

Descripción del espectro de energía del núcleo  $^{48}\text{Cr}$  por medio de la aplicación de álgebras cuánticas deformadas al modelo de cluster

Oscar Leonardo Ramírez Suárez

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física  
Grupo de Física Nuclear

Bogotá D.C.  
2004

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física  
Grupo de Física Nuclear

Trabajo de grado para optar el título de Físico

**Descripción del espectro de energía del núcleo  $^{48}\text{Cr}$  por medio de la  
aplicación de álgebras cuánticas deformadas al modelo de cluster**

Presentado por: Oscar Leonardo Ramírez Suárez

Director: Dr. Richard W. Haase

Bogotá D.C.  
2004

Dr. Richard W. Haase  
Director

M. Carolina Spinel G.  
Jurado

Fernando Cristancho M.  
Jurado

# Índice general

<b>Resumen y abstract</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>3</b>
2.1. Modelo de Cluster . . . . .	3
2.2. Álgebras Cuánticas $q$ -Deformadas (ACqD) . . . . .	7
2.2.1. Aplicación de ACqD en el oscilador cuántico . . . . .	7
2.2.2. Aplicación de ACqD al rotor cuántico . . . . .	9
<b>3. El núcleo <math>^{48}\text{Cr}</math> (<math>Z = 24</math> y <math>N = 24</math>)</b>	<b>13</b>
3.1. El $^{48}\text{Cr}$ en el modelo de partícula alfa . . . . .	21
3.1.1. Simetría rotacionales de las posibles estructuras del $^{48}\text{Cr}$ . . . . .	22
<b>4. Predicción del espectro energético del núcleo <math>^{48}\text{Cr}</math> según ACqD</b>	<b>25</b>
4.1. Introducción . . . . .	25
4.2. El grupo $SU_q(2)$ . . . . .	26
4.2.1. Obtención de la matriz rotación tridimensional por medio de la ley del producto de Wigner para espacios no conmutativos. . . . .	30
4.2.2. Obtención de la matriz rotación tridimensional por medio de la función generatriz $g(jm)$ . . . . .	31
4.2.3. Acción del operador rotación en la base tridimensional a un vector con componentes $\chi_1$ , $\chi_0$ y $\chi_{-1}$ . (Rotaciones alrededor de $\vec{n} \perp \vec{k}$ ). . . . .	33
4.2.4. Relación de $q$ con el ángulo de rotación $\phi$ para rotaciones con $\vec{n} \perp \vec{k}$ . . . . .	36
4.2.5. Relación de $q$ con el ángulo de rotación $\phi$ para rotaciones en cualquier eje $\vec{n}$ . . . . .	43
<b>5. Ajuste de parámetros y discusión de resultados</b>	<b>44</b>
5.1. Ajuste con ACqD: $q$ real ( $q = e^\tau$ ) . . . . .	45
5.2. Ajuste con ACqD generalizadas: $q$ real ( $q = e^\tau$ ) . . . . .	46
5.3. Ajuste con ACqD: $q$ complejo ( $q = e^{i\tau}$ ) . . . . .	47
5.4. Ajuste con ACqD generalizadas: $q$ complejo ( $q = e^{i\tau}$ ) . . . . .	48
<b>6. Conclusiones</b>	<b>50</b>

<b>A. Acople <math>\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \downarrow 1 \oplus 0</math></b>	<b>51</b>
A.1. Acople de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \downarrow 0$ a partir del la ley del producto de Wigner . . . . .	51
A.2. Acople de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \downarrow 1$ a partir del la ley del producto de Wigner . . . . .	53
<b>B. Relaciones de conmutación para las componentes en un espacio 3D no conmutativo</b>	<b>55</b>

# Índice de figuras

2.1.	Esquema comparativo para el potencial sentido entre <b>a)</b> dos átomos neutros y <b>b)</b> dos partículas alfa, según la suposición de Hafstad y Teller, donde se asume que la interacción entre partículas alfa, es similar a interacción entre dos átomos neutros mas la interacción repulsiva de Coulomb. . . . .	4
2.2.	Configuraciones de cluster alfa esperadas para núcleos de ${}^4\text{He}$ , ${}^8\text{Be}$ , ${}^{12}\text{C}$ y ${}^{16}\text{O}$ respectivamente según el modelo propuesto por Hafstad y Teller. . . . .	4
2.3.	Configuración en clusters alfa propuesta para el núcleo ${}^{48}\text{Cr}$ . Las partículas alfa están localizadas en la caras de un dodecaedro. . . . .	5
2.4.	Comparación de espectros energéticos para parámetros de deformación de tipo real ( $q = e^\tau$ ) y complejo ( $q = e^{i\tau}$ ). El caso sin deformar se obtiene para el valor $\tau = 0$ ( $q = 1$ ) en cualquiera de los dos casos. Todos los valores de energía están en unidades de $\hbar\omega$ . . . . .	9
2.5.	Comparación de espectros energéticos del rotor $q$ -deformado para parámetros de deformación de tipo real ( $q = e^\tau$ ) y complejo ( $q = e^{i\tau}$ ). El caso sin deformar se obtiene para el valor $\tau = 0$ ( $q = 1$ ) en cualquiera de los dos casos. Todos los valores de energía están en unidades de $\frac{\hbar^2}{T}$ . . . . .	11
3.1.	Ubicación del núcleo ${}^{48}_{24}\text{Cr}_{24}$ en la tabla periódica nuclear. Los números mostrados (números mágicos) son los correspondientes a la formación de una capa llena por protones o neutrones. También se muestra la manera de decaimiento de los diferentes núcleos al igual que los estables. (Agradecimientos al profesor Ramiro Cardona). . . . .	13
3.2.	Esquema de orbitales predicho por el modelo de capas. . . . .	14
3.3.	Diagrama de decaimiento nuclear con $A = 48$ . Tomado de [19]. . . . .	15
3.4.	Esquema de niveles y decaimientos del ${}^{48}\text{Cr}$ . Izquierda: espectro y banda del estado base encontrada antes de 1996 ([19]). Derecha: banda del estado base (b.e.b.: $j = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ) y banda excitada (exc.: $j = \{12, 14, 16\}$ ) encontrada en 1996 ([16]). La banda a analizar en este trabajo es la denotada por <i>b.e.b.</i> con los reultados publicados en 1996. . . . .	16

3.5.	Representación esquemática del diagrama de niveles de un núcleo. La transición de un estado inicial con energía $E_i$ a un estado final con energía $E_f$ se efectúa por la emisión de un rayo $\gamma$ con energía $E_\gamma = E_i - E_f$ . Los estados inicial y final se caracterizan por tener números cuánticos de momento angular total $j_i$ y $j_f$ respectivamente al igual que paridad denotada por $\pi$ . . . . .	17
3.6.	Ajuste del parámetro $\frac{\hbar^2}{I}$ según el modelo rotacional para núcleos par-par ( $E(j) = \frac{\hbar^2}{2I}j(j+1)$ ) a los niveles energéticos de la banda del estado base del $^{48}\text{Cr}$ . <b>a)</b> de $j = 0$ a $j = 10$ siendo el resultado del ajuste $\frac{\hbar^2}{I} = 137(6)$ keV y <b>b)</b> de $j = 0$ a $j = 16$ siendo el resultado del ajuste $\frac{\hbar^2}{I} = 104(5)$ keV. El ajuste para los estados $j = 12$ a $j = 16$ (banda <i>exc.</i> ) son mostrados con el siguiente criterio. . . . .	18
3.7.	Dependencia del spin con la frecuencia de rotación para el $^{48}\text{Cr}$ . La frecuencia de rotación ( $\hbar\omega$ ) es tomada de (3.6), utilizando en ésta los valores experimentales para las energías de transición reportados en [16]. . . . .	20
3.8.	Cruce de bandas presentado por el $^{48}\text{Cr}$ . Causante del backbending alrededor de $j = 10, 12$ . . . . .	20
3.9.	Posible estructura del núcleo $^{48}\text{Cr}$ involucrando simetría espejo ( $\sigma_h$ ). . . . .	21
3.10.	Posible estructura del núcleo $^{48}\text{Cr}$ involucrando simetría desliz ( $\sigma_h C_3$ ). . . . .	21
3.11.	Simetrías de rotación para una estructura dodecaédrica regular. De izquierda a derecha las simetrías $C_2$ , $C_3$ y $C_5$ . . . . .	23
3.12.	Simetrías de rotación para una estructura mostrada en la figura 3.9. Izquierda $C_2$ - Derecha $C_3$ . . . . .	23
3.13.	Simetrías de rotación para una estructura mostrada en la figura 3.10. De izquierda a derecha las simetrías $C_2$ , $C_3$ y $C_4$ . . . . .	24
4.1.	Caso $m_0$ . Posible relación entre el parámetro $q$ de deformación del álgebra (o equivalentemente $\tau$ ) con la simetría de rotación de un sistema. . . . .	41
4.2.	Parte real de $m_1$ . Posible relación entre el parámetro $q$ de deformación del álgebra (o equivalentemente $\tau$ ) con la simetría de rotación de un sistema. Se muestra el rango de valores para $\tau$ que cumple con la condición $\text{Im}(m_1) = 0$ . . . . .	41
4.3.	Parte real de $m_2$ . Posible relación entre el parámetro $q$ de deformación del álgebra (o equivalentemente $\tau$ ) con la simetría de rotación de un sistema. Se muestra el rango de valores para $\tau$ que cumple con la condición $\text{Im}(m_2) = 0$ . . . . .	42
5.1.	Ajuste de parámetros del modelo de rotor $q$ -deformado a los niveles experimentales de la banda base del $^{48}\text{Cr}$ , con una escogencia para $q$ real. . . . .	45
5.2.	Ajuste de parámetros del modelo de rotor $q$ -deformado generalizado a los niveles experimentales de la banda base del $^{48}\text{Cr}$ , con una escogencia para $q$ real. . . . .	46
5.3.	Ajuste de parámetros del modelo de rotor $q$ -deformado a los niveles experimentales de la banda base del $^{48}\text{Cr}$ , con una escogencia para $q$ complejo. . . . .	48
5.4.	Ajuste de parámetros del modelo de rotor $q$ -deformado generalizado a los niveles experimentales de la banda base del $^{48}\text{Cr}$ , con una escogencia para $q$ complejo. . . . .	49

# Índice de tablas

2.1. Comparación de resultados presentados en [10] y los calculados en este trabajo (Cal.), para las energías de ligadura y energías de ligadura por enlace para diferentes núcleos según el modelo de cluster, asumiendo cluster alfa. A modo de ejemplo, el cálculo explícito para el $^{48}\text{Cr}$ es presentado en el capítulo 3. . . . .	6
3.1. Ordenamiento de los nucleones del $^{48}\text{Cr}$ en orbitales según el modelo de capas. Las fracciones indican el número de nucleones que hay en el orbital con respecto al número máximo posible en cada capa. . . . .	14
4.1. Razón mínima entre la diferencia de energías del rotor $q$ -deformado y el rotor tradicional. La diferencia se toma entre dos niveles consecutivos. . . .	43
5.1. Resultados del ajuste de la banda del estado base del $^{48}\text{Cr}$ según ACqD siendo $q$ complejo. . . . .	47
5.2. Resultados del ajuste de la banda del estado base del $^{48}\text{Cr}$ según ACqD generalizadas siendo $q$ complejo. . . . .	48



# Resumen y abstract

## Resumen

A partir del estudio de espacios no conmutativos, se encuentran expresiones que relacionan el parámetro de deformación del espacio y la simetría de rotación de un sistema físico. Para esto, se parte de la deformación del grupo  $SU(2)$  ( $SU_q(2)$ ) para luego encontrando su representación matricial tridimensional, la cual representa al operador rotación en un espacio de la misma dimensionalidad, relacionar las cantidades que caracterizan una rotación (vector eje de giro y ángulo) con  $q$  por medio de la imposición de especialidad en tal representación. Con estos resultados se analiza la banda del estado base del sistema nuclear  $^{48}\text{Cr}$  considerándolo como un arreglo dodecaédrico de partículas alfa, las cuales serían responsables de la distribución de niveles de energía.

El análisis energético de la banda se lleva a cabo por medio de dos escogencias de  $q$ , real y compleja. En la primera no se encuentra una posible descripción del sistema debido a que ésta explicaría sistemas cuya separación entre niveles de energía fuese aumentando más rápidamente a como lo hace un rotor rígido, condición no cumplida en tal banda del  $^{48}\text{Cr}$ . En la segunda se encuentra una concordancia muy buena entre el modelo y los datos experimentales, sin embargo la relación entre el parámetro  $q$  y la geometría no es dada debido a la manera como se construyó la álgebra.

