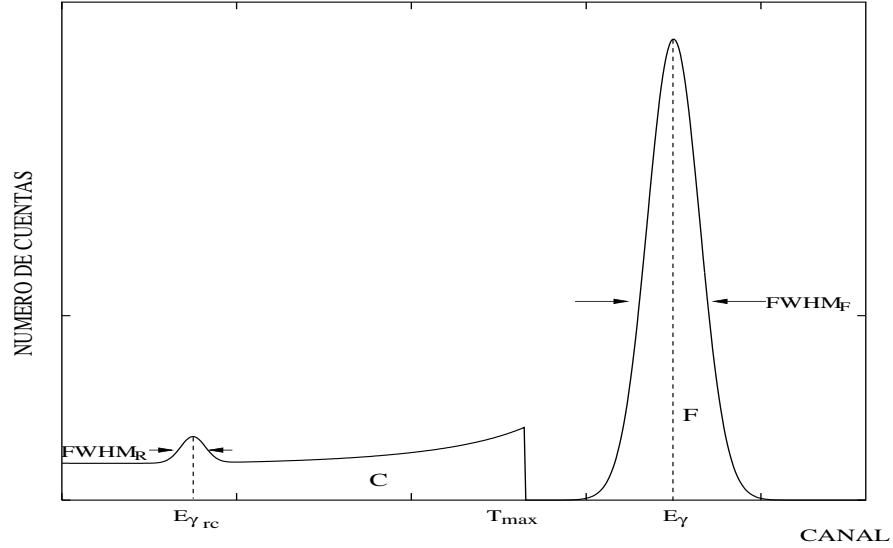


Figura 2.5: Aproximación al espectro de la Figura 2.1. La aproximación consiste en suponer el Fondo Compton con una distribución en energía dada por la fórmula de Klein-Nishina [5] (con un área bajo la curva dada por **C**) y cuyo borde coincide con el Borde Compton. Además, se suponen tanto el Fotopico (con área **F**) como el Pico de retrodispersión como gaussianas con  $FWHM_F$  y  $FWHM_R$  respectivamente.

por la fuente. Utilizando fuentes a las que se les conoce sus energías de emisión y su actividad, se puede determinar la eficiencia del detector en las energías de los fotopicos y por interpolación o extrapolación estimar la eficiencia para cualquier otra energía.

### 2.2.3 Función respuesta

Está definida como la respuesta de un detector a un rayo mono-energético incidente. El espectro medido puede expresarse como

$$N_m(E) = \sum_{E_i \geq E}^{E_n} N(E_i, E), \quad (2.14)$$

donde  $n$  es el número de rayos gamma emitidos por la fuente,  $E_i$  es la energía de cada una de las transiciones realizadas por la fuente,  $N(E_i, E)$  es la función respuesta del detector al rayo incidente con energía  $E_i$  evaluada en  $E$  y  $N_m(E)$  es el número de fotones medidos por el detector en la posición de energía  $E$ .

En general, la obtención de la función respuesta para un detector dado es un problema complicado que no pretenderemos enfrentar acá. En cambio usaremos una función respuesta aproximada que sin embargo nos permitirá reconocer la formación de espectros provenientes de fuentes polienergéticas. La Figura 2.5 ilustra la función respuesta que será usada en éste trabajo: el fondo Compton es aproximado a la distribución de energía de los electrones bajo la dispersión Compton, dada por la ecuación (2.6). El fotopico y el pico de retrodispersión son aproximados por gaussianas de anchura

$\text{FWHM}_F$  y  $\text{FWHM}_R$  respectivamente.

Otra cantidad necesaria para la caracterización de la función respuesta es la razón  $F/C$ , siendo  $F$  el área bajo la gaussiana del fotopico y  $C$  la respectiva al fondo Compton. Lo importante de ésta definición de función respuesta es que sus características pueden ser evaluadas experimentalmente.

### 2.2.4 Tiempo de respuesta y tiempo muerto

Una importante característica de los detectores es el tiempo de respuesta. Este es el tiempo necesario para que el detector dé señales de la incidencia de radiación. La duración de la señal es también de importancia, durante éste período un segundo evento no puede ser registrado ya sea porque el detector es insensible o porque la segunda señal puede superponerse a la primera.

La suma del tiempo de respuesta y del tiempo de duración de la señal se denomina tiempo muerto o de recuperación, y es el período necesario para que el detector se recupere completamente y esté listo para una nueva medida.

## 2.3 Detectores de centelleo

En el *detector de centelleo* se hace uso del hecho que ciertos materiales cuando son golpeados por una partícula o por radiación, emiten una pequeña cantidad de luz, es decir, centellean. Cuando estos materiales son acoplados a un dispositivo de amplificación tal como un *fotomultiplicador* estos centelleos pueden ser convertidos en un pulso eléctrico los cuales a su vez pueden ser analizados y contados eléctricamente para dar información concerniente a la radiación incidente.

### 2.3.1 Características generales

Los elementos básicos de un detector de centelleo se esbozan en la Figura 2.6. Generalmente el contador consiste de un material centellador que es acoplado ópticamente, ya sea directamente o mediante una guía de luz, a un fotomultiplicador. Cuando la radiación pasa a través del centellador excita los átomos y moléculas constituyentes del centellador causando la emisión de luz. La luz así producida es transmitida (no sin antes entregar toda su energía a un fotocátodo con la consecuente emisión de electrones) al fotomultiplicador donde es convertida en una débil corriente de electrones, la cual es luego amplificada por un sistema de multiplicación de electrones.

En general los centelladores poseen ciertas características entre las cuales se destacan:

- *Sensibilidad a la energía:* La producción de luz en muchos centelladores, por encima de un cierto valor de energía, es proporcional a la energía de excitación. De otro lado, el fotomultiplicador es un dispositivo lineal, cuando se opera apropiadamente, por lo que la amplitud de la señal eléctrica final es también proporcional a la energía. Esto hace al centellador un buen espectrómetro, aunque no es el ideal para éste propósito.

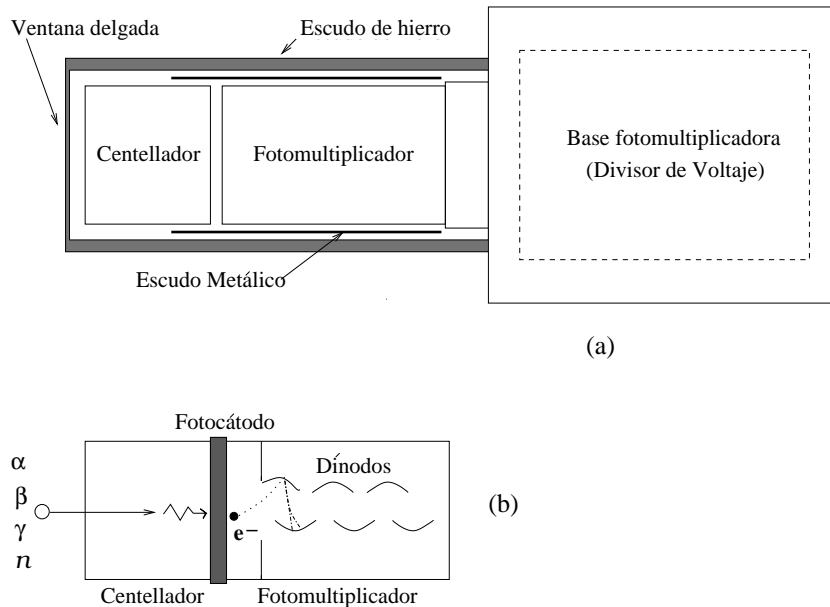


Figura 2.6: (a) Diagrama esquemático de un contador de centelleo. (b) Esquema de la transformación de la radiación dentro del detector. No se muestra en la figura el alto voltaje que debe haber entre el primer dínodo y el último dínodo y una serie de divisores de voltajes que aceleran los electrones entre dínodos.

- *Tiempo de respuesta pequeño:* Los detectores de centelleo son detectores rápidos debido a que su tiempo de respuesta y de recuperación son cortos comparados con otros detectores. Con un tiempo de respuesta pequeño es posible medir con mayor precisión el tiempo que transcurre entre dos eventos y con un tiempo de recuperación pequeño es posible, por otra parte, medir grandes ratas de conteo.

### 2.3.2 Cristales inorgánicos

La mayor parte de los cristales inorgánicos son cristales de haluros alcalinos, es decir, la molécula está constituida por átomos alcalinos (elementos IA en la tabla periódica) y por átomos haluros (grupo VIIA), dopados con impurezas activadoras (elementos que aportan electrones o huecos débilmente ligados a la molécula). De este tipo pero menos usados que el NaI(Tl), se encuentran los cristales de CsI(Tl), CsF<sub>2</sub>, CsI(Na), KI(Tl) y LiI(Eu). También son utilizados materiales no alcalinos como los compuestos de Bi<sub>4</sub>Ge<sub>3</sub>O<sub>12</sub>, BaF<sub>2</sub>, ZnS(Ag), ZnO(Ga), CaWO<sub>4</sub> y CdWO<sub>4</sub> entre otros.

Ciertos cristales inorgánicos presentan higroscopicidad lo cual constituye su mayor desventaja. El NaI es un ejemplo de los anteriores y por lo tanto debe ser protegido contra la humedad del aire.

Una ventaja de los cristales inorgánicos reside en presentar el más alto poder de frenado debido a que poseen la más alta densidad y el más alto número atómico. Además de presentar algunas de las intensidades de luz más grandes, lo que los hace extremadamente convenientes para la detección de rayos gamma y de electrones y positrones

altamente energéticos.