## Abstract

A partir del estudio de espacios no conmutativos, se encuentran expresiones que relacionan el parámetro de deformación del espacio y la simetría de rotación de un sistema físico. Para esto, se parte de la deformación del grupo  $SU(2)$  ( $SU_q(2)$ ) para luego encontrando su representación matricial tridimensional, la cual representa al operador rotación en un espacio de la misma dimensionalidad, relacionar las cantidades que caracterizan una rotación (vector eje de giro y ángulo) con  $q$  por medio de la imposición de especialidad en tal representación. Con estos resultados se analiza la banda del estado base del sistema nuclear  $^{48}\text{Cr}$  considerándolo como un arreglo dodecaédrico de partículas alfa, las cuales serían responsables de la distribución de niveles de energía.

El análisis energético de la banda se lleva a cabo por medio de dos escogencias de  $q$ , real y compleja. En la primera no se encuentra una posible descripción del sistema debido a que ésta explicaría sistemas cuya separación entre niveles de energía fuese aumentando más rápidamente a como lo hace un rotor rígido, condición no cumplida en tal banda del  $^{48}\text{Cr}$ . En la segunda se encuentra una concordancia muy buena entre el modelo y los datos experimentales, sin embargo la relación entre el parámetro  $q$  y la geometría no es dada debido a la manera como se construyó la álgebra.

# Capítulo 1

## Introducción

¿Cuál es la estructura interna del núcleo?, ¿hay algún arreglo preferencial para los nucleones dentro de un núcleo específico? y si es así ¿cómo el espectro energético del sistema nuclear expresa este ordenamiento de nucleones?

Estas preguntas y otras más han llamado una especial atención a los investigadores desde hace aproximadamente 80 años. Algunos de ellos han logrado dar respuesta a parte de estos interrogantes proponiendo modelos colectivos del núcleo como lo son el modelo rotacional y el modelo vibracional, otros sugieren modelos algebraicos como el IBM (Interacting Boson Model) y otros argumentan sus suposiciones a partir de los resultados experimentales como el decaimiento alfa. Ejemplos de aquellos que han incursionado en este campo son: Wheeler en 1937 [1], Hafstad y Teller (diseñador de la bomba H) en 1938 [2], Sheid, Greiner y Fink en 1972 [3], Bijker y Iachello (creador del modelo IBM en compañía de Arima) en el 2000 [4] y Sakuda y Ohkubo en el 2002 [5].

Un modelo particularmente interesante propuesto a finales de los años 30 es el denominado modelo de cluster. Este modelo no es un modelo que se obtiene de primeros principios ni de observaciones puramente experimentales sino que su fundamento está en la reunión de ideas de diferente origen. Por ejemplo, como se mostrará más adelante en el desarrollo del trabajo, este modelo utiliza hechos experimentales como lo es la fisión nuclear o el decaimiento alfa como también fundamentos de física atómica como el potencial entre dos átomos neutros para así describir el sistema nuclear.

Hoy en día el Grupo de Física Nuclear de la Universidad Nacional de Colombia (GF-NUN) está interesado en investigar alrededor de este tema utilizando una herramienta matemático-física llamada Álgebras Cuánticas  $q$ -Deformadas (ACqD) con el fin de intentar dar una explicación y descripción formal del espectro de núcleos ligeros ( $A < 50$ ).

Este modelo trae consigo ventajas con respecto a otros modelos en el sentido que su fundamento está en la construcción de un álgebra no conmutativa por medio de la introducción de uno o varios parámetros en el álgebra de Lie que describe un sistema mecánico cuántico dando así una nueva álgebra que en general ya no es un álgebra de Lie, implicando esto, que aquellos parámetros introducidos jueguen un papel importante en los niveles

energéticos del sistema y similarmente en otras cantidades de interés físico.

Este campo tuvo origen en la pregunta ¿cómo se comportaría una partícula cuántica en un espacio cuyas componentes no conmutasen? Esta pregunta puede ser una “simple” curiosidad en el campo de la mecánica cuántica ya que hasta el momento las relaciones de conmutación para los operadores (generadores) de un sistema mecánico cuántico dado explican adecuadamente el comportamiento de dichos sistemas sin necesidad de recurrir a una deformación del espacio, pero qué garantizaría que a un nivel microscópico (en el marco de la mecánica cuántica) los sistemas se rijan como lo hace a escala cuántica, por qué a tal nivel se esperaría que el espacio se mantuviera inalterado. Lo anterior sería un caso similar a lo ocurrido en la descripción de sistemas macroscópicos y en sistemas microscópicos (según nuestra escala), es decir, el paso de la mecánica clásica a la mecánica cuántica o también el caso de sistemas con velocidades pequeñas o altas con respecto a la velocidad de la luz o sistemas cercanos a concentraciones de masa muy elevadas, que en tal caso el paso se daría de la mecánica clásica a la teoría de la relatividad general.

Teniendo presente lo anteriormente mencionado, se puede ahora intuir cuáles de los sistemas físicos conocidos podría ser “sometido” al estudio con ACqD, para con esto ilustrar y entender más acerca de la posibilidad de tener sistemas descritos por álgebras y espacios no conmutantes. Tales sistemas serían las partículas o los núcleos atómicos ya que son los que más se acercan a dimensiones microscópicas para la mecánica cuántica.

Ahora, si se preguntase ¿qué se esperaría si se toman ideas del modelo de cluster y se analizan éstas en el campo de ACqD, por ejemplo en un sistema nuclear?. Éste es justamente el interés de la aplicación de este modelo, es decir, entender un poco más el significado físico de los parámetros introducidos en él al explicar un sistema cuántico como el núcleo atómico, como ya se ha venido haciendo en el último año para masas nucleares superiores a 50 ( $A \approx 80$  y  $A \approx 160$ ) [6], pero a diferencia de los resultados previos obtenido por el GFNUN, este trabajo se centra en la explicación de cómo están organizados los nucleones en el núcleo y si ésto es reflejado en el espectro energético, y no es enfocado en la discusión de la caracterización de regiones nucleares de diferentes masas por medio del valor de los parámetros del modelo.

Por tanto, nuevos interrogantes como ¿qué clase de contribuciones colectivas tiene el núcleo a nivel energético y cuál es la relevancia de éstas en el espectro? y que acuerdos o desacuerdos hay entre ACqD y otros modelos nucleares, saldrán a flote dando explicación parcial con los resultados y discusiones en este trabajo.

Además de los resultados e interpretaciones dados por el GFNUN en la aplicación del modelo algebraico  $q$ -deformado otros autores han aportado ampliamente a su aplicación, discusión y evaluación en diferentes sistemas físicos. Uno de ellos es Bonatsos [7, 8, 9] que en la década de los 90 publicó varios resultados en la rama de física nuclear con colaboración de varios investigadores como Daskaloyannis, Lenis, Kolokotronis, entre otros.

Sin embargo no se han explorado todas las ventajas y limitaciones del modelo y es por esto que con este trabajo el GFNUN quiere aportar su granito de arena.

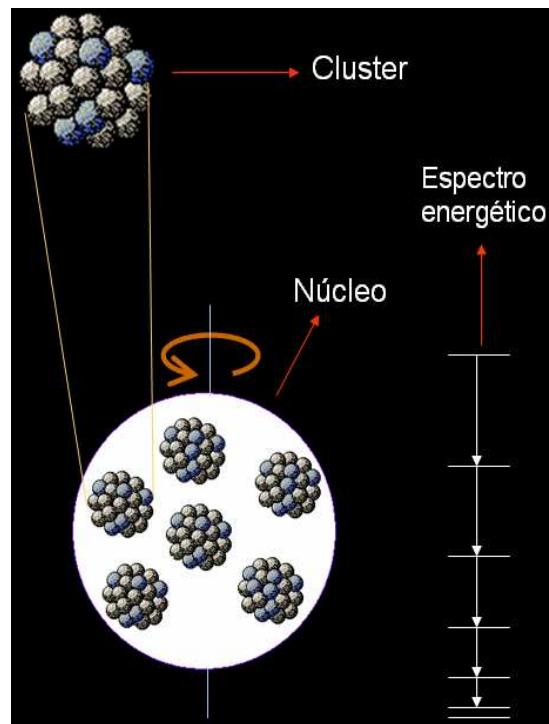
## Capítulo 2

# Marco Teórico

### 2.1. Modelo de Cluster

En los años 30 Hafstad y Teller [2] proponen un modelo de acumulamiento (cluster) de partículas alfa [10, 11] para explicar el espectro energético de núcleos ligeros, como se muestra en la figura a la derecha\*. La base del modelo es la suposición de la formación “estable” de partículas alfa por un intervalo de tiempo ( $\approx$  ps), después del cual, la partícula se desintegra en sus constituyentes (nucleones), los cuales tienen la posibilidad de reorganizarse de nuevo formando una estructura alfa.

Evidencia experimental que indica la validez del modelo es observada en la emisión espontánea de partículas alfa en núcleos pesados inestables con lo cual se da una indicación de que los nucleones tienden a agruparse dentro del núcleo formando clusters alfa.



---

\* Diagrama del núcleo conformado por cluster. El espectro energético mostrado podría ser causa del arreglo interno de los cluster dentro del núcleo. En este caso se muestra el comportamiento colectivo de rotación del núcleo.

---

En el modelo, los clusters son los responsables por ejemplo, de dar un comportamiento colectivo rotacional al núcleo como lo muestra el espectro energético del núcleo de  $^8\text{Be}$ ; el cual es explicable con este modelo como niveles rotacionales producidos por dos clusters de partículas alfa rotando cada una alrededor de la otra [1].

Para entrar en detalle acerca del modelo de cluster (que en lo que concierne a este escrito sólo se enfatizará en la formación de cluster alfa en el núcleo), se discutirá primero las consideraciones en el potencial sentido entre dos partículas alfa dentro del núcleo.

Recurriendo a la física molecular Hafstad y Teller proponen que el potencial entre dos partículas alfa es similar al sentido por dos átomos neutros en una molécula, pero con la salvedad de que en el caso nuclear hay que considerar la repulsión entre las partículas debido al potencial de Coulomb. Esta suposición en el potencial se puede ver esquemáticamente en la figura 2.1, la cual compara el caso molecular y el nuclear.

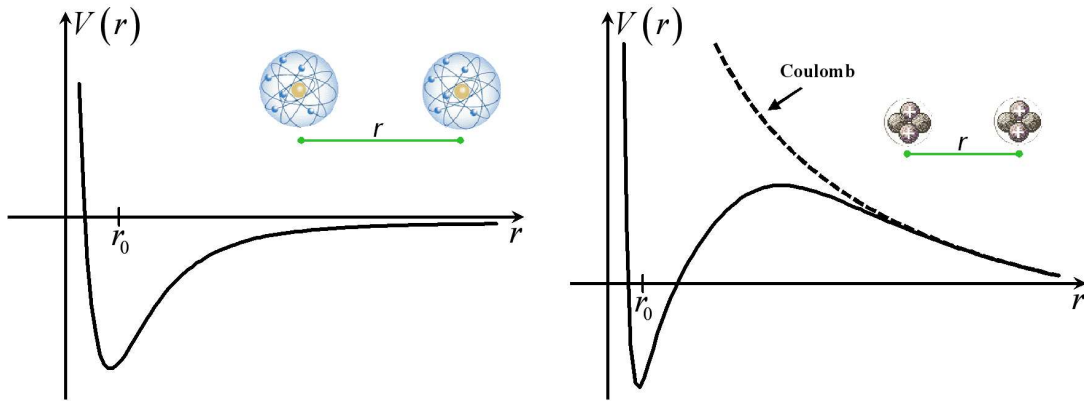


Figura 2.1: Esquema comparativo para el potencial sentido entre **a)** dos átomos neutros y **b)** dos partículas alfa, según la suposición de Hafstad y Teller, donde se asume que la interacción entre partículas alfa, es similar a interacción entre dos átomos neutros mas la interacción repulsiva de Coulomb.

Como se puede observar de la figura anterior, si tomamos energías pequeñas con respecto a la barrera dada por el potencial de Coulomb en el caso nuclear, se tiene que los niveles energéticos del núcleo estarán discretizados, de tal forma que a medida que se disminuya en energía hasta llegar al estado base del núcleo, el cual correspondería a que el sistema esté en el mínimo de potencial, se tendría que en tal condición las partículas alfa se ubicarían a una distancia  $r_0$  unas de otras, formando así estructuras geométricas como las mostradas en la figura 2.2.

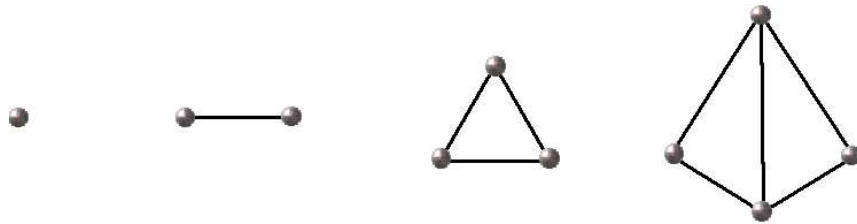


Figura 2.2: Configuraciones de cluster alfa esperadas para núcleos de  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^{12}\text{C}$  y  ${}^{16}\text{O}$  respectivamente según el modelo propuesto por Hafstad y Teller.

Nótese que para que lo anterior fuese cierto hay que suponer que el potencial de interacción

entre dos partículas alfa no se afecta con la introducción de una tercera<sup>1</sup>.

Siguiendo por inducción los resultados mostrados en la figura anterior, se podría esperar que la configuración del núcleo de interés en este trabajo ( $^{48}\text{Cr}$ ) tenga una geometría dada por clusters alfa localizados en las caras de un dodecaedro (figura 2.3), tal como se tratará más adelante en el desarrollo del trabajo.

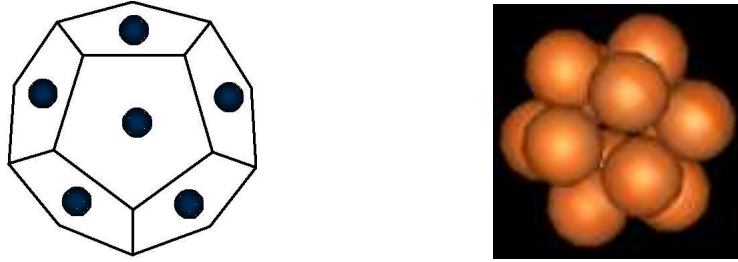


Figura 2.3: Configuración en clusters alfa propuesta para el núcleo  $^{48}\text{Cr}$ . Las partículas alfa están localizadas en la caras de un dodecaedro.

Saliendo del campo de las configuraciones de los núcleos en clusters y entrando ahora en las implicaciones que conllevan estos arreglos, se tiene por ejemplo, el éxito del modelo en la predicción de alrededor del 90% de la energía de ligadura de núcleos por parte de las partículas alfa, la cual está constituida por la masa de éstas<sup>2</sup>. El restante 10% de esta energía es utilizado como energías de enlaces entre las partículas alfa dentro del núcleo.

Para cuantificar lo anterior es bueno hacer el cálculo de cuánta sería la energía por enlace entre los clusters alfa en diferentes núcleos, lo cual es mostrado en la columna 4 de la tabla 2.1 [10] y cuyos resultados son obtenidos por medio de la relación (2.1) la cual indica la energía que es necesaria entregar al núcleo formado por  $n$  partículas alfa (en el marco del modelo de cluster) para romper los enlaces entre éstas dejándolas libres.

$$B_\alpha = nU(\alpha) - U(n\alpha) \quad (2.1)$$

En la expresión anterior  $U(\alpha)$  representa la energía (masa) de una sola partícula alfa y  $U(n\alpha)$  la del núcleo formado por  $n$  partículas alfa.

Como se puede observar de la tabla 2.1 (columna 5) el modelo de cluster da cuenta de la energía de saturación del núcleo, pero a diferencia del modelo de Gota Líquida del núcleo, la saturación predicha por éste es dada por enlace y no por nucleón, es decir, cada enlace alfa-alfa contribuye aproximadamente de la misma forma ( $\sim 2.4$  MeV) en la formación del núcleo.

Los resultados entre paréntesis en las columnas 3 y 5 de la tabla 2.1 hacen referencia a la no concordancia entre la configuración geométrica tomada para el núcleo respectivo y el valor de energía de saturación predicha para ésta, según el promedio obtenido por los demás núcleos. Por tal razón Wefelmier [12] sugiere que la configuración propuesta por

<sup>1</sup>Esta suposición también es tomada por los autores de modelo [2].

<sup>2</sup> $m_\alpha = 3727,37904(15) \text{ MeV}/c^2$ .

Hafstad y Teller, por ejemplo para el núcleo de  $^{20}\text{Ne}$ , no fuera triangular bipiramidal con 9 enlaces, sino que está fuese de solo 8 enlaces, pudiendo así estar más cerca de la energía de saturación promedio ( $\sim 2.46$  MeV/enlace según [10] o 2.41 MeV/enlace según nuestros cálculos).

Tabla 2.1: Comparación de resultados presentados en [10] y los calculados en este trabajo (Cal.), para las energías de ligadura y energías de ligadura por enlace para diferentes núcleos según el modelo de cluster, asumiendo cluster alfa. A modo de ejemplo, el cálculo explícito para el  $^{48}\text{Cr}$  es presentado en el capítulo 3.

Núcleo	$n$	$N$	$B_\alpha$ [10]	$B_\alpha/N$ [10]	$B_\alpha$ Cal.	$B_\alpha/N$ Cal.
Símbolo	(Partículas)	(Enlaces)	(MeV)	(MeV/enlace)	(MeV)	(MeV/enlace)
$^8\text{Be}$	2	1	-0.12	-0.12	-0.09	-0.09
$^{12}\text{C}$	3	3	7.33	2.45	7.27	2.42
$^{16}\text{O}$	4	6	14.5	2.42	14.44	2.41
$^{20}\text{Ne}$	5	9(8)	19.3	2.14(2.41)	19.17	2.13(2.40)
$^{24}\text{Mg}$	6	12(11)	28.8	2.40(2.62)	28.48	2.37(2.59)
$^{28}\text{Si}$	7	16	37.8	2.36	38.47	2.40
$^{32}\text{S}$	8	19	46.8	2.47	46.68	2.46
$^{36}\text{Ar}$	9	22	—	—	52.05	2.37
$^{40}\text{Ca}$	10	25	—	—	59.09	2.36
$^{44}\text{Ti}$	11	27	—	—	64.22	2.38
$^{48}\text{Cr}$	12	30	—	—	71.91	2.40
$^{52}\text{Fe}$	13	34	—	—	79.85	2.35
$^{56}\text{Ni}$	14	37	—	—	87.85	2.37

Un resultado en el valor de la energía de saturación que “rompe” con lo esperado es el obtenido por el  $^8\text{Be}$  como se muestra en la tabla 2.1. Para este caso se tiene que la energía del único enlace posible para configuraciones alfa en tal núcleo es de -0.12 MeV según [10] o -0.09 MeV según el presente trabajo. Aún sin tener explicación en la bibliografía, este resultado puede jugar un papel fundamental en el modelo dado que éste podría dar información de la energía de enlace entre alfas en núcleos de mayor masa.

Cambiando de rumbo y enfocándose en el núcleo  $^{48}\text{Cr}$  es relevante ahora mencionar a aquellos que han investigado con este modelo tal núcleo como lo son Sakuda y Ohkubo [5]. Ellos en su reporte discuten acerca de la posibilidad de describir el comportamiento colectivo del núcleo  $^{48}\text{Cr}$  el cual es modelado por un cluster de  $^{40}\text{Ca}$  y dos clusters de partículas alfa, encontrando una aceptable concordancia entre el modelo y el experimento.

En este trabajo, se tomará una idea similar a la tomada en la Ref. [5]. La diferencia básicamente está en la forma de tomar los clusters en el núcleo de  $^{48}\text{Cr}$ ; aquí se tratará a este núcleo en su estado base (como ya se había mencionado) como una configuración de doce partículas alfa arregladas regularmente en un dodecaedro y se aplicará el formalismo de álgebras cuánticas deformadas, para buscar así, la posibilidad de encontrar una descripción más amplia del comportamiento colectivo del núcleo de  $^{48}\text{Cr}$ .

## 2.2. Álgebras Cuánticas $q$ -Deformadas (ACqD)

La aplicación de álgebras cuánticas  $q$ -deformadas [7, 8, 9] fue introducida en física por vez primera en 1989 para el estudio de sistemas mecánico-cuánticos. El formalismo de las ACqD se basa en la introducción de uno o más parámetros o funciones en el álgebra tradicional [13, 14, 15] con el objeto de tener libertad en el estudio de sistemas cuánticos o en general el estudio de teoría de grupos deformados. A tales parámetros se les impone que en un límite determinado (que comúnmente es 1) se recupere los resultados dados por el álgebra tradicional. Esta introducción de parámetros en el álgebra conlleva cambios en resultados de interés físico tal como los valores esperados de los observables (en particular, el valor esperado de energía), con lo cual se espera, que dependiendo del valor del parámetro de deformación del álgebra se pueda explicar por ejemplo, cambios en los valores de los niveles energéticos de un sistema.

### 2.2.1. Aplicación de ACqD en el oscilador cuántico

Para entender más a fondo el formalismo de ACqD se analizará el efecto del parámetro de deformación del álgebra en el sistema del oscilador armónico cuántico.

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \quad ; \quad [N, a] = a \quad (2.2)$$

$$aa^\dagger - q^{\mp 1}a^\dagger a = q^{\pm N} \quad (2.3)$$

En el álgebra de “Lie deformada” correspondiente al sistema del oscilador armónico escrita en (2.2 y 2.3)<sup>3</sup>, se puede observar que el efecto del parámetro  $q$  cuando tiende a 1 es reducir el álgebra deformada al álgebra tradicional (2.4 y 2.5), tal como se mencionó anteriormente.

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \quad ; \quad [N, a] = a \quad (2.4)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.5)$$

La tendencia  $q \rightarrow 1$  es útil en la práctica para el chequeo de resultados ya que todas las relaciones para el sistema del oscilador cuántico no deformado se deben reducir de los resultados del álgebra deformada en tal límite.

Ahora, se puede preguntar por el “nuevo” operador hamiltoniano del sistema del oscilador según el álgebra dada en (2.2 y 2.3). Para ésto se puede obtener fácilmente de (2.3) (a partir de adición y sustracción) las relaciones entre el operador número y los operadores escalera como se muestra a continuación:

$$a^\dagger a = [N]_q \quad y \quad aa^\dagger = [N + 1]_q \quad (2.6)$$

en donde se adopta la notación  $[x]_q$  denominada  $q$ -número de  $x$ <sup>4</sup> dada por (de aquí en adelante se notará a  $[x]_q = [x]$  por simplificación):

$$[x] = [x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad (2.7)$$

<sup>3</sup>En este escrito se tomará la notación de los operadores sin “gorro”, es decir, el operador  $\hat{O}$  se notará como  $O$ .

<sup>4</sup>Algunos autores lo denominan como  $x$ -número



Recordando que el hamiltoniano del sistema escrito en operadores escalera es dado por:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) \quad (2.8)$$

y utilizando los resultados (2.6) que cumple el álgebra deformada del oscilador, se tiene que el hamiltoniano escrito en términos del operador número es:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} ([N] + [N + 1]) \quad (2.9)$$

Con este resultado se puede mostrar que el valor esperado de energía del oscilador cuántico para el estado  $n$ -ésimo está dado por:

$$E_q(n) = \frac{\hbar\omega}{2} ([n] + [n + 1]) \quad (2.10)$$

que explícitamente con el parámetro  $q$  es (según (2.7)):

$$E_q(n) = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} + \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}} \right) \quad (2.11)$$

que como es de esperar cumple con el resultado:

$$\lim_{q \rightarrow 1} E_q(n) = \frac{\hbar\omega}{2} (2n + 1) \quad (2.12)$$

El efecto del parámetro  $q$  en el espectro energético del oscilador cuántico se puede observar por medio de dos escogencias para  $q$ . El primero se puede tomar como un factor real de la forma  $e^\tau$  y el segundo un factor complejo de tipo  $e^{i\tau}$ . Con las anteriores escogencias los valores de energía están dados por:

Para el primer caso ( $q = e^\tau$ ):

$$E_q(n) = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{\sinh(\tau n)}{\sinh(\tau)} + \frac{\sinh(\tau(n+1))}{\sinh(\tau)} \right) \quad (2.13)$$

Para el segundo caso ( $q = e^{i\tau}$ ):

$$E_q(n) = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \frac{\sin(\tau n)}{\sin(\tau)} + \frac{\sin(\tau(n+1))}{\sin(\tau)} \right) \quad (2.14)$$

Estos comportamientos se pueden observar en la figura 2.4, la cual compara los resultados del oscilador sin deformar con osciladores deformados para los dos casos anteriores.

Con lo anterior se ilustra el efecto del parámetro de deformación en el espectro energético del oscilador y se puede concluir a partir de las diferencias de energía entre los niveles, que el parámetro  $q$  “simula” el efecto de perturbaciones en el sistema y no sólo a un reescalamiento de energía, ya que la diferencia de energía entre dos niveles consecutivos en el oscilador armónico sin perturbar es de justamente 1 (en unidades de  $\hbar\omega$ ) mientras que para el deformado depende en el valor de  $q$  tal como se muestra en la figura 2.4.