### **2.3.3 Respuesta a la salida de luz de un centellador**

La producción de luz se refiere específicamente a la eficiencia del centellador en convertir energía de ionización en fotones. En general, ésta es diferente para diferentes tipos de partículas de la misma energía y para un mismo tipo de partículas no siempre varía linealmente con la energía. Por otra parte, cuando se considera la eficiencia de un centellador se debe también tener presente la eficiencia del fotomultiplicador debido a que ellos están inseparablemente acoplados. Siendo, típicamente, la eficiencia de los fotomultiplicadores del 30%.

En la práctica, la producción de luz en el NaI(Tl) es lineal con la energía y permanece invariante bajo condiciones normales de temperatura.

# Capítulo 3

## Simulación de espectros

Nuestro objetivo es simular, mediante el Método de Monte Carlo, el espectro gamma de las cadenas radiactivas naturales y del  $^{40}\text{K}$ . Para ello fue escrito un programa en FORTRAN llamado *simulacion.for* (Apendices **B** y **C**) con un archivo de datos para las energías de los rayos a simular (*Egamma.dat*) y otro archivo para las correspondientes intensidades (*gamma.dat*). Adicionalmente, durante la ejecución se deberá escribir el número de canales a utilizar, la calibración Canal-Energía y la desviación estándar como función de la energía. La simulación arroja un archivo de datos (*espectro.dat*) de de los canales y sus correspondientes intensidades. La manera en la cual se hizo la simulación será explicada en el presente capítulo.

### 3.1 Método de Monte Carlo

Mediante algoritmos especiales se puede hacer que un computador genere una secuencia de números *pseudo-aleatorios* distribuidos uniformemente, a partir de los cuales es posible generar números pseudo-aleatorios según cualquier distribución [10].

El Método de Monte Carlo [10, 11] consiste en resolver el problema de cómo generar el conjunto de valores  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de cierta variable aleatoria (realmente pseudo-aleatoria, debido a que los únicos números verdaderamente aleatorios son producidos por procesos físicos intrínsecamente aleatorios), de tal manera que su frecuencia siga una distribución predefinida  $P(x)$ . Para resolver éste problema, se puede proceder como sigue:

1. Se calcula la función acumulativa como función del argumento  $x$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x P(y) dy \quad (3.1)$$

2. Se elije aleatoriamente un valor de  $F(x)$  dentro de una distribución uniforme y se “despeja” para  $x$ .
3. Debido a que el proceso de “despejar”, o sea averiguar el valor de la coordenada para la cual  $F(x) = r$ , donde  $r$  es un número pseudo-aleatorio dentro de una

distribución uniforme no es por lo general un proceso analítico, se debe recurrir al diseño de un algoritmo para hacerlo. Generalmente se hace mediante la definición de histogramas, es decir, definiendo rangos de  $x$  a los cuales un mismo valor de  $F(x)$  es asociado. Si a cada rango se le asocia un índice, la tarea consiste en averiguar el índice para el cual la función acumulativa cumple la igualdad  $F(x) = r$ .

En la simulación se utilizó la función respuesta aproximada (ver sección 2.2.3), lo cual implica que  $P(y)$  está dado por:

1. la gaussiana del fotopico,
2. la distribución uniforme del fondo Compton (ecuación (2.8)), y la
3. gaussiana del pico de retrodispersión.

A continuación se explicará como fuerón calculadas las funciones acumulativas para cada uno de las componentes de un espectro.

### 3.1.1 Función acumulativa para el fotopico y el pico de retrodispersión

El área bajo una gaussiana  $A_G(x, \mu, \tau)$  entre los límites  $\mu \pm z\tau$  está dada por:

$$A_G(x, \mu, \tau) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-z\tau}^{\mu+z\tau} e^{-\frac{1}{2}z^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (3.2)$$

donde  $\mu$  y  $\tau$  son la media y la desviación estándar respectivamente,  $z = |x - \mu| / \tau$  y  $A_G(z = \infty) = 1$ . La anterior integral no tiene solución analítica, pero al expandir la exponencial se logra transformar la integral en una sumatoria [12], es decir,

$$\begin{aligned} A_G(x, \mu, \tau) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} \left( 1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \dots \right) dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/\sqrt{2})^{2k+1} 2^k}{(2k+1)!!}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mediante ésta última expresión, la función acumulativa para las distribuciones gaussianas del fotopico y del pico de retrodispersión,  $F_G(x)$ , estarán dadas por:

$$\begin{aligned} F_G(x) &= \frac{1 - A_G(x, \mu, \tau)}{2} \quad \text{para } x < \mu, \\ F_G(x) &= \frac{1}{2} \quad \text{para } x = \mu, \\ F_G(x) &= F_G(x - 1) + \frac{A_G(x, \mu, \tau) - A_G(x - 1, \mu, \tau)}{2} \quad \text{para } x > \mu. \end{aligned}$$

Siendo  $\mu = E_\gamma$  para el fotopico y  $\mu = E_\gamma - T_{max}$  para el pico de retrodispersión.

### 3.1.2 Función acumulativa para el fondo Compton

En la determinación de la forma del Fondo Compton se siguieron dos pasos:

- se determina las cuentas correspondientes a las energías menores a  $T_{max}$  mediante el cálculo de la función acumulativa para la distribución de energía de los electrones dispersados por Compton (ecuación (2.8)), luego,
- se distribuyen las cuentas para cada una de éstas energías (realmente en la simulación se trabaja con canales y no con energías) según una distribución gaussiana.

## 3.2 Datos de entrada del programa de simulación

Los datos de entrada son las energías de cada rayo gamma, las cuales están escritas en el archivo *Egamma.dat* (en keV y ordenadas de menor a mayor) y las intensidades correspondientes en *gamma.dat* (escritas como enteros). A continuación se explicará la manera como son calculadas las intensidades de cada rayo proveniente de las cadenas radiactivas naturales.

### 3.2.1 Intensidades de los principales rayos gamma provenientes de las cadenas radiactivas naturales

No todos los rayos gamma provenientes de las cadenas radiactivas naturales son de nuestro interés, sólo lo son los rayos más intensos, los cuales provienen de estados o núcleos en equilibrio secular, densamente poblados ( es decir, muchos estados lo pueblan de manera directa o indirecta) y que pueblan a pocos estados de manera directa.

Un ejemplo de estados o núcleos pobremente poblados son los núcleos que son únicamente poblados por los decaimientos representados por líneas punteadas en las Figuras 1.4, 1.5 y 1.6, ya que la ramificación hacia ellos es pequeña. Poblamiento directo e indirecto son, por ejemplo, la manera en que son poblados cada uno de los estados del  $^{38}\text{Ar}$  (Figura 1.1) mediante el decaimiento  $\beta^-$  desde el estado base del  $^{38}\text{Cl}$ ; y la manera en que es poblado el estado base del  $^{38}\text{Ar}$  por el  $^{38}\text{Cl}$  mediante el decaimiento gamma de los estados (2) y (3) del  $^{38}\text{Ar}$ , respectivamente.

En principio, en la búsqueda de los rayos gamma más intensos se debe calcular la actividad para cada uno de los estados involucrados y luego por comparación, con el rayo gamma más intenso así obtenido, se establece cuáles son los rayos gamma de interés. En éste trabajo se sigue a P. G. Killeen [13] y por lo tanto sólo se calcularon las intensidades de 13 rayos en la cadena del torio, 17 en la cadena del uranio y 12 en la cadena del actinio. Para ello se utilizó un programa escrito por A. Garzón [14] en el cual se implementa la solución a la ecuación de Bateman (sección 1.3.1) para:

- 45 estados (12 núcleos) en la serie del torio,
- 46 estados (15 núcleos) en la serie del uranio, y para
- 78 estados (12 núcleos) en la serie del actinio.

En los cálculos se tomó:

- $N_1(t_0) = 1 \times 10^{20}$  para los padres y una población inicial igual a cero para los otros estados de cada una de las tres cadenas, como primera aproximación a las poblaciones iniciales de los núcleos dentro de las cadenas.
- Se asumieron tiempos de vida media del orden de las decenas de los nanosegundos para los estados con tiempos de vidas desconocidos para nosotros. Ésta suposición no altera significativamente el resultado de las intensidades debido a que los tiempos de vida de los estados excitados están estadísticamente entre las centésimas y decimas de nanosegundos [1]. Comparando éstos tiempos con los tiempos de vida de los padres se observa que se está en equilibrio secular.

Mediante las anteriores suposiciones se obtuvo que entre  $t = 4.5 \times 10^9 a$  (aproximadamente la edad geológica de la Tierra) y  $t + \delta t$  (con  $\delta t = 1 \times 10^{-4} \simeq 1h$ ) la actividad para el rayo más intenso es de:

- $3.989 \times 10^5$  Bq (con una energía de 238.63 keV) para el torio,
- $5.194 \times 10^5$  Bq (609.3 keV) para el uranio (ver Apéndice A), y
- $1.062 \times 10^4$  Bq (41.95 keV) para el actinio.

Al comparar los anteriores valores se observa que los picos más intensos son los del torio y los menos intensos los del actinio, en concordancia con las actividades registradas en la mayoría de las muestras naturales.

En la Figura 3.1 se muestra el espectro de energía teórico para la serie del torio, es decir, las intensidades para los 13 rayos relativas al rayo más intenso dentro de la cadena. Adicionalmente, cada rayo está rotulado con su energía en keV y con la suma de las ramificaciones  $\alpha$  o  $\beta$  de los estados más energéticos (respecto al estado que decae emitiendo el rayo considerado) no incluidos en los cálculos. Por ejemplo, el rayo con una intensidad relativa igual a 1 está rotulado con *234.63 17%*, lo cual implica que la suma de las ramificaciones  $\alpha$  o  $\beta$  de los estados más energéticos (respecto al estado que al decaer emite un rayo gamma de 238.63 keV) no incluidos es del 17%. La suma de las ramificaciones nos dan una idea de las discrepancias entre las actividades calculadas y las que se obtendrían si todos los estados dentro de la cadena del torio fueran incluidos y están entre el 2% y el 17% para la cadena del torio, entre el 2% y el 17% para la cadena del uranio (Figura 3.2) y entre el 0.2% y el 4% para la cadena del actinio (Figura 3.3).

Para conocer la intensidad del rayo gamma del  $^{40}K$  se puede recurrir al programa o simplemente utilizar la ecuación (1.8).



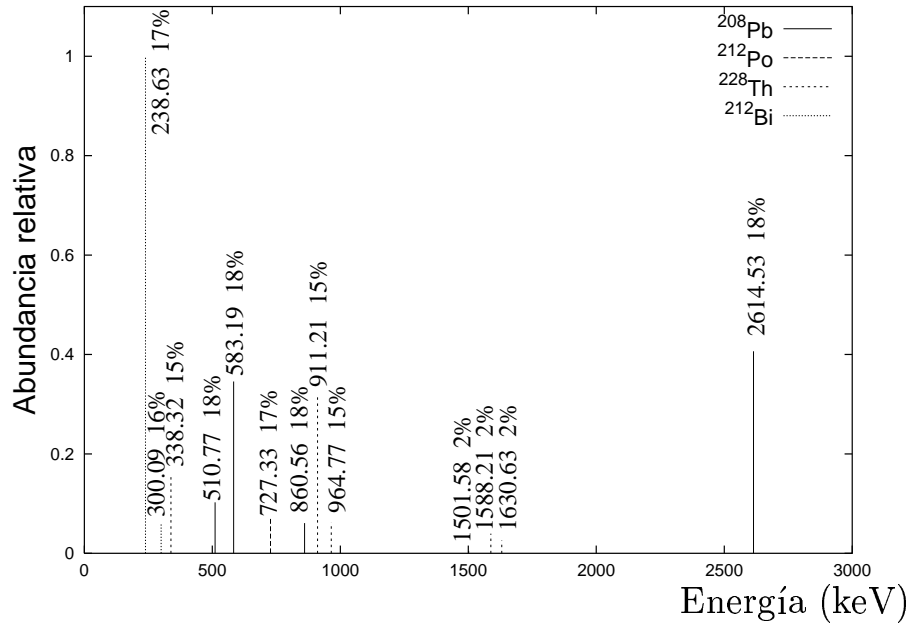


Figura 3.1: Espectro de energía teórico de los principales rayos  $\gamma$  emitidos en la serie de decaimientos del  $^{232}\text{Th}$ . Cada tipo de línea indica el núcleo del cual proviene y para cada rayo se especifica su energía y la suma de las ramificaciones  $\alpha$  o  $\beta$  de los estados más energéticos (respecto al estado que decae emitiendo el rayo considerado) no incluidos en los cálculos.

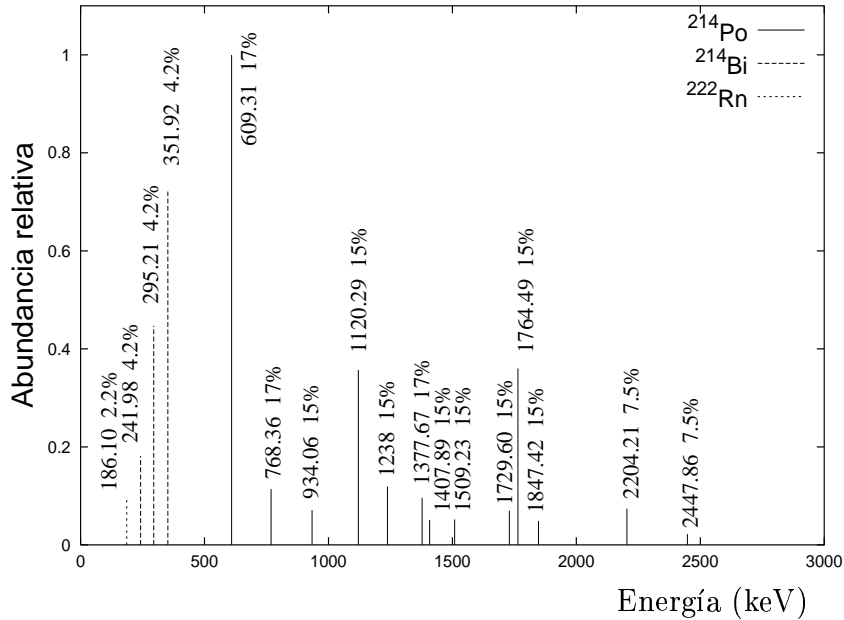


Figura 3.2: Espectro de energía teórico de los principales rayos  $\gamma$  emitidos en la serie de decaimientos del  $^{238}\text{U}$ . Cada tipo de línea indica el núcleo del cual proviene y para cada rayo se especifica su energía y la suma de las ramificaciones  $\alpha$  o  $\beta$  de los estados más energéticos (respecto al estado que decae emitiendo el rayo considerado) no incluidos en los cálculos.

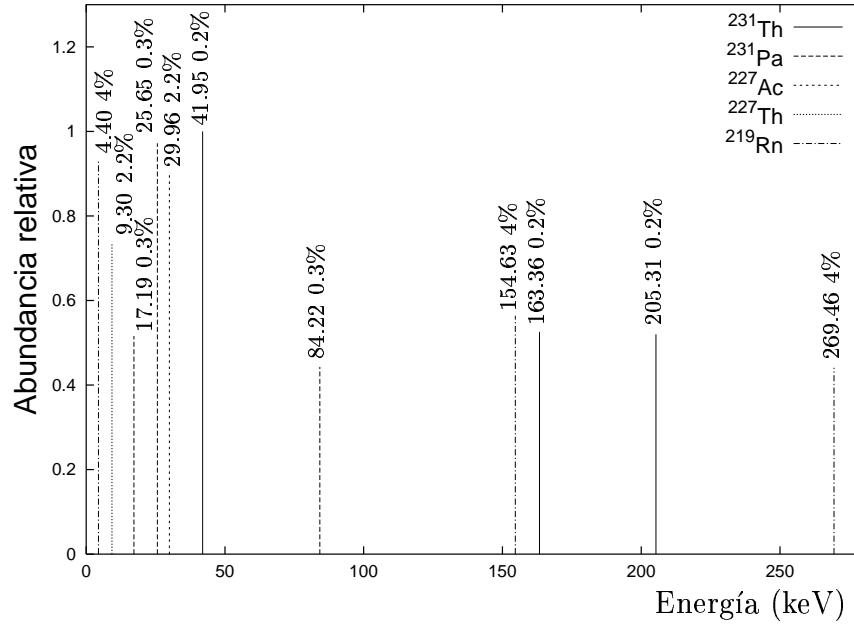


Figura 3.3: Espectro de energía teórico de los principales rayos  $\gamma$  emitidos en la serie de decaimientos del  $^{235}\text{U}$ . Cada tipo de línea indica el núcleo del cual proviene y para cada rayo se especifica su energía y la suma de las ramificaciones  $\alpha$  o  $\beta$  de los estados más energéticos (respecto al estado que decae emitiendo el rayo considerado) no incluidos en los cálculos. Adicionalmente, la serie del actinio presenta un rayo gamma de 29.86 keV con una intensidad relativa de 0.6, el cual no se incluye en la gráfica debido a que se superpone al rayo de 29.96 keV.

### 3.2.2 Calibración Canal-Energía y desviación estándar como función de la energía

Adicionalmente, durante la ejecución del programa se debe incluir el número de canales a utilizar, la calibración Canal-Energía y la desviación estándar (en canales) como función de la energía. En éste trabajo se utilizó, a menos que se especifique lo contrario, una calibración Canal-Energía y una desviación estándar (en canales) como función de la energía dadas, respectivamente, por:

- $Canal = 0.296(1)E_{\gamma} + 15(1)$ , obtenidos mediante el ajuste de los centroides de las gaussianas producidas experimentalmente por rayos gamma con energías de 1332.5 keV, 1173.2 keV y 661.7 keV.
- $Desviación\ estándar\ (canales) = -3.2(4) + 0.42\sqrt{E_{\gamma}}$ , obtenidos para energías de 1332.5 keV, 661.7 keV y 356.0 keV.

### 3.3 Cálculo de la probabilidad de interacción

Si  $\sigma$  es la probabilidad total de interacción de un fotón con la materia, es decir, la suma de las secciones transversales de cada proceso de interacción, el coeficiente total de atenuación de masa  $\mu'$  estará dado por:

$$\mu' = \frac{N_A}{A}\sigma, \quad (3.4)$$

donde  $N_A$  es el número de Avogrado y  $A$  es el peso atómico o molecular.

En la Figura 3.4 está graficado el coeficiente total de atenuación y el coeficiente de atenuación para diversos procesos en el NaI dado por G. F. Knoll [15]. Allí se observa que la sección transversal para la producción de pares es muy pequeña comparada con el efecto Compton para el rango de energías de las cadenas radiactivas, rango comprendido entre 0.004 MeV y 3 MeV. Por ésta razón se asumirá que la probabilidad total de interacción, en la región que nos interesa, está dada por:

$$\sigma = \Phi_{foto} + Z\sigma_c, \quad (3.5)$$

donde se ha multiplicado la sección transversal Compton por  $Z$  para así tener en cuenta los  $Z$  electrones que cada átomo posee.

En el cálculo de la sección trasversal para el efecto fotoeléctrico se utiliza:

- la ecuación (2.3) cuando  $E_\gamma \geq 1000$  keV,
- cuando  $E_K = 33.17$  keV  $< E_\gamma < 1000$  keV la probabilidad es obtenida mediante la interpolación a una línea recta (en escala log-log) de la probabilidad en función de la energía dada por la ecuación (2.3) y por la ecuación (2.2) para  $33.17$  keV  $\leq E_\gamma \leq 50$  keV, por último,
- cuando  $E_\gamma \leq E_K$  la probabilidad se ajusta a una línea recta (en escala log-log) de tal manera que concuerden con la dada por G. F. Knoll.