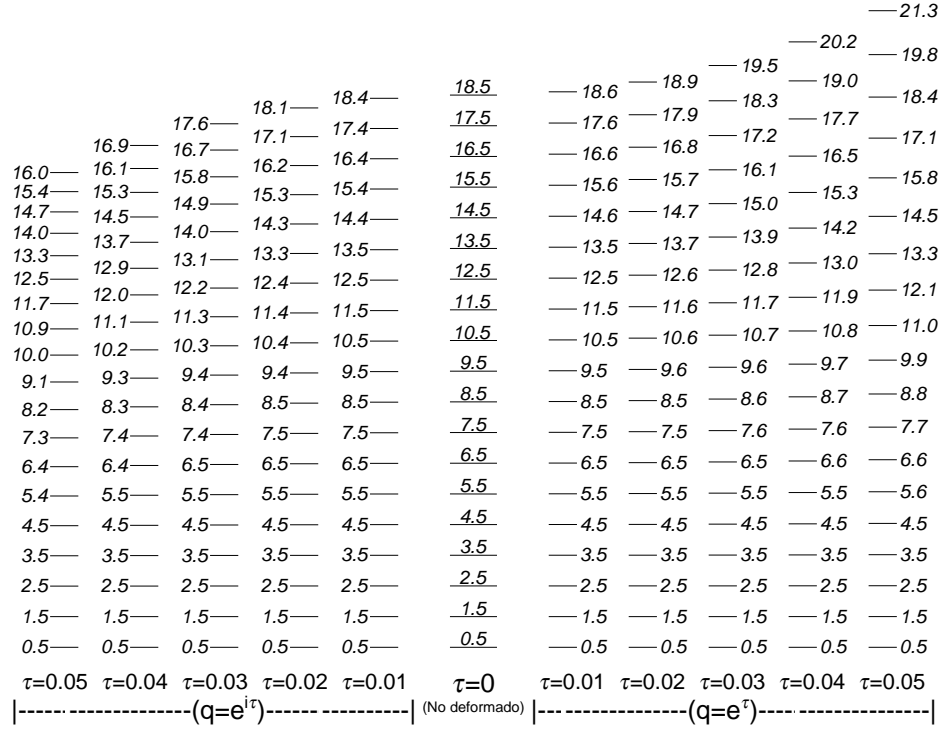


Figura 2.4: Comparación de espectros energéticos para parámetros de deformación de tipo real ( $q = e^\tau$ ) y complejo ( $q = e^{i\tau}$ ). El caso sin deformar se obtiene para el valor  $\tau = 0$  ( $q = 1$ ) en cualquiera de los dos casos. Todos los valores de energía están en unidades de  $\hbar\omega$ .

### 2.2.2. Aplicación de ACqD al rotor cuántico

Otro sistema físico que es de interés de analizar en este trabajo es el rotor cuántico. Similarmente al oscilador armónico mencionado en los párrafos anteriores el rotor cuántico basado en el grupo  $SO(3)$  también tiene su versión deformada, la cual se denota como  $SO_q(3)$  y está descrita por la relación (2.15).

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm \quad , \quad [J_+, J_-] = \pm[2J_0] \quad (2.15)$$

En este grupo deformado se tiene que la acción de los operadores  $J_\pm$  en el espacio de *kets*  $|jm\rangle$  dan valores esperados similares a los encontrados en el álgebra tradicional a diferencia que ahora dependen de  $q$  explícitamente de la siguiente manera:

$$J_\pm|jm\rangle = \sqrt{[j \mp m][j \pm m + 1]}|jm \pm 1\rangle \quad (2.16)$$

El caso del operador  $J_0$  se mantiene sin deformar su acción en el espacio de *kets* debido a la construcción del álgebra deformada:

$$J_0|jm\rangle = m|jm\rangle \quad (2.17)$$

Este hecho juega un papel importante en la obtención de representaciones matriciales de operadores que dependan del generador  $J_0$ , debido a que al no estar deformado cualquier operador que se pueda formar como una función de él su representación no será afectada por el parámetro  $q$ .

Con estos resultados se puede ahora determinar el valor esperado de energía del sistema, pero antes de eso hay que encontrar la versión deformada para el hamiltoniano del sistema. Para obtener este operador primero se encontrará el operador Casimir de segundo orden del grupo ( $SO_q(3)$ ) el cual es proporcional al hamiltoniano.

Sin entrar en detalle se puede mostrar que el operador que conmuta con los generadores del grupo (Casimir) es:

$$C_2^q = J_- J_+ + [J_0][J_0 - 1] \quad (2.18)$$

Y sabiendo que el operador hamiltoniano del rotor rígido se puede escribir en términos del operador  $C_2^q$  de la forma:

$$H = \frac{\hbar^2}{2I} C_2^q \quad (2.19)$$

(donde  $I$  es el momento de inercia del sistema), se puede obtener el espectro del rotor  $q$ -deformado a partir de los resultados de la acción de los generadores del grupo en los estados (2.16 y 2.17), como se muestra a continuación:

$$H|jm\rangle = \frac{\hbar^2}{2I} [j][j+1]|jm\rangle \quad (2.20)$$

que explícitamente en  $q$  real ( $q = e^\tau$ ) y fase ( $q = e^{i\tau}$ ) se tiene que:

Para  $q$  real:

$$H|jm\rangle = \frac{\hbar^2}{2I} \frac{\sinh(\tau j) \sinh(\tau(j+1))}{\sinh^2(\tau)} |jm\rangle \quad (2.21)$$

Para  $q$  fase:

$$H|jm\rangle = \frac{\hbar^2}{2I} \frac{\sin(\tau j) \sin(\tau(j+1))}{\sin^2(\tau)} |jm\rangle \quad (2.22)$$

Con estos resultados y similarmente a como se hizo con el oscilador armónico se muestra en la figura 2.5 diferentes espectros energéticos del sistema para diferentes valores de  $q$ .

Ahora, es oportuno examinar el valor de energía del estado  $|jm\rangle$  para valores de  $q$  cercanos a 1 o equivalentemente valores de  $\tau$  próximos a 0.

En general la energía del rotor se puede escribir en términos de sumas de la forma:

Para  $q = e^\tau$  (+) y  $q = e^{i\tau}$  (-)

$$E_\tau = j(j+1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\pm 1)^n \left( \sum_{m=0}^{2n} a_m^n j^m \right) \tau^{2n} \right\}$$

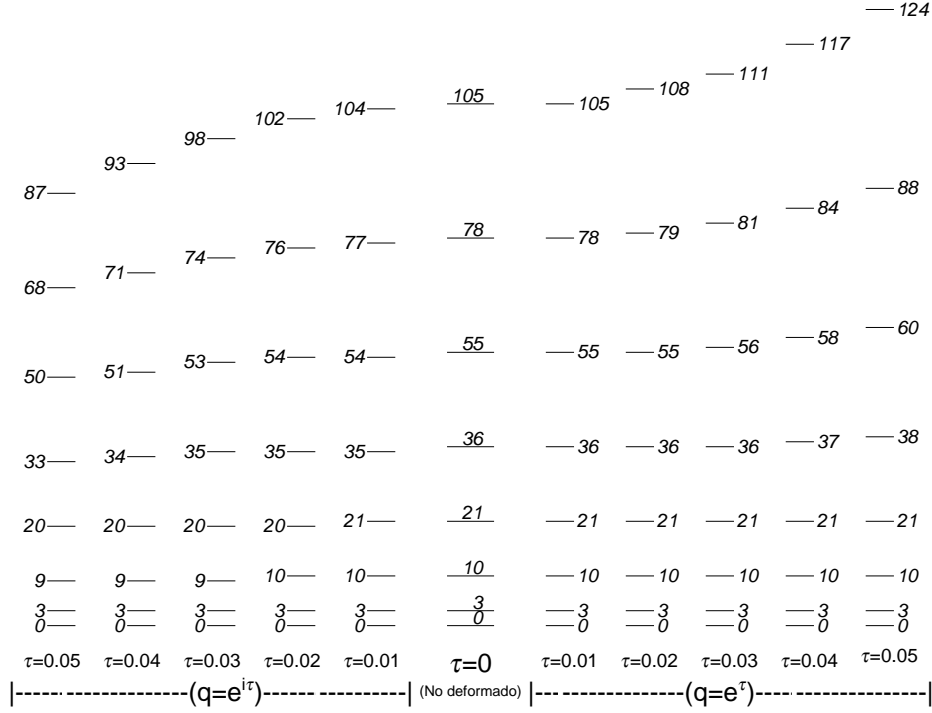


Figura 2.5: Comparación de espectros energéticos del rotor  $q$ -deformado para parámetros de deformación de tipo real ( $q = e^\tau$ ) y complejo ( $q = e^{i\tau}$ ). El caso sin deformar se obtiene para el valor  $\tau = 0$  ( $q = 1$ ) en cualquiera de los dos casos. Todos los valores de energía están en unidades de  $\frac{\hbar^2}{I}$ .

Si se toma valores de  $\tau \approx 0$  la relación anterior indica que el rotor  $q$ -deformado simula una contribución de tipo:

$$\begin{aligned}
 E_\tau &\approx j(j+1) \left\{ 1 \pm (a_0^1 + a_1^1 j + a_2^1 j^2) \tau^2 \right\} \\
 &= j(j+1) \left\{ 1 \pm \frac{1}{6} (-1 + 2j - 2j^2) \tau^2 \right\}
 \end{aligned}$$

Lo cual simularía un cambio en el momento de inercia del sistema al cambiar de nivel  $j$ . Este efecto se ha estudiado por medio del modelo fenomenológico VMI (Momento Variable de Inercia) y GVMI (Momento Variable de Inercia Generalizado).

Notese también, que la deformación del álgebra ( $SO_q(3)$ ) con un solo parámetro no tiene posibilidad de describir sistemas con contribuciones mayoritariamente vibracionales, más bien, esta deformación posibilita el estudio de sistemas rotacionales perturbados, condicionando a tal perturbación que sea de tipo anarmónico, es decir, que la energía dependa potencialmente en  $j$  pero sin contribuciones lineales diferentes a la dada por el rotor puro ( $j^2 + j$ ).

Una manera que abre el camino para describir sistemas de carácter vibracional, rotacional

o con ambas contribuciones (transicional) son las denominadas álgebras  $q$ -deformadas generalizadas, en las cuales se introduce un parámetro  $c$  en la energía del rotor  $q$ -deformado ( $[j][j+c]$ ). Este parámetro tiene el papel de clasificar el tipo de energía del sistema (mencionados anteriormente) a partir de su valor ( $\approx 1 \rightarrow$  rotores,  $\approx 2$  a  $8 \rightarrow$  transicionales y  $\approx 8$  o mayores  $\rightarrow$  vibracionales).

Teniendo claro el efecto del parámetro  $q$  en las cantidades físicas como la energía para sistemas rotantes y oscilantes como se ha mostrado anteriormente, el siguiente paso es investigar si puede haber otra(s) interpretación(es) física(s) de este parámetro para un sistema mecánico cuántico dado.

El caso de interés en el presente escrito para intentar dar significado físico a  $q$  es el sistema nuclear  $^{48}\text{Cr}$  (ver capítulo 3) el cual se quiere analizar a la luz del formalismo de ACqD, tomando como punto de partida la suposición dada por el modelo de cúmulos en partículas alfa para la descripción del espectro energético del núcleo.

Básicamente se quiere investigar si el valor del parámetro de deformación del álgebra está relacionado con la suposición de que en el núcleo  $^{48}\text{Cr}$  la configuración interna se puede tomar como agrupaciones de los nucleones en partículas alfa formando un dodecaedro en su estado base. Con esto, se analizarán los posibles estados rotantes y/o vibrantes para tal configuración que puedan dar explicación a parte del espectro del  $^{48}\text{Cr}$  (ver capítulo 4).

## Capítulo 3

# El núcleo $^{48}\text{Cr}$ ( $Z = 24$ y $N = 24$ )

El núcleo atómico del *Cromo* de masa 48 ( $^{48}\text{Cr}$ ) descubierto en 1797 por el químico francés Louis Nicolas Vauquelin, ha llamado la atención de investigadores en la última década enfocando su estudio en la explicación del espectro energético tanto teórica como experimentalmente [5, 16, 17, 18]. El interés del presente trabajo es analizar el comportamiento energético del núcleo mencionado a la luz del modelo de álgebras cuánticas  $q$ -deformadas, asumiendo que este sistema está conformado por clusters alfa, pero antes de eso se dará una descripción general de éste.

El  $^{48}\text{Cr}$  está constituido por 24 protones ( $Z = 24$ ) y 24 neutrones ( $N = 24$ ) y está ubicado en la tabla periódica nuclear entre los números mágicos 20 y 28 tanto para neutrones como para protones como se muestra en la figura 3.1.

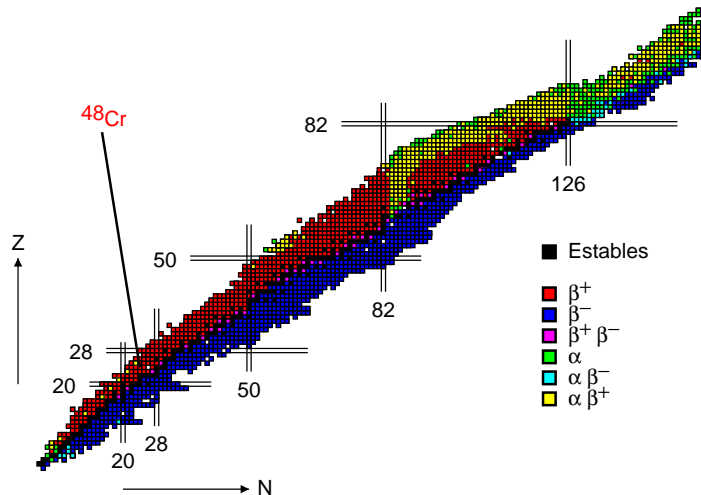


Figura 3.1: Ubicación del núcleo  $^{48}_{24}\text{Cr}_{24}$  en la tabla periódica nuclear. Los números mostrados (números mágicos) son los correspondientes a la formación de una capa llena por protones o neutrones. También se muestra la manera de decaimiento de los diferentes núcleos al igual que los estables. (Agradecimientos al profesor Ramiro Cardona).

Esto conduce a pensar que el comportamiento de este núcleo es de carácter colectivo en

su mayoría ya que al no estar cerca a capa cerrada, es decir, cerca a números mágicos el modelo de partícula independiente no explica adecuadamente su espectro energético.

Según el modelo de capas la distribución de los 24 protones y 24 neutrones están dadas en la tabla 3.1:

Tabla 3.1: Ordenamiento de los nucleones del  $^{48}\text{Cr}$  en orbitales según el modelo de capas. Las fracciones indican el número de nucleones que hay en el orbital con respecto al número máximo posible en cada capa.

Orbital $nl_j$ :	$0s_{\frac{1}{2}}$	$1p_{\frac{3}{2}}$	$1p_{\frac{1}{2}}$	$1d_{\frac{5}{2}}$	$2s_{\frac{1}{2}}$	$1d_{\frac{3}{2}}$	$1f_{\frac{7}{2}}$
No. Neutrones	2/2	4/6	2/6	6/12	2/12	4/12	4/8
No. Protones	2/2	4/6	2/6	6/12	2/12	4/12	4/8

como se puede observar también en el diagrama de niveles predicho por el modelo de capas mostrado en la figura 3.2.

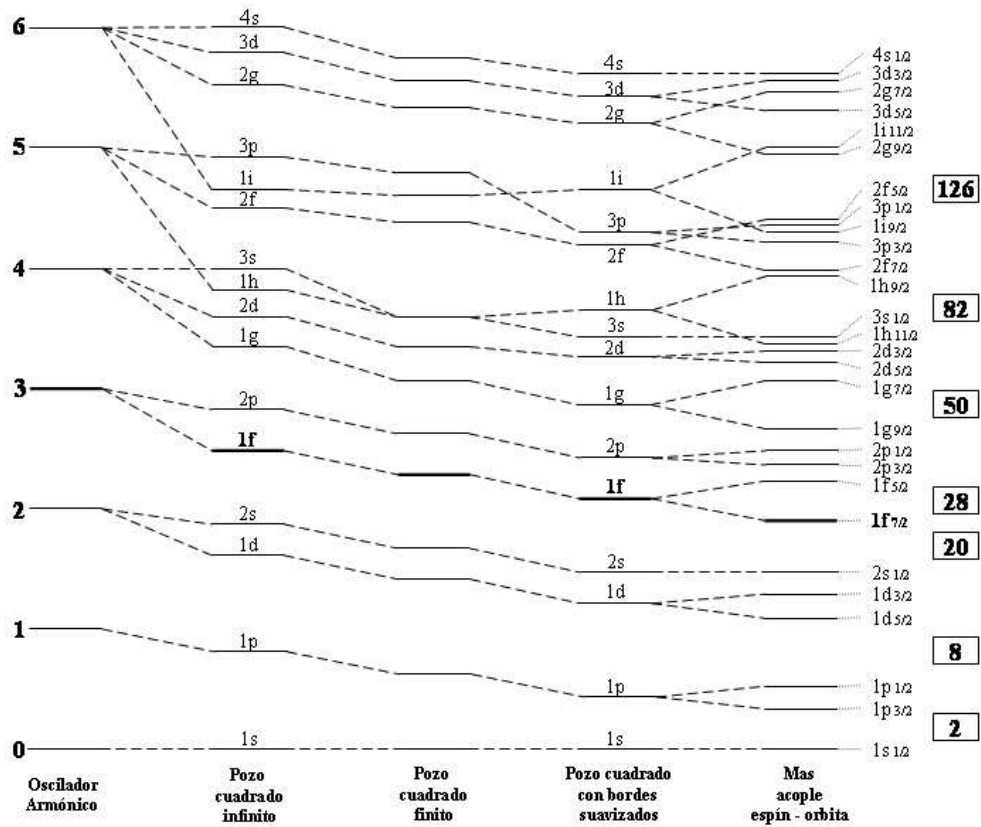


Figura 3.2: Esquema de orbitales predicho por el modelo de capas.

Con lo anterior se nota que el orbital  $1f_{\frac{7}{2}}$  (que en este caso también es capa) tiene igual-

mente número de partículas como huecos o vacantes.

Una propiedad relevante en el  $^{48}\text{Cr}$  es la manera de su decaimiento. Para entrar en esta descripción se analizarán dos casos por aparte. El primero de ellos es el decaimiento por medio de captura electrónica (EC, por sus siglas en inglés), lo que lleva a que el núcleo deje de ser *Cromo* y la segunda es la que se llamará desexcitación interna, la cual es dada por transiciones entre estados propios del núcleo.

Para el primer caso se tiene el diagrama de desintegración mostrado en la figura 3.3.

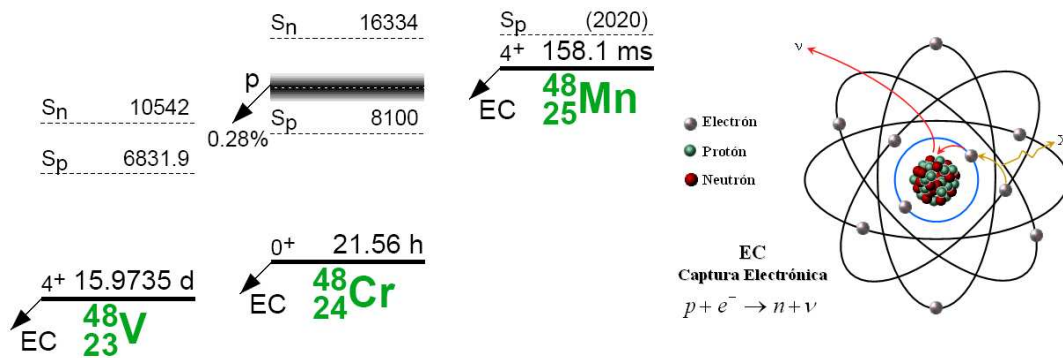


Figura 3.3: Diagrama de decaimiento nuclear con  $A = 48$ . Tomado de [19].

Como se puede observar en la figura anterior el núcleo de  $^{48}\text{Cr}$  en su estado base no es estable y decae al *Vanadio* ( $^{48}_{23}\text{V}_{25}$ ) por medio de EC, la cual consiste en que electrones del primer orbital del átomo son capturados por el núcleo seguido de una “transformación” de éste con un protón en un neutrón y por último el núcleo emite un neutrino dando como resultado que el núcleo original adquiera un neutrón más y pierda un protón. Este proceso esta seguido de una emisión de un rayo X debido a que la vacante del electrón capturado por el núcleo es ocupado por otro electrón proveniente de un orbital más alto en el átomo. Esto es esquematizado en la parte derecha de la figura 3.3.

Aunque como se introdujo en el capítulo 2 para el modelo de partícula alfa (sección 2.1), la suposición de que un núcleo está constituido por clusters es valida siempre que se cumpla con la condición de que el tiempo que tarda en desintegrarse tal cluster es mucho mayor que el tiempo de transición entre estados energéticos del núcleo, que para el caso del  $^{48}\text{Cr}$  esta condición no es rota debido a que la probabilidad por unidad de tiempo para el caso 1 (EC) es mucho menor que para el caso 2 (desexcitación interna), que en otras palabras es, el tiempo de vida de la transición por EC (21 h) es mucho mayor que el tiempo de vida de los estados excitados y aún se mantiene esta proporción para el tiempo de desexcitación de una banda completa ( $\sim 45$  ps).

Ahora, teniendo en cuenta lo anterior, se analizará el caso 2, a partir de la figura 3.4 en la cual se muestra el diagrama de decaimiento propio para el  $^{48}\text{Cr}$ .

En el siguiente diagrama se muestran los estados y posibles transiciones entre éstos regis-



tradas hasta el año 1996 [19, 16]. La notación y convenciones usadas están descritas en la figura 3.5.

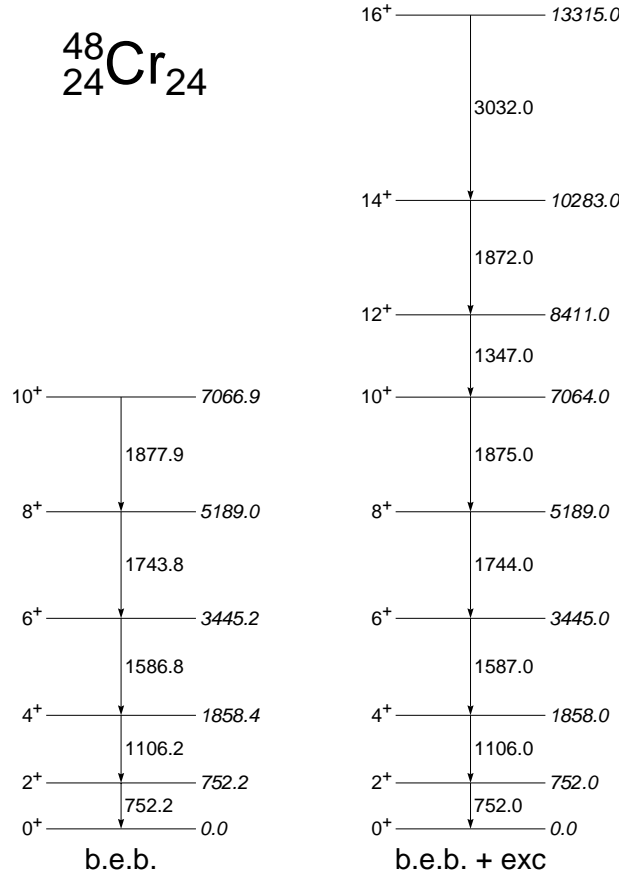


Figura 3.4: Esquema de niveles y decaimientos del  $^{48}\text{Cr}$ . Izquierda: espectro y banda del estado base encontrada antes de 1996 ([19]). Derecha: banda del estado base (b.e.b.:  $j = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ) y banda excitada (exc.:  $j = \{12, 14, 16\}$ ) encontrada en 1996 ([16]). La banda a analizar en este trabajo es la denotada por *b.e.b.* con los resultados publicados en 1996.

Como se observa en la figura 3.4 el comportamiento energético para los estados pertenecientes a la banda del estado base, denotada por *b.e.b.* es **aparentemente** rotacional, al menos para los primeros niveles.

Explicaciones de lo anterior se pueden realizar de tres formas diferentes:

La primera de ellas se basa en calcular si la razón entre los valores de energía de los estados correspondientes a  $j = 4$  y  $j = 2$  es o no cercana al valor 3.33, es decir,  $\frac{E(4)}{E(2)} \approx 3,33$  debido a que si el sistema fuese rotacional cumpliría con  $\frac{E(4)}{E(2)} = \frac{\frac{\hbar^2}{2I}4(4+1)}{\frac{\hbar^2}{2I}2(2+1)} = \frac{10}{3} \approx 3,33$ . Note que este criterio no cataloga el núcleo como un sistema rotacional, ya que sólo involucra dos

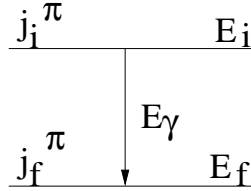


Figura 3.5: Representación esquemática del diagrama de niveles de un núcleo. La transición de un estado inicial con energía  $E_i$  a un estado final con energía  $E_f$  se efectúa por la emisión de un rayo  $\gamma$  con energía  $E_\gamma = E_i - E_f$ . Los estados inicial y final se caracterizan por tener números cuánticos de momento angular total  $j_i$  y  $j_f$  respectivamente al igual que paridad denotada por  $\pi$ .

estados de la banda, sino que impone una condición necesaria más no suficiente para que el sistema fuese puramente rotacional, que en el caso del  $^{48}\text{Cr}$   $\frac{E(4)}{E(2)} \approx 2,47$ . Con este criterio se concluye de entrada que el núcleo no es un rotor puro; sin embargo se discutirán las otras posibles formas de analizar sistemas rotantes. Cabe notar que el hecho de que la razón  $\frac{E(4)}{E(2)} \approx 2,47$  para este núcleo no fuese 3.33 no indica que el sistema no tenga contribución rotacional; puede ser que la parte rotacional sea afectado por una perturbación de tipo vibracional. A tales núcleos que cumplen con la condición anterior son denominado núcleos transicionales.