Los resultados de los anterior cálculos, junto con el coeficiente de atenuación de masa para la dispersión Compton se muestran en la Figura 3.5.

### 3.3.1 Intensidad para cada componente del espectro

Para calcular la intensidad del pico de retrodispersión ( $I_R$ ), es decir, cuántos rayos gamma de un total de  $I$  rayos de una energía determinada que llegan al detertor en la unidad de tiempo realizan retrodispersión Compton con las paredes del material que rodea al detector, se debe trabajar con la probabilidad de interacción  $P_{int}(x)$  al recorrer una distancia  $x$ , la cual está dada por [5]

$$P_{int}(x) = 1 - e^{-\mu x} \quad (3.6)$$

donde  $\mu = N\sigma$  es el coeficiente de absorción y  $N = \rho/A$  es la densidad de centros dispersores (igual a la densidad sobre el peso atómico o molecular). Luego, la probabilidad de no interactuar en la misma distancia es

$$P_{no-int}(x) = e^{-\mu x} \quad (3.7)$$

Se asumirá que la disposición del detector, sus paredes y la fuente de rayos gamma, es como se muestra en la Figura 3.6, donde sólo se tendrán en cuenta los rayos que inciden

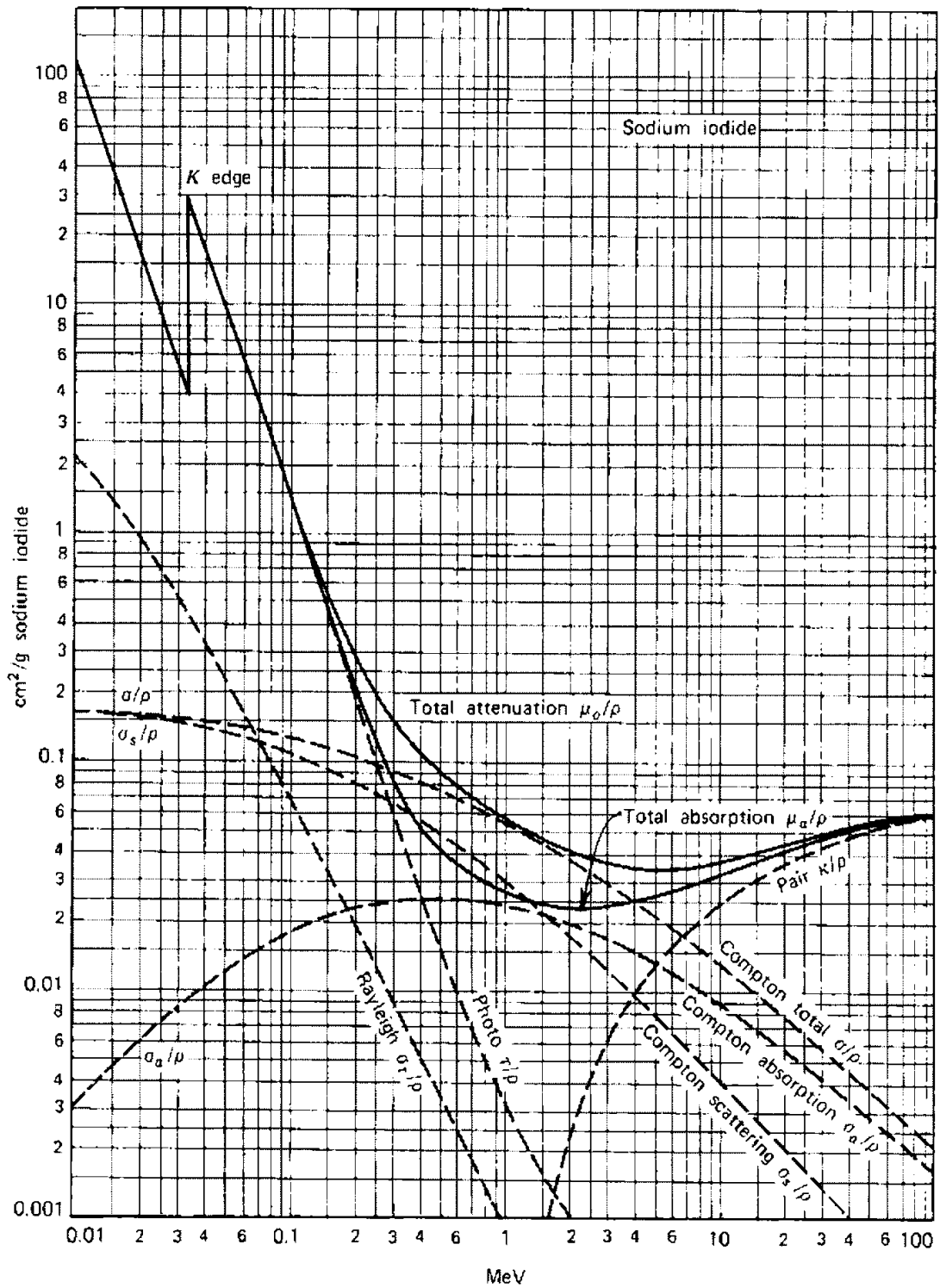


Figura 3.4: Dependencia con la energía del coeficiente de atenuación (ecuación (3.4)) para varios procesos de interacción en el NaI [15].

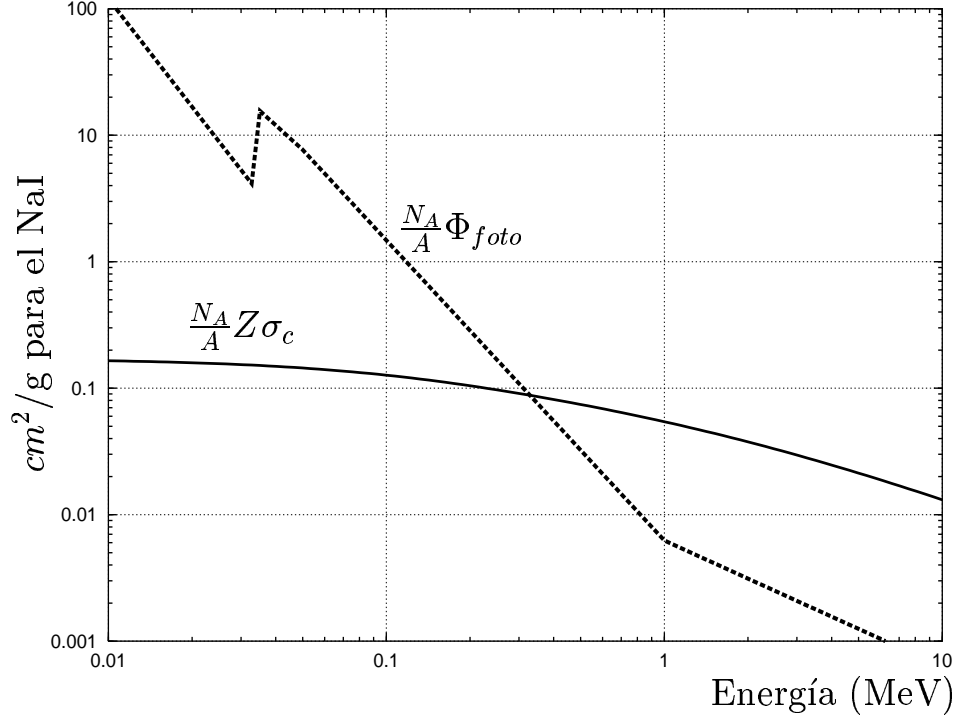


Figura 3.5: Dependencia con la energía del coeficiente de atenuación (ecuación (3.4)) para el efecto fotoeléctrico y Compton en el NaI tal como son aproximados en el presente trabajo.

en la dirección  $x$  positiva. Se supone que no hay espacio entre la pared 1 y la fuente, y que los rayos dispersados por efecto Compton entre  $110^\circ \leq \theta \leq 250^\circ$  regresan por el eje  $x$ , lo cual es equivalente a asumir que el detector es lo suficientemente ancho como para no tener en cuenta las paredes superior e inferior. Por lo anteriormente expresado, se tiene que el número de rayos gamma que atraviesan la pared 1,  $I_1$ , el detector,  $I_2$ , y que finalmente atraviesan toda la pared 2,  $I_3$ , están dados respectivamente por:

$$I_1 = I e^{-\mu_p x_1}, \quad I_2 = I_1 e^{-\mu_d x_2}, \quad I_3 = I_2 e^{-\mu_p x_1}, \quad (3.8)$$

donde  $\mu_p$  y  $\mu_d$  son los coeficientes de absorción de la pared y del detector respectivamente.

La diferencia entre  $I_2$  e  $I_3$  es el número de rayos que interactúan con la pared 2, y si a ésta diferencia se le resta el número de rayos que interactúan en la pared 2 por efecto fotoeléctrico ( $I_{RF}$ ) se obtiene el número de rayos que interactúan en la pared 2 por efecto Compton ( $I_{RC}$ ), es decir,

$$\begin{aligned} I_{RC} &= I_2 - I_3 - I_{RF} = I e^{-\mu_p x_1} e^{-\mu_d x_2} (1 - e^{-\mu_p x_1}) - I_{RF} \\ &= I e^{-\mu_p x_1} e^{-\mu_d x_2} (e^{-\mu_F x_1} - e^{-\mu_p x_1}), \end{aligned} \quad (3.9)$$

en donde  $\mu_F = \Phi_{foto} N_p$ , siendo  $N_p$  la densidad de centros dispersores de la pared.