El segundo criterio es por medio del ajuste de parámetros a los niveles de energía de la banda utilizando la energía de un rotor puro como se muestra en la siguiente figura.

Los dos casos tomados en la figura anterior es debido a que si el comportamiento del  $^{48}\text{Cr}$  fuese de tipo rotacional la diferencia de energía entre niveles consecutivos debería aumentar linealmente con  $j$ <sup>1</sup>, pero se observa que la diferencia de energías entre los estado  $j = 10$  y  $j = 12$  es menor que la dada por los estados con  $j = 8$  y  $j = 10$ . Por tanto la figura 3.6-b) haría referencia al momento de inercia promedio de la banda del estado base. La figura 3.6-a) indicaría que aunque es un mejor ajuste que el caso 3.6-b) para los primeros 6 estados de la banda, estos niveles no describen aún un comportamiento rotacional puro, sin embargo, ellos se acercan al comportamiento de un rotor perturbado siendo este efecto el responsable de producir un aumento en los valores de energía de los estados con respecto a los que tendrían sin perturbación.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores se puede observar con el último criterio el fenómeno de backbending en tal banda. El criterio se basa en el análisis del momento de inercia del sistema como función del cuadrado de la frecuencia de rotación, con lo cual se puede mostrar que las variaciones de los momentos de inercia cuando dos bandas se cruzan.

Para comenzar primero habrá que encontrar el momento de inercia y frecuencia de rotación de un sistema mecánico cuántico rotante. Para esto se hará un tratamiento semi-clásico de la siguiente manera:

$$^1 E(j+2) - E(j) = \frac{\hbar^2}{2I}(j+2)(j+3) - \frac{\hbar^2}{2I}j(j+1) = \frac{\hbar^2}{I}2(j+1).$$

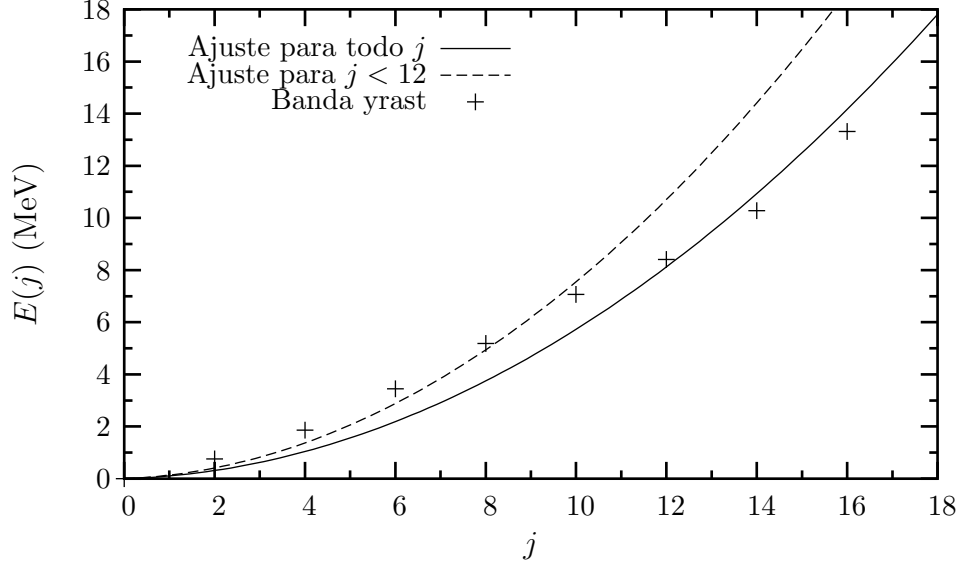


Figura 3.6: Ajuste del parámetro  $\frac{\hbar^2}{I}$  según el modelo rotacional para núcleos par-par ( $E(j) = \frac{\hbar^2}{2I}j(j+1)$ ) a los niveles energéticos de la banda del estado base del  $^{48}\text{Cr}$ . **a)** de  $j = 0$  a  $j = 10$  siendo el resultado del ajuste  $\frac{\hbar^2}{I} = 137(6)$  keV y **b)** de  $j = 0$  a  $j = 16$  siendo el resultado del ajuste  $\frac{\hbar^2}{I} = 104(5)$  keV. El ajuste para los estados  $j = 12$  a  $j = 16$  (banda *exc.*) son mostrados con el siguiente criterio.

De la mecánica clásica se tienen que la relación entre la energía cinética ( $E$ ) de un sistema rotante y su momento angular total ( $L$ ) está dada por:

$$E = \frac{L^2}{2I} \quad (3.1)$$

Donde a su vez el momento de inercia ( $I$ ) del sistema y el momento angular se relacionan a partir de la frecuencia de rotación ( $\omega$ ) de la forma:

$$L = I\omega \quad (3.2)$$

Ahora utilizando el marco de la mecánica cuántica, se sabe que el valor esperado del momento angular total al cuadrado para el estado  $|lm\rangle$  es  $\langle \hat{L}^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$  y por tanto

$$L =: \sqrt{\langle \hat{L}^2 \rangle} = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad (3.3)$$

Con estos resultados y partiendo de la ecuación (3.1) se obtiene la relación entre el momento de inercia como función de la energía de transición y el número cuántico  $l$  tal como se muestra a continuación:

$$E = \frac{L^2}{2I} \rightarrow \left( \frac{dE}{dL^2} \right)^{-1} = 2I$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dL} \frac{dL}{dL^2}\right)^{-1} &= 2I \\ \left(\frac{dE}{dL}\right)^{-1} \frac{dL^2}{dL} &= \left(\frac{dE}{dL}\right)^{-1} 2L = 2I \\ L &= I \left(\frac{dE}{dL}\right) = I \frac{dE}{d\hbar\sqrt{l(l+1)}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Comparando el resultado anterior con la ec. (3.2) se tiene que la frecuencia angular de rotación está dada por:

$$\hbar\omega = \frac{dE}{d\sqrt{l(l+1)}} \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta que el espectro energético de un rotor es de carácter discreto, se tiene que recurrir a variaciones finitas para el desarrollo de la parte derecha de (3.5) como sigue:

$$\hbar\omega = \frac{\Delta E}{\Delta\sqrt{l(l+1)}} = \frac{E_l - E_{l-2}}{\sqrt{l(l+1)} - \sqrt{(l-2)(l-1)}} = \frac{E_\gamma(l \rightarrow l-2)}{\sqrt{l(l+1)} - \sqrt{(l-2)(l-1)}} \quad (3.6)$$

Y de nuevo utilizado (3.4) pero utilizando el resultado cuántico para  $L$  en la parte izquierda se concluye que:

$$\hbar\sqrt{l(l+1)} = I\omega \implies \frac{I}{\hbar^2} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\hbar\omega} \quad (3.7)$$

Nótese que las relaciones utilizadas para encontrar el resultado anterior son cinemáticas, por tanto se denotará al momento de inercia encontrado como  $I \rightarrow I_c$  y a la frecuencia (3.6) como  $\omega \rightarrow \omega_c$ .

$$\frac{I_c}{\hbar^2} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\hbar\omega_c} \quad (3.8)$$

Análogamente se puede definir un momento de inercia dinámico. Este da cuenta de las variaciones del momento de inercia cinético, esto es, resalta los posibles cambios del momento de inercia cinético en rangos de frecuencias de rotación muy pequeños. Formalmente se escribe como:

$$\frac{2I_d}{\hbar^2} = \left(\frac{d^2E}{d(l(l+1))^2}\right)^{-1} \quad (3.9)$$

y teniendo en cuenta las variaciones discretas en la energía se obtiene que:

$$\frac{I_d}{\hbar^2} = \frac{4}{E_\gamma(l+2 \rightarrow l) - E_\gamma(l \rightarrow l-2)} \quad (3.10)$$

Enfocándose en las relaciones (3.6) y (3.8) se analizará el fenómeno de backbending.

Al graficar la dependencia entre el spin  $j$  en función de la frecuencia  $\hbar\omega$  (Figura 3.7) se esperaría un comportamiento lineal para el rotor cuántico ya que la frecuencia de rotación

es proporcional a la diferencia de energía entre dos estados consecutivos, o equivalentemente a la energía de transición entre estos<sup>2</sup>. Tal comportamiento no es observado en la figura y en cambio, ésta presenta un doblamiento (backbending) causado por un cruce de bandas entre  $j = 10$  y  $j = 12$  justo como se muestra en la figura 3.8.

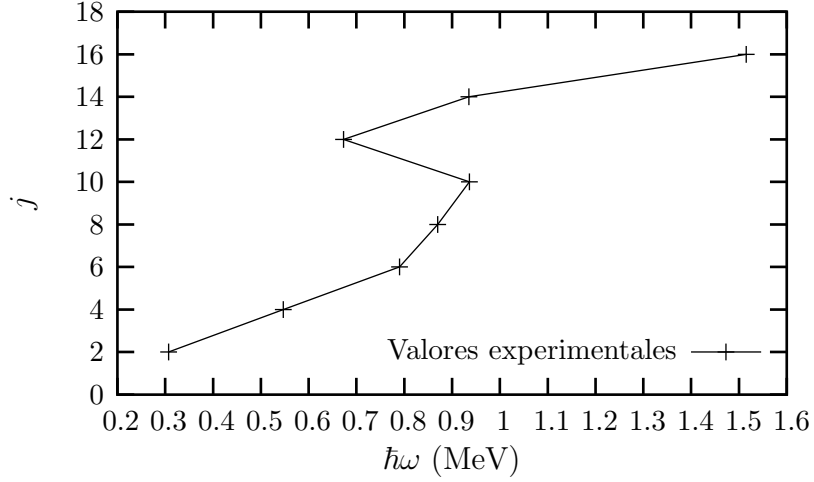


Figura 3.7: Dependencia del spin con la frecuencia de rotación para el  $^{48}\text{Cr}$ . La frecuencia de rotación ( $\hbar\omega$ ) es tomada de (3.6), utilizando en ésta los valores experimentales para las energías de transición reportados en [16].

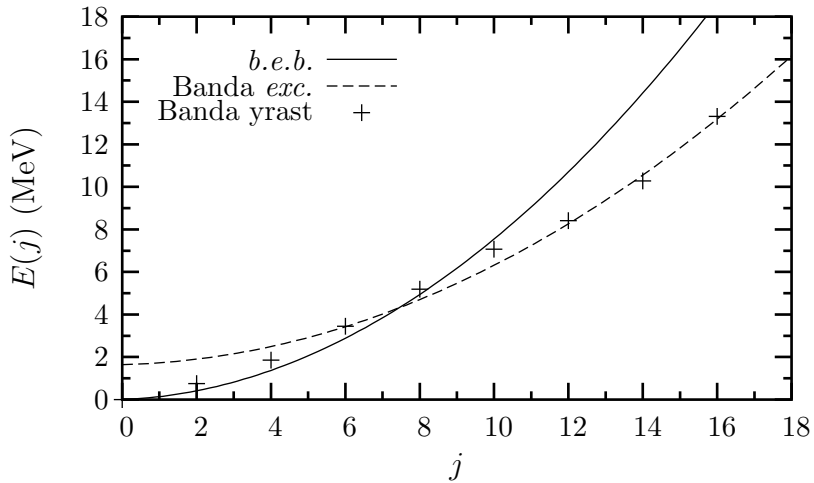


Figura 3.8: Cruce de bandas presentado por el  $^{48}\text{Cr}$ . Causante del backbending alrededor de  $j = 10, 12$ .

<sup>2</sup>La dependencia con  $l$  en el denominador ( $D(l)$ ) de (3.6) no afecta apreciablemente en la dependencia de  $\hbar\omega$  con  $l$  ya que éste tiende rápidamente a 2 a medida que  $l$  aumenta ( $D(2) \approx 2,45$ ;  $D(4) \approx 2,02$ ;  $D(6) \approx 2,01$ ;  $D(8) \approx 2,00$ ; ...).

### 3.1. El $^{48}\text{Cr}$ en el modelo de partícula alfa

El modelo de partícula alfa predice para un núcleo con número de neutrones y protones igual a  $2n$ , que este en su estado base adquiere una forma geométrica caracterizada por mantener a las  $n$  partículas alfa separadas igualmente de un centro común (centro de masa), además si se toma una partícula y sus vecinas la separación entre ellas es igual para cada par en el mismo estado.