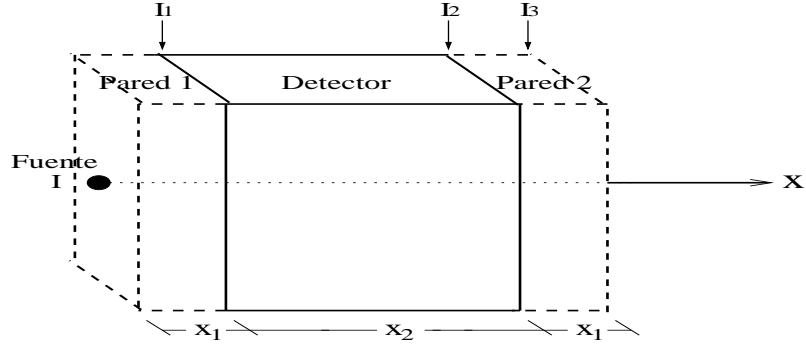


Figura 3.6: Disposición del conjunto detector, paredes y fuente. Las paredes y el detector tienen un grosor  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente y la fuente tiene una actividad  $I$ .

Solo una fracción  $R$  de  $I_{RC}$  constituyen el pico de retrodispersión, es decir,

$$I_R = RI_{RC} = \frac{\int_{110^\circ}^{250^\circ} \frac{d\sigma_c}{d\Omega} d\theta}{\int_0^{360^\circ} \frac{d\sigma_c}{d\Omega} d\theta} I_{RC}. \quad (3.10)$$

Similarmente, la intensidad del fotopico ( $I_F$ ) y la intensidad del fondo Compton ( $I_C$ ), están dados por:

$$\begin{aligned} I_F &= (I_1 - I_2) \frac{\Phi_{foto}}{\sigma} \\ &= I e^{-\mu_p x_1} (1 - e^{-\mu_d x_2}) \frac{\Phi_{foto}}{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$I_C = I e^{-\mu_p x_1} (1 - e^{-\mu_d x_2}) \frac{Z \sigma_c}{\sigma}, \quad (3.12)$$

respectivamente. Donde  $\sigma$  es la probabilidad total de interacción (ec. (3.5)).

# Capítulo 4

## Resultados de la simulación

En éste capítulo se analizarán las diferencias y similitudes entre los espectros experimentales y simulados. Primero se analizarán los espectros monoenergéticos, luego los polienergéticos, entre los cuales se encuentran los espectros naturales, y por último se presentarán las conclusiones de todo el trabajo realizado.

### 4.1 Comparación de espectros monoenergéticos

En la Figura 4.1 se presenta el espectro simulado de la interacción de un rayo gamma monoenergético ( $E_\gamma = 661.7$  keV) con un cristal de NaI(Tl) cuadrado de 7.62 cm recubierto con una pared de Fe de 0.2 cm de grosor, utilizando la calibración Canal-Energía y la desviación estándar (en canales) como función de la energía dadas en la sección 3.2.2. En la figura se ha ajustado el espectro simulado de tal manera que la altura del fotopico simulado coincida con la altura del fotopico del espectro experimental (también mostrado) obtenido para un detector de NaI(Tl) con las mismas condiciones anteriormente especificadas. Se observa que el espectro simulado tal cual como es dado por el programa de simulación no coincide con el espectro experimental, esto se debe a que todavía no se han tenido en cuenta ciertos ajustes que a continuación enunciamos.

1. *Ajuste de las probabilidades de interacción de la radiación con la materia*

Observamos que en la Figura 4.1 la razón entre el área bajo el fondo Compton y el área bajo el fotopico es más grande para el espectro simulado que para el espectro experimental. Esto se debe a que no se ha tenido en cuenta los posibles Compton múltiples que contribuyen al fotopico, dicho de otra manera, los espectros coincidirían para un detector muy delgado en el cual los fotones que son dispersados por Compton realmente escapan.

En la Figura 4.2 se comparan nuevamente los dos espectros, pero en éste caso para la obtención del espectro simulado se incluyeron las probabilidades para el efecto fotoeléctrico y Compton dadas por el experimento, las cuales fueron obtenidas haciendo uso del hecho que la razón entre áreas es igual a la razón entre las probabilidades. Obteniendo de ésta manera un mejor ajuste de los dos espectros.

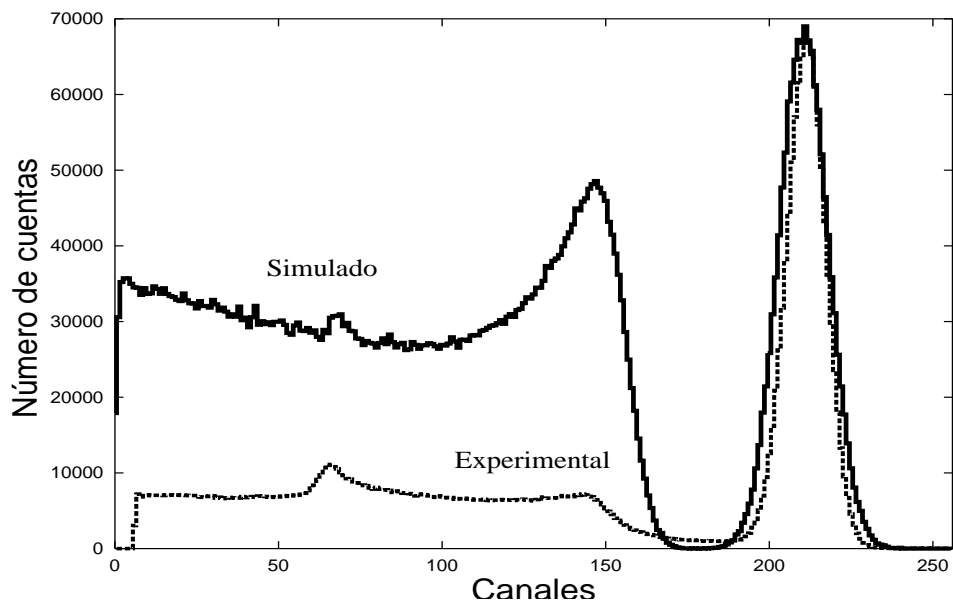


Figura 4.1: Comparación entre el espectro simulado y el experimental para una energía de 661.7 keV y un material protector con  $Z = 26$  (hierro).

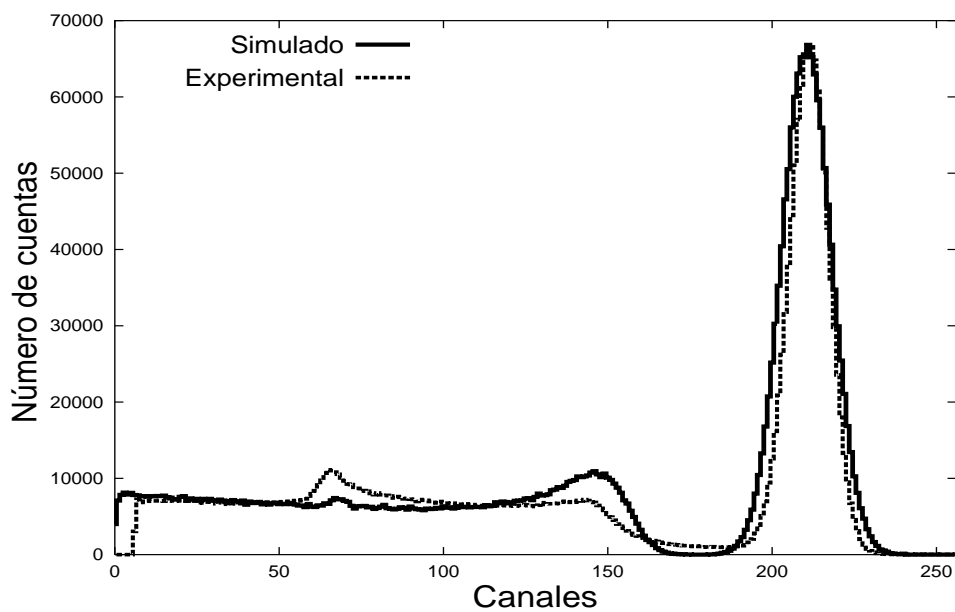


Figura 4.2: Comparación entre el espectro simulado y el experimental para una energía de 661.7 keV y un material protector con  $Z = 26$  (hierro). En la simulación se utilizaron las probabilidades dadas por el experimento.



## 2. Ajustes al pico de retrodispersión

En las Figura 4.1 y 4.2 también se observa que el área para el pico de retrodispersión es más grande para el espectro experimental que para el simulado. Éste resultado es debido a las siguientes aproximaciones:

- Se ha supuesto que el el pico de retrodispersión es una gaussiana, lo cual no es cierto ya que el pico de retrodispersión realmente está formado por muchas gaussianas, adicionalmente
- tenemos incerteza de la carga efectiva para el material protector. En la Figura 4.3 se observa que el área bajo el pico de retrodispersión simulado se asemeja más al pico de retrodispersión experimental al suponer que el material protector tiene un  $Z$  más grande e igual a 45 y utilizando las probabilidades dadas por el experimento.