Según este modelo el núcleo  $^{48}\text{Cr}$  estaría constituido por doce partículas alfa, esto conduce a tres posibles configuraciones. La primera de éstas es ubicar cada partícula en las caras de un dodecaedro regular (como se mencionó en la sección anterior e ilustro en la figura 2.3). La segunda y tercera opción es la formación de una estructura hexagonal regular por seis partículas alfa, colocando encima de ésta tres alfas formando un triángulo equilátero y similarmente abajo dando posibilidad a una simetría espejo ( $\sigma_h$ ) con respecto al plano que forma la estructura hexagonal o simetría desliz ( $\sigma_h C_3$ ) respectivamente. Estas estructuras son mostradas en las figuras 3.9 y 3.10.



Figura 3.9: Posible estructura del núcleo  $^{48}\text{Cr}$  involucrando simetría espejo ( $\sigma_h$ ).



Figura 3.10: Posible estructura del núcleo  $^{48}\text{Cr}$  involucrando simetría desliz ( $\sigma_h C_3$ ).

Considerado estas tres simetrías ahora se puede discernir la separación de una partícula con sus vecinas (centro a centro) y la de ésta al centro de masa. Para ésto se supone que el densidad nuclear ( $\rho$ ) es aproximadamente constante hasta el borde del núcleo y considerando además que la forma de éste se puede aproximar a la esférica<sup>3</sup>, se deduce que:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{12m_\alpha}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{3m_\alpha}{R^3} \quad \Rightarrow \quad R \approx \sqrt[3]{\frac{3m_\alpha}{\rho}} \quad (3.11)$$

donde  $m_\alpha$ ,  $M$ ,  $V$  y  $R$  son la masa de una partícula alfa y la masa, volumen y radio nuclear respectivamente.

<sup>3</sup>Con esta consideración el radio nuclear sería, en el modelo de partícula alfa, la distancia del centro masa a la partícula.

Por medio del análisis de la distribución de carga y ajuste a datos experimentales se encuentra un valor para la densidad  $\rho$  dado por:

$$\rho \approx 142 \frac{\text{MeV}}{c^2 \text{fm}^3} \quad (3.12)$$

Con lo anterior, se puede concluir a partir de la relación (3.11), que el radio nuclear del  $^{48}\text{Cr}$  es aproximadamente de 4.3fm. Este resultado impone una cota en la separación máxima entre partículas  $\alpha$  que constituyen el núcleo (8.6fm para el  $^{48}\text{Cr}$ ) debido a la posibilidad de enlaces entre partículas ubicadas espacialmente opuestas al centro de masa.

Teniendo una idea de las dimensiones del núcleo y de la separación entre sus constituyentes, ahora se examinará si estas estructuras, para el  $^{48}\text{Cr}$ , dan cuenta de la saturación de la energía por enlace entre partículas alfa. Para esto se considerará que los enlaces se darán solamente entre una partícula alfa con sus primeras vecinas, es decir, solo aquellas que están más cerca.

Las posibles configuraciones mostradas en las figuras 2.3, 3.9 y 3.10 según la consideración anterior tendrán un número de enlaces  $N$  de 30, 24 y 24 respectivamente.

Ahora, conociendo el número de enlaces se puede calcular la energía de ligadura por enlace a partir de la relación (2.1) como se muestra a continuación<sup>5</sup>:

$$\frac{B_\alpha}{N} = \frac{nU(\alpha) - U(n\alpha)}{N} \quad (3.13)$$

teniendo en cuenta que  $n$  es el número de partículas alfa se tiene que las estructuras mencionadas dan los resultados:

$$\frac{B_\alpha}{N} = \frac{12U(\alpha) - U(12\alpha)}{N} = \begin{cases} 2,40 \text{ MeV/enlace}, & \text{Estructura de la Figura 2.3,} \\ 3,00 \text{ MeV/enlace}, & \text{Estructura de la Figura 3.9,} \\ 3,00 \text{ MeV/enlace}, & \text{Estructura de la Figura 3.10.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Estos resultados y según el valor promedio para  $\frac{B_\alpha}{N}$  para varios núcleos<sup>6</sup> (2,41 MeV/enlace) indican que la configuración que más se acerca a tal predicción es la dodecaédrica regular, mostrada en la figura 2.3.

### 3.1.1. Simetría rotacionales de las posibles estructuras del $^{48}\text{Cr}$

En la sección anterior se observó que la estructura dodecaédrica regular para el núcleo  $^{48}\text{Cr}$  explica la saturación de la energía de ligadura por enlace, o mejor, esta configuración estaría en acuerdo con el valor promedio de tal energía obtenida por diferentes núcleos.

<sup>4</sup>En la expresión  $c$  es la rapidez de la luz y fm (denominado fermi) es  $10^{-15}\text{m}$ .

<sup>5</sup> $U(\alpha) = 3728,4 \text{ MeV}$  y  $U(^{48}\text{Cr}) = U(12\alpha) = 44668,9 \text{ MeV}$ .

<sup>6</sup>Ver Tabla 2.1.

Cabe notar que ésto es apenas una condición para el número de enlaces en la estructura del núcleo, y que la última palabra en la configuración nuclear la tiene la descripción del espectro con su simetría.

Por tal razón, en esta sección se describirá las posibles simetrías de rotación<sup>7</sup> de las tres posibles configuraciones propuestas para el  $^{48}\text{Cr}$ .

Comenzando con la estructura dodecaédrica regular se tiene que ésta posee simetrías de rotación alrededor de los ejes que atraviesan las caras ( $C_5$ ), los vértices ( $C_3$ ) y las aristas ( $C_2$ ). Estas simetrías son mostradas en la siguiente figura.

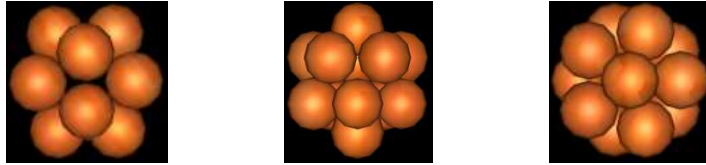


Figura 3.11: Simetrías de rotación para una estructura dodecaédrica regular. De izquierda a derecha las simetrías  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_5$ .

Notese que si se escoge al eje  $Z$  atravesando caras opuestas de la estructura, ésta no tiene simetrías de rotación diferente a la  $C_2$  en ningún eje que pertenezca al plano  $XY$ . Esto jugará un papel importante en la descripción del sistema nuclear por medio de ACqD como se verá más adelante.

La segunda estructura (Figura 3.9) es muy limitada en simetrías de rotación. Aparte de la simetría  $C_3$  dada por las seis partículas que forman el triángulo por encima y debajo del hexágono, tiene simetría  $C_2$  en ejes que cruzan perpendicularmente las aristas del hexágono (Figura 3.12). Esta estructura es más rica en simetrías de reflexión que las otras dos estructuras.



Figura 3.12: Simetrías de rotación para una estructura mostrada en la figura 3.9. Izquierda  $C_2$  - Derecha  $C_3$ .

Por último la simetría correspondiente a la estructura en la figura 3.10 muestra invarianza bajo rotaciones  $C_3$  en ejes que atraviesan perpendicularmente al plano que forman tres partículas equidistantes y pasando por el centro de masa de ellas, similarmente en la estructura se observa arreglos de partículas formando cuadrados y manteniendo la estructura inalterada por rotaciones  $C_4$  en ejes que pasen por el centro de dichos cuadrados. También presenta simetrías  $C_2$  por ejes que van de vértice a vértice de la estructura, es

<sup>7</sup>La convención tomada en este escrito para una simetría de rotación en un ángulo  $\frac{2\pi}{m}$  es  $C_m$ .



decir, simetrías en ejes que contengan a la vez el centro de la configuración y el centro de la cada partícula.

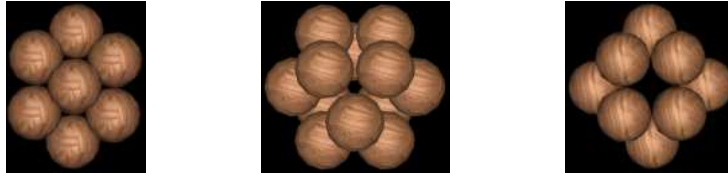


Figura 3.13: Simetrías de rotación para una estructura mostrada en la figura 3.10. De izquierda a derecha las simetrías  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ .

## Capítulo 4

# Predicción del espectro energético del núcleo $^{48}\text{Cr}$ según ACqD

### 4.1. Introducción

Como ya fue mencionado en la sección 2.2.1. (Aplicación de ACqD en el rotor cuántico) la energía predicha a partir del álgebra correspondiente al grupo deformado  $SO_q(3)$  escrita en la ec. (2.15) es dada por:

$$E_q(j) = \frac{\hbar^2}{2I}[j][j+1]^1 \quad (4.1)$$

La pregunta que se genera ahora y es el interés del trabajo es ¿cómo un sistema mecánico cuántico al cual se le asocia una geometría determinada daría cuenta de ésta en su espectro energético? La respuesta a esta pregunta no es encontrada utilizando el álgebra tradicional de  $SO(3)$  ya que la predicción del espectro energético con ésta no relaciona la geometría explícitamente, dando la única posibilidad de encontrar alguna relación de manera implícita con la geometría en el valor asociado al momento de inercia del sistema.

En el desarrollo de álgebras  $q$ -deformadas a diferencia de la no deformada, se pueden encontrar relaciones entre el valor de  $q$  y la simetría del sistema. Esto se consigue a partir de la obtención del operador rotación en tres dimensiones para un espacio cuyas coordenadas no conmuten e imponiendo las reglas de conmutación entre éstas. Por esta razón el marco de la mecánica cuántica no deformada no da cuenta de la simetría ya que en ésta se supone que los operadores de posición conmutan debido a la suposición que un sistema mecánico cuántico se puede preparar en cualquier región espacial en la cual están bien definidas las proyecciones en las componentes del sistema, es decir, un sistema se puede preparar por medio de un proceso de filtración<sup>2</sup> en cualquier dirección cuyas componentes  $x_i$  sean conocidas, lo cual indicaría que los operadores de posición son compatibles.

---

<sup>1</sup>Donde el  $q$ -número de  $x$  es definido por:  $[x] = \frac{q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$  de aquí en adelante, debido a que la escogencia en la relación de conmutación entre las coordenadas de spin  $\frac{1}{2}$  no se tomará como  $\chi_+\chi_- = q^{-1}\chi_-\chi_+$  sino como  $\chi_+\chi_- = q^{-\frac{1}{2}}\chi_-\chi_+$  como se verá más adelante.

<sup>2</sup>Estos se pueden realizar por medio de colimadores.

Ahora, según lo mencionado anteriormente cabría preguntarnos ¿cómo está relacionado el parámetro de deformación  $q$  con una simetría específica? Para responder este interrogante primero se mencionará cómo afecta la no conmutatividad del espacio en los operadores de un grupo (se tomará el caso de dos dimensiones como punto de partida).

## 4.2. El grupo $SU_q(2)$

Supongamos una base de spin  $\frac{1}{2}$  cuyas componentes no conmutan, es decir:

$$\chi_+\chi_- = q^{-\frac{1}{2}}\chi_-\chi_+ \quad (4.2)$$

Ahora, si se toma un vector (spinor) cualquiera que sea en tal espacio, éste se podría escribir como una superposición de la base y por tanto sus componentes no conmutarían. Lo anterior se puede representar matricialmente como:

$$\chi' = M\chi \implies \underbrace{\begin{pmatrix} \chi'_+ \\ \chi'_- \end{pmatrix}}_M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\chi_+ + b\chi_- \\ c\chi_+ + d\chi_- \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

La anterior relación representa una transformación lineal (la que fuese) del vector base para obtener el vector primado<sup>3</sup>. Si se explora el efecto de las relaciones de conmutación que debe cumplir el vector primado se encuentra que las componentes del operador  $M$  deberán cumplir determinadas relaciones de conmutación entre ellas, como se muestra a continuación:

De la relación (4.2) aplicada al vector primado se obtiene:

$$\chi'_+\chi'_- = q^{-\frac{1}{2}}\chi'_-\chi'_+ \quad (4.4)$$

reemplazando el resultado dado en (4.3) y asumiendo que las componentes de  $\chi_+$  y  $\chi_-$  conmutan con los elementos matriciales de  $M$  se llega a

$$(a\chi_+ + b\chi_-)(c\chi_+ + d\chi_-) = q^{-\frac{1}{2}}(c\chi_+ + d\chi_-)(a\chi_+ + b\chi_-) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} ac\chi_+\chi_+ + ad\chi_+\chi_- + bc\chi_-\chi_+ + bd\chi_-\chi_- = \\ q^{-\frac{1}{2}}(ca\chi_+\chi_+ + cb\chi_+\chi_- + da\chi_-\chi_+ + db\chi_-\chi_-) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} (ac - q^{-\frac{1}{2}}ca)\chi_+\chi_+ + (bd - q^{-\frac{1}{2}}db)\chi_-\chi_- = \\ - (ad - q^{-\frac{1}{2}}cb)\chi_+\chi_- - (bc - q^{-\frac{1}{2}}da)\chi_-\chi_+ \end{aligned} \quad (4.7)$$