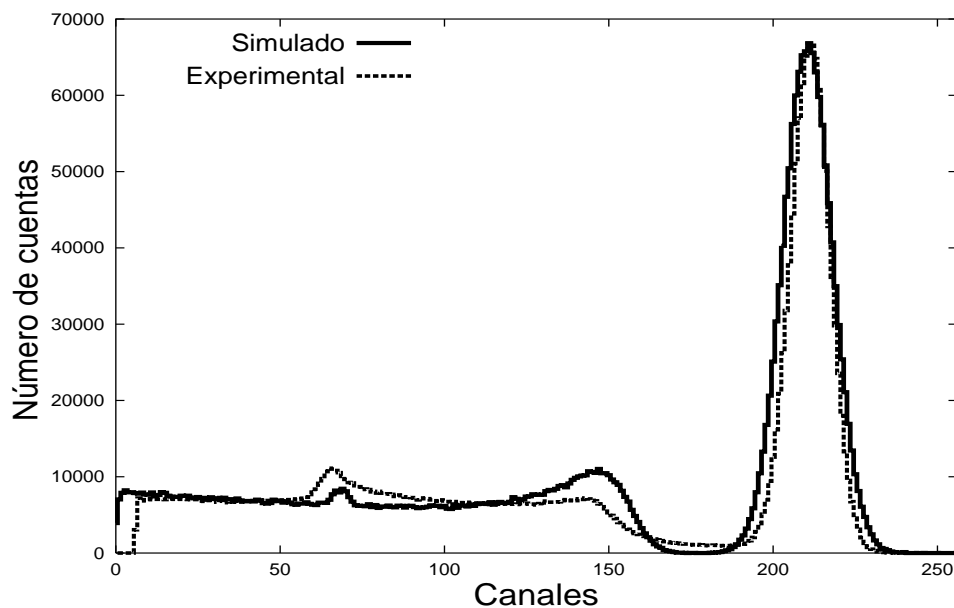


Figura 4.3: Comparación entre el espectro simulado y el experimental para una energía de 661.7 keV y un material protector con  $Z = 45$ . En la simulación se utilizaron las probabilidades dadas por el experimento.

## 3. Posible ajuste al área alrededor del borde Compton

Los Compton múltiples, como ya hemos dicho, son los responsables de que sea necesario ajustar, a mano, las probabilidades para el el efecto Compton y el fotoeléctrico dentro de la simulación para así lograr una mejor concordancia entre el espectro simulado y el espectro experimental obtenidos para un mismo detector de NaI. Logrando así la concordancia, que a nuestro parecer es la más significativa y la mejor lograda en éste trábajo, entre los espectros monoenergéticos simulados y experimentales. Adicionalmente, los Compton mutiples que no contribuyen al fotopico, es decir aquellos en los cuales finalmente el fotón escapa con una energía

menor a  $E_\gamma - T_{max}$ , son responsables de las discrepancias entre el borde Compton simulado y el experimental, ya que éstos son registrados en el espectro experimental con una energía mayor a  $T_{max}$  y por lo tanto llenan la región comprendida entre el borde Compton y el fotopico, situación que no ha sido considerada en la simulación.

Sintetizando, el espectro de la Figura 4.3 es el mejor ajuste entre los espectros simulado y experimental obtenido en éste trabajo, utilizando para ello un ajuste adicional a las probabilidades y al pico de retrodispersión.

## 4.2 Espectros polienergéticos

En la Figura 4.4 se muestra el espectro simulado para la cadena del torio, donde la posición del centroide del fotopico de cada rayo está rotulado mediante una línea vertical junto con su correspondiente energía en keV y un número entre paréntesis cuadrados. El mismo espectro en escala logarítmica es mostrado en la Figura 4.5, para así distinguir mejor los fotopicos.

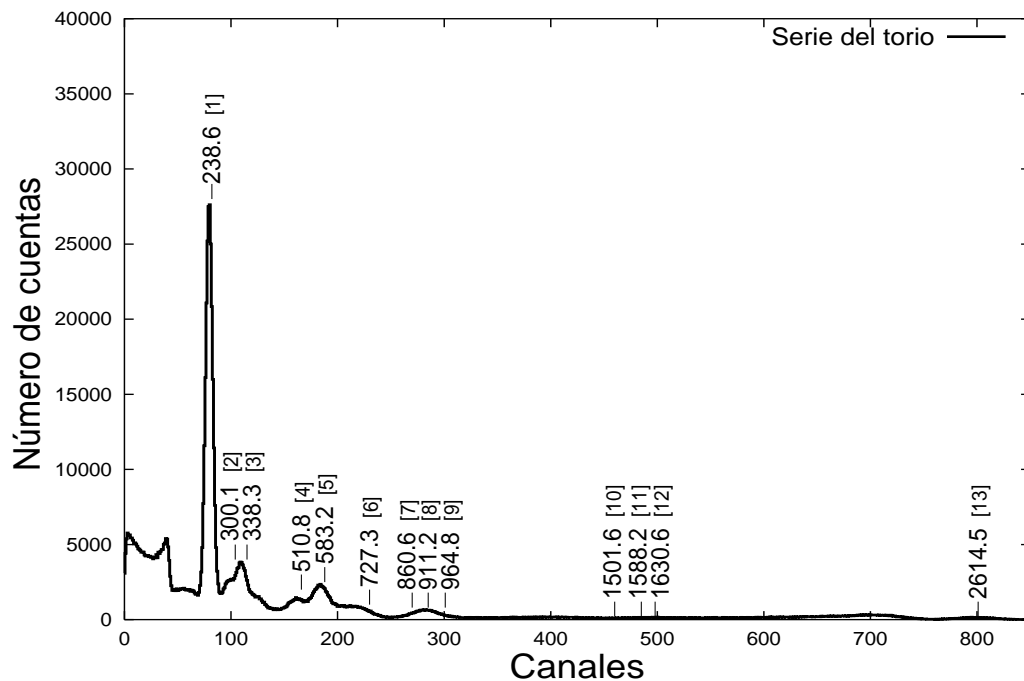


Figura 4.4: Espectro simulado para la serie del torio. Los fotopicos están rotulados con su correspondiente energía en keV y un número entre paréntesis cuadrados.

En la Figura 4.6 se muestra el espectro simulado para la cadena del uranio en la misma escala que los espectros anteriormente mostrados y en la Figura 4.7 se muestra nuevamente el espectro del uranio pero en escala logarítmica.

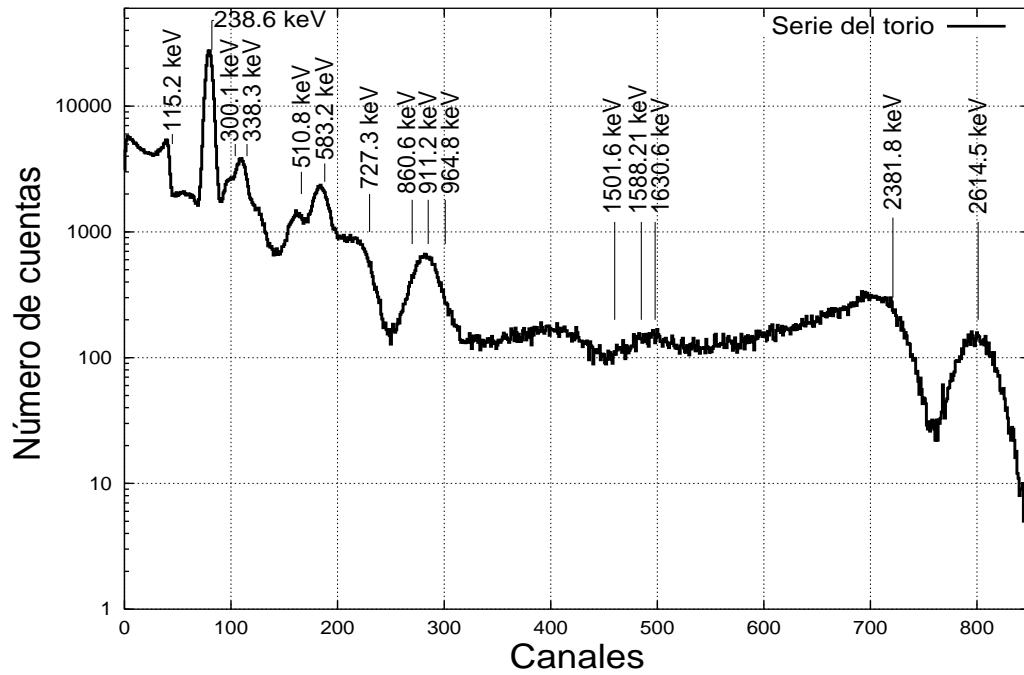


Figura 4.5: Espectro simulado para la serie del torio en escala logarítmica. Los fotopicos están rotulados con su correspondiente energía en keV y un número entre paréntisis cuadrados.

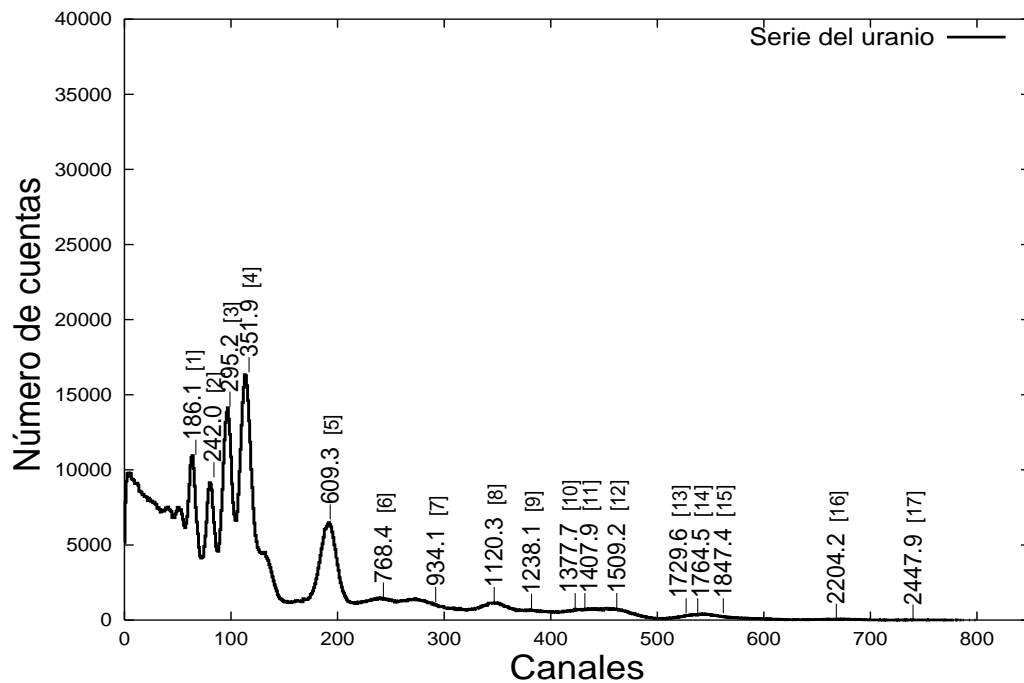


Figura 4.6: Espectro simulado para la serie del uranio. Los fotopicos están rotulados con su correspondiente energía en keV y un número entre paréntisis cuadrados.

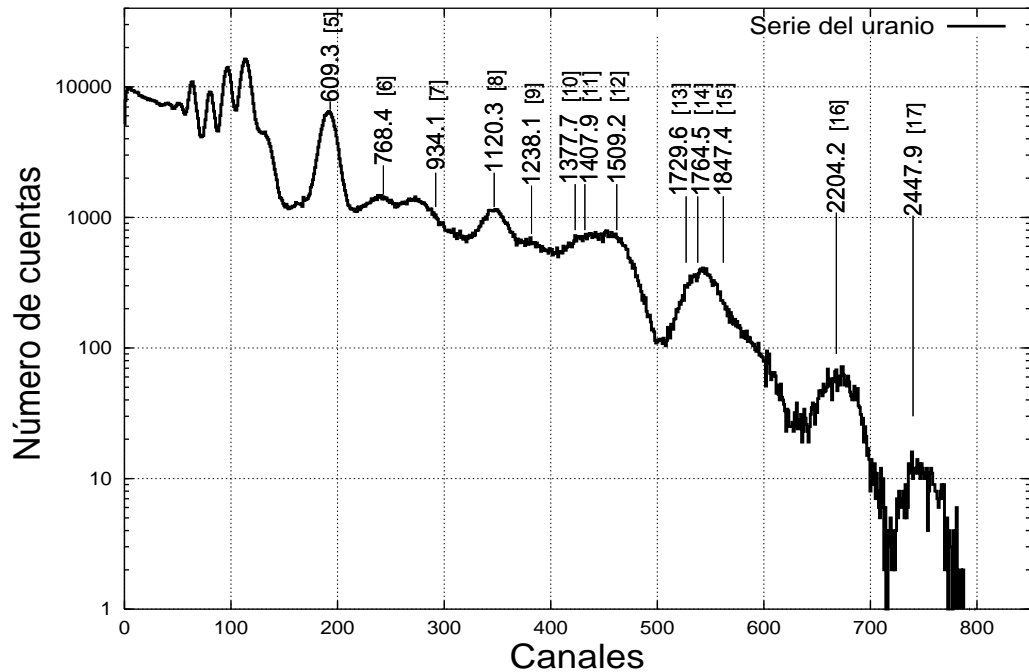


Figura 4.7: Espectro simulado para la serie del uranio en escala logarítmica. Los fotopicos están rotulados con su correspondiente energía en keV y un número entre paréntesis cuadrados.

En la Figura 4.8 se muestra el espectro simulado para el actinio en la misma escala que el del torio y el del uranio, en ésta misma figura se muestra un acercamiento de la región donde se presentan los picos para la cadena del actinio.

Por último, en la Figura 4.9 se muestra el espectro simulado para las tres cadenas naturales.

#### 4.2.1 Comparación entre espectros naturales simulados y experimentales

Como ya se ha mostrado, para lograr la coincidencia de las intensidades entre un espectro simulado y uno experimental es necesario incluir en el programa de simulación las probabilidades para la interacción de la radiación con la materia dadas por el experimento, por lo tanto, si se desea simular un espectro natural y que éste coincida con el experimento, es necesario conocer las probabilidades a diferentes energías para lo cual se debe contar con una buena cantidad de fuentes monoenergéticas. Nosotros no contamos con esas fuentes y sin ellas lo mejor que podemos hacer si se desea comparar un espectro simulado con un espectro natural obtenido experimentalmente es ver que ciertos picos se presentan en ambos espectros, para ello es necesario incluir en el programa de simulación rangos de energía donde son utilizados calibraciones canal-energía y desviaciones estándar obtenidos “a mano”. En la Figura ?? se muestra el espectro natural obtenido para una muestra de tierra de la Universidad Nacional junto con el

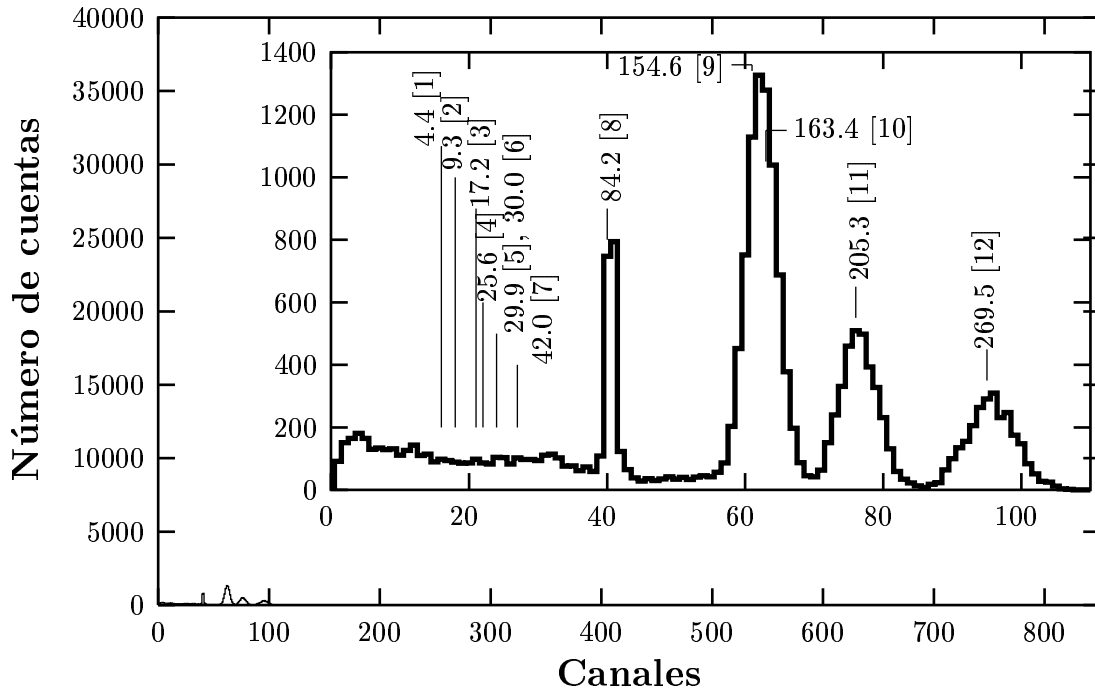


Figura 4.8: Espectro simulado para la serie del actinio. La gráfica más grande muestra el espectro para el actinio en la misma escala que los espectros para el torio y el uranio (Figuras 2.1 y 4.3 respectivamente), la gráfica más pequeña es el mismo espectro pero con la escala reducida y los fotopicos están rotulados con su correspondiente energía en keV y un número entre paréntesis cuadrados.

espectro simulado obtenido con las siguientes calibraciones:

- para  $E_\gamma \leq 500$  keV, Canal=  $0.1E_\gamma - 16$  y una desviación estándar (canales) =  $0.6 + 0.03\sqrt{E_\gamma}$ ;
- para  $500 \text{ keV} < E_\gamma \leq 1600$  keV, Canal=  $0.08E_\gamma + 4.3$  y una desviación estándar (canales) =  $1.6 + 0.03\sqrt{E_\gamma}$ ;
- para  $E_\gamma > 1600$  keV, Canal=  $0.06E_\gamma + 49$  y una desviación estándar (canales) =  $1.6 + 0.03\sqrt{E_\gamma}$ .

### 4.3 Conclusiones

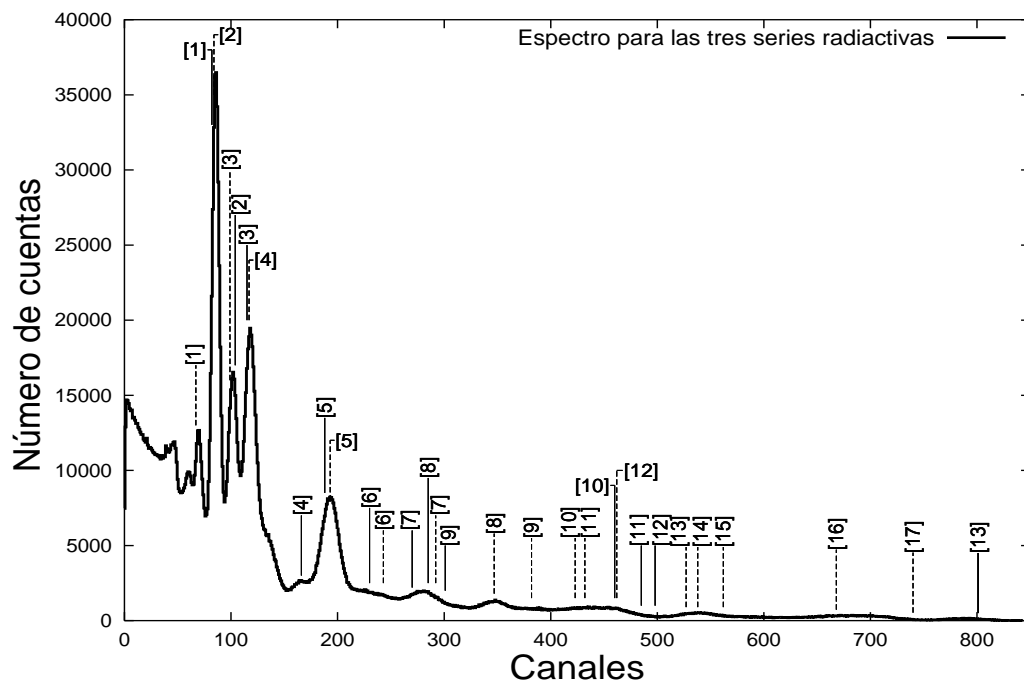


Figura 4.9: Espectro simulado para las tres series radiactivas naturales. Las líneas continuas indican la posición de los fotopicos debidos a la cadena del torio, donde los números corresponden a la energía del rayo especificadas en la figura 4.4. Las líneas discretas indican a su vez la posición de los fotopicos para la cadena del uranio. Los fotopicos debidos a la cadena del actinio no están especificados en el espectro debido a que no son observados por su baja intensidad.

# Apéndice A

## Algunas ramificaciones y tiempos de vida para la serie del torio

A continuación se presenta, a modo de ejemplo, una tabla donde se especifican los núcleos utilizados dentro de la *cadena del uranio* junto con las ramificaciones de núcleo a núcleo (es decir, se especifica el porcentaje del decaimiento  $\alpha$  o  $\beta$ , del núcleo inmediatamente anterior, que lo puebla), los tiempos de vida media de los estados utilizados y la actividad de los diferentes rayos gamma (cuyas energías están especificadas en la Figura B). Los estados están ordenados conforme decrece la energía, es decir, el último estado de cada núcleo es el estado base.

<i>Serie radiactiva del uranio</i>			
Núcleo	Ramificación de <sup>1</sup> núcleo a núcleo	$T_{1/2}$ (años)	Actividad (Bq)
$^{238}\text{U}$	-	$4.468 \times 10^9$	-
$^{234}\text{Th}$	0.209	$1.173 \times 10^{-17}$	-
	0.79	$6.603 \times 10^{-2}$	-
$^{234}\text{Pa}$	0.029	-	-
	0.076	$1.744 \times 10^{-17}$	-
	0.192	$< 3.171 \times 10^{-17}$	-
	0	$< 1.585 \times 10^{-17}$	-
	0.703	$2.226 \times 10^{-6}$	-
	0	-	-
	0	$7.648 \times 10^{-4}$	-
$^{234}\text{U}$	-	$2.455 \times 10^5$	-
$^{230}\text{Th}$	0.284	$1.123 \times 10^{-17}$	-
	0.714	$7.538 \times 10^4$	-
$^{226}\text{Ra}$	0.234	$1.998 \times 10^{-17}$	-
	0.763	$1.600 \times 10^3$	-
$^{222}\text{Rn}$	0.056	$1.015 \times 10^{-17}$	$4.822 \times 10^4$
	0.944	$1.048 \times 10^{-2}$	-

Núcleo	Ramificación de del núcleo a núcleo	$T_{1/2}$ (años)	Actividad (Bq)
$^{218}\text{Po}$	1	$5.898 \times 10^{-6}$	-
$^{214}\text{Pb}$	1	$5.318 \times 10^{-4}$	-
$^{214}\text{Bi}$	0.024	-	-
	0.460	$< 3.171 \times 10^{-18}$	$3.740 \times 10^5$
	0.405	$< 3.171 \times 10^{-18}$	$2.320 \times 10^5$ $9.386 \times 10^4$
	0	$1.649 \times 10^{-17}$	-
	0.093	$3.786 \times 10^{-5}$	-
	$^{214}\text{Po}$	0.0145	-
0.0274		-	-
0.0554		-	$1.153 \times 10^4$
0.0414		-	$3.834 \times 10^4$
0.0219		-	$2.705 \times 10^4$
0.0166		-	$2.678 \times 10^4$
0.0138		-	-
0.0159		-	-
0.0826		-	$2.570 \times 10^4$ $6.169 \times 10^4$
0.1690		-	$1.870 \times 10^5$
0.1750		-	$3.612 \times 10^4$ $1.853 \times 10^5$
0.0064		-	-
0.0305		-	$3.672 \times 10^4$
0.0718		-	$5.003 \times 10^4$ $5.960 \times 10^4$
0		-	-
0.0020		-	$5.194 \times 10^5$
0.1990	$5.201 \times 10^{-12}$	-	
$^{210}\text{Pb}$	1	$2.23 \times 10^1$	-
$^{210}\text{Bi}$	0.8400	$< 9.513 \times 10^{-17}$	-
	0.1600	$1.373 \times 10^{-2}$	-
$^{210}\text{Po}$	1	$3.791 \times 10^{-1}$	-
$^{206}\text{Pb}$	1	estable	-

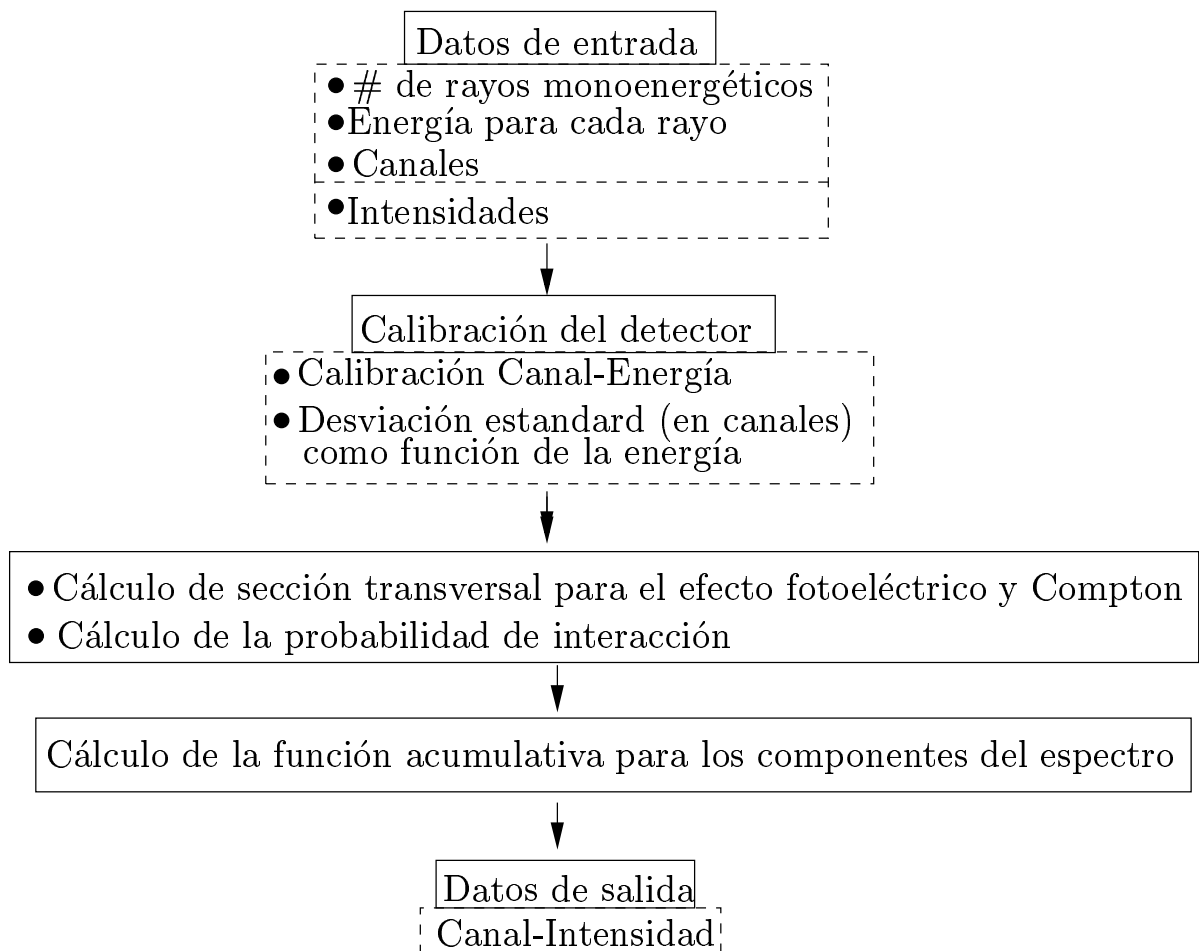
<sup>1</sup>Excepto para el  $^{234}\text{U}$ , el cañal es poblado mediante el decaimiento  $\beta^-$  por el estado base y por un estado excitado (segundo estado por encima el estado base) del  $^{234}\text{Pa}$ , con ramificaciones del 0.982 y 0.998 respectivamente.



# Apéndice B

## Diagrama de bloques del programa de simulación

A continuación se presentará el diagrama de bloques del programa.



## Apéndice C

### Código fuente del programa de simulación











# Bibliografía

- [1] Firestone, R. B. *Table of Isotopes*, segunda edición, volumen I y II. John Wiley & Sons, Inc. (1996).
- [2] Phil. Mag. 5, 576 (1903)
- [3] Hodgson, P. E., Gadioli, E. and Gadioli Erba, E. *Introductory Nuclear Physics*. Oxford Science Publications. New York (1997).
- [4] H. Bateman: Proc Cambridge Phil. Soc. 15, 423 (1910)
- [5] Leo, W. R. *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments. A How-to Approach*. Springer-Verlag (1987).
- [6] Merzbacher, E. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc. (1970).
- [7] Kaku, M. *Quantum field theory*. Oxford University Press, Inc. New York (1993).
- [8] Davison, C. M. *Interaction of Gamma Radiation with Matter*. North-Holland, Amsterdam 1968.
- [9] Musiol, G., Ranft, J. Kern-und Elementarteilchenphysik. VCH.
- [10] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. *Numerical Recipes in Fortran*, Second Edition, Cambridge University Press (1992).
- [11] Cristancho, F. *Notas de Clase. Instrumentación Nuclear* (2000).
- [12] Bevington, P. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill, Inc. (1969).
- [13] P. G. Killeen: Int. J. Appl. Radiat. Isot., Vol.34, No. 1, pp. 231-260 (1983).
- [14] Garzón A. Comunicación privada.
- [15] Knoll, G. F., *Radiation Detection and Measurement*, 3rd. Ed., Wiley (1999).