---

<sup>3</sup>A esta clase de transformaciones se le denominan *transformaciones Lineales Generales q-deformadas* ya que están representadas en un espacio no conmutativo y pertenecen al grupo  $GL_q(2)$ .

como  $\chi_+$  y  $\chi_-$  son independientes implica esto que dos condiciones para que la igualdad anterior se cumpla son:

$$ac = q^{-\frac{1}{2}}ca \quad \text{y} \quad bd = q^{-\frac{1}{2}}db \quad (4.8)$$

y recurriendo de nuevo a la relación (4.2) se tiene:

$$-(ad - q^{-\frac{1}{2}}cb)q^{-\frac{1}{2}}\chi_{-\chi_+} - (bc - q^{-\frac{1}{2}}da)\chi_{-\chi_+} = 0 \quad (4.9)$$

lo cual implicaría que el coeficiente de  $\chi_{-\chi_+}$  tendría que anularse para que la relación se satisfaga y esto implica que:

$$-(ad - q^{-\frac{1}{2}}cb)q^{-\frac{1}{2}} = bc - q^{-\frac{1}{2}}da \quad \implies \quad [a, d] = q^{-\frac{1}{2}}cb - q^{\frac{1}{2}}bc \quad (4.10)$$

Resumiendo los resultados anteriores se tiene que si se asume un espacio no conmutativo  $\chi_+\chi_- = q^{-\frac{1}{2}}\chi_{-\chi_+}$  esto conlleva que en la representación matricial de los operadores del grupo sus elementos no conmuten y satisfagan las relaciones:

$$ac = q^{-\frac{1}{2}}ca, \quad bd = q^{-\frac{1}{2}}db \quad \text{y} \quad [a, d] = q^{-\frac{1}{2}}cb - q^{\frac{1}{2}}bc \quad (4.11)$$

Con lo anterior se observo la implicaciones que tiene la no conmutatividad del espacio por acción de los operadores a izquierda. Ahora si se hace el mismo análisis a un vector  $\chi''$  el cual es obtenido por una transformación ( $M$ ) a derecha del vector  $\chi$  se llegan a las relaciones entre los elementos matriciales del operador dadas a continuación:

$$ab = q^{-\frac{1}{2}}ba, \quad cd = q^{-\frac{1}{2}}dc \quad \text{y} \quad [a, d] = q^{-\frac{1}{2}}bc - q^{\frac{1}{2}}cb \quad (4.12)$$

Si se compara la tercera relación de (4.11) con la correspondiente de (4.12) se obtiene que la relación entre los elementos  $b$  y  $c$  no es afectada por el parámetro  $q$ , implicando esto la conmutación entre ellas ( $[b, c] = 0$ ).

Con esto ahora se puede escribir el álgebra que deben satisfacer los elementos matriciales de una transformación lineal en un espacio no conmutativo de dos dimensiones.

$$\begin{aligned} ab = q^{-\frac{1}{2}}ba, \quad ac = q^{-\frac{1}{2}}ca, \quad [b, c] = 0, \quad bd = q^{-\frac{1}{2}}db \\ cd = q^{-\frac{1}{2}}dc \quad \text{y} \quad [a, d] = (q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}})bc \end{aligned} \quad (4.13)$$

Notese que de las relaciones anteriores se recupera las relaciones de conmutación tradicionales para el grupo  $GL(2)$  cuando se toma el límite  $q \rightarrow 1$ .

Teniendo presente que las relaciones presentadas en (4.13) se deben satisfacer para cualquier transformación lineal, miremos ahora como se afecta el operador rotación en el espacio de spin  $\frac{1}{2}$ , recordando que este operador está caracterizado por ser unitario (por conservación de la probabilidad) y en su representación matricial su determinante debe ser igual a la unidad (debido a que la rotación de un vector no altera su magnitud, solo su orientación).

Antes de imponer las condiciones mencionadas anteriormente, primero se definirá el determinante en un espacio no conmutativo como el mostrado en la ec. (4.2).

$$\det_q(M) = ad - q^{-\frac{1}{2}}bc \quad (4.14)$$

Y de nuevo en el límite  $q \rightarrow 1$  se recupera la definición del determinante usual.

En analogía con los grupos usuales se puede encontrar que la representación del operador inverso (por ejemplo de  $M$ ), está dado por:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det_q(M)} \begin{pmatrix} d & -q^{\frac{1}{2}}b \\ -q^{-\frac{1}{2}}c & a \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Teniendo presente las ecs. (4.58) y (4.15), el camino para encontrar las condiciones que deben satisfacer los elementos matriciales de un operador especial unitario es similar al recorrido en los grupos usuales. Primero exijamos al operador  $M$  la condición de unitariedad, es decir,  $M^\dagger = M^{-1}$ , esto es:

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\det_q(M)} \begin{pmatrix} d & -q^{\frac{1}{2}}b \\ -q^{-\frac{1}{2}}c & a \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

por tanto:

$$\begin{aligned} a^* &= \det_q^{-1}(M)d, & b^* &= -\det_q^{-1}(M)q^{-\frac{1}{2}}c \\ c^* &= -\det_q^{-1}(M)q^{\frac{1}{2}}b, & d^* &= \det_q^{-1}(M)a \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para terminar, solo falta la condición de especialidad en el operador  $M$  y esto se logra como se menciono anteriormente obligando a que el  $\det_q(M) = 1$  y con esto los elementos matriciales (4.17) y las relaciones (4.13) quedan escritas como (4.18) y (4.19) respectivamente:

$$\begin{aligned} a &= d^*, & c &= -q^{\frac{1}{2}}b^* & c^* &= -q^{\frac{1}{2}}b, & y & d &= a^* \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} ab &= q^{-\frac{1}{2}}ba, & ab^* &= q^{-\frac{1}{2}}b^*a, & [b, b^*] &= 0, & ba^* &= q^{-\frac{1}{2}}a^*b \\ b^*a^* &= q^{-\frac{1}{2}}a^*b^* & y & [a, a^*] &= (q-1)bb^* \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para una mejor comprensión del escrito se denotará a  $T$  como aquellas matrices (transformaciones lineales) que cumplen con las condiciones de especialidad y unitariedad, cumpliendo además las relaciones de conmutación entre sus elementos como se menciona en (4.19). La notación  $M$  se utilizará como un operador del grupo  $GL_q(2)$ .

A  $T$  se le denomina la representación fundamental del grupo  $SU_q(2)$ , por ser de dos dimensiones, pero no es la única representación del grupo, también se pueden obtener representaciones de mayor dimensión (3,4,...) por medio, por ejemplo, de la ley del producto de Wigner, con la salvedad de que esta ley ahora representa el acople de espacios no conmutativos.

<sup>4</sup>No es de extrañar que a este resultado se le denomine  $q$ -determinante a diferencia de lo usual.

Ya se conoce la representación fundamental del grupo  $SU_q(2)$  y se sabe que éste, en el caso no deformado, puede representar rotaciones de spinores en el espacio, cuando sus elementos matriciales  $\alpha$  y  $\beta^5$  son los denominados parámetros de Cayley-Klein<sup>6</sup>.

El interés de este trabajo es analizar si el parámetro de deformación del álgebra ( $q$ ) está relacionado con la geometría de un sistema físico, por tanto es oportuno preguntar ¿cuál es la representación de  $SU_q(2)$  en tres dimensiones? Esta pregunta se fundamenta en el hecho de que la representación fundamental del grupo de rotaciones en tres dimensiones  $SO(3)$  (o su análogo deformado  $SO_q(3)$ ) coincide con la representación en tres dimensiones del grupo  $SU(2)$  (o  $SU_q(2)$ ). Por lo tanto, para dar respuesta a la pregunta anterior hay que tener claro que en espacios no conmutativos el producto tensorial se ve afectado por la deformación y por tanto las reglas de acople son diferentes al caso tradicional.

En el caso tradicional, la representación en tres dimensiones de  $SU(2)$  se puede obtener del producto de Wigner el cual se encarga de acoplar las representaciones fundamentales del grupo teniendo en cuenta la contribución de cada combinación de spin posible. Esto lo hace por medio de los coeficientes de Clebsch-Gordan (CG) y los elementos matriciales de la representación fundamental, como se muestra a continuación:

$$D_{m,m'}^j(\mathbb{T}) = \sum_{m_1, m'_1, m_2, m'_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m'_1 m'_2 m'}^{j_1 j_2 j} D_{m_1, m'_1}^{j_1}(\mathbb{T}) D_{m_2, m'_2}^{j_2}(\mathbb{T}) \quad (4.20)$$

para  $j_1 = \frac{1}{2}$  y  $j_2 = \frac{1}{2}$  siendo  $D_{m,m'}^{\frac{1}{2}}$  la representación fundamental de  $SU(2)$  que explícitamente es:

$$D_{m,m'}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Si se desarrolla la anterior suma se encontrará dos contribuciones no nulas al acople  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ . La primera se da cuando los spines se suman para dar  $j = 1$  y la segunda se da cuando su acople es la diferencia dando como resultado  $j = 0$ . Este resultado se puede escribir como  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ . Con lo anterior se tiene que la representación matricial de  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$  estará dada por una matriz de cuatro dimensiones en la cual esta conformada por una sub-matriz  $3 \times 3$  en la esquina superior derecha y otra  $1 \times 1$  en la esquina opuesta, como se muestra es la siguiente expresión.

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ \sqrt{2}\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & \sqrt{2}\beta\delta & 0 \\ \gamma^2 & \sqrt{2}\gamma\delta & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

<sup>5</sup>En el paso de álgebras  $q$ -deformadas a las no deformadas los elementos matriciales  $a$  y  $b$  tienden a  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

<sup>6</sup>No sobra aclarar que las letras griegas  $\alpha$  y  $\beta$  a lo largo del escrito representarán los parámetros de Cayley-Klein los cuales conmutan, mientras que los elementos  $a$  y  $b$  no conmutantes, son sus análogos en el caso deformado si se quiere representar rotaciones de spinores.

<sup>7</sup>Los valores de  $\gamma$  y  $\delta$  se asumen  $-\beta^*$  y  $\alpha^*$  respectivamente, además la condición  $\alpha\delta + \gamma\beta = 1$  se debe satisfacer para que esta matriz se la representación fundamental de  $SU(2)$ .

Si se observa con detenimiento la matriz correspondiente a  $j = 1$  y escribiendo explícitamente en función del ángulo de rotación ( $\phi$ ) y las componentes del vector eje de giro ( $n_i$ ), los parámetros de Cayley-Klein ( $\alpha = \cos(\frac{\phi}{2}) - in_z \sin(\frac{\phi}{2})$  y  $\beta = \sin(\frac{\phi}{2})(-n_y - in_x)$ ) se tiene la matriz de rotación en tres dimensiones representada en la base esférica.

La pregunta que sale a flote en este punto es ¿cómo están relacionados los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  con el vector eje de giro y el ángulo de rotación cuando se quiere representar rotaciones en un espacio deformado? Par responder esta pregunta hay que recorrer dos caminos diferentes que conducirían al mismo resultado. El primero de ellos es encontrar la forma de la representación matricial en tres dimensiones del acople  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$  por medio de la ley del producto de Wigner para espacios no conmutativos o por medio de la función generatriz del operador rotación. Luego de esto se toma el camino de encontrar los elementos matriciales del operador rotación tridimensional en la base acoplada  $|jm\rangle$ . Con esto se puede relacionar (por comparación) cual es la forma que tienen los elementos análogos a los parámetros de Cayley-Klein en un espacio no conmutativo.

#### 4.2.1. Obtención de la matriz rotación tridimensional por medio de la ley del producto de Wigner para espacios no conmutativos.

Análogamente a la ley del producto de Wigner usual, en espacios no conmutativos se tiene para esta ley una forma parecida, donde los coeficientes CG son afectados por la parámetro  $q$ <sup>8</sup> y como se mostró anteriormente las representaciones del grupo tienen también dependencia en él. Formalmente la ley de Wigner se puede escribir como:

$${}^q D_{m,m'}^j(T) = \sum_{m_1, m'_1, m_2, m'_2} {}^q C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} {}^q C_{m'_1 m'_2 m'}^{j_1 j_2 j} {}^q D_{m_1, m'_1}^{j_1}(T) {}^q D_{m_2, m'_2}^{j_2}(T) \quad (4.23)$$

donde los coeficiente  $q$ -WCG están dados por:

$$\begin{aligned} {}^q C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} &= \delta_{m_3, m_1 + m_2} \times q^{\frac{1}{4}\Delta(\Delta + 2j_3 + 1) + (j_1 m_2 - j_2 m_1)} \times \Delta(j_1 j_2 j_3) \\ &\times ([\Sigma_1]! [\Delta_1]! [\Sigma_2]! [\Delta_2]! [\Sigma_3]! [\Delta_3]! [2j_3 + 1])^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_n \frac{(-1)^n q^{-\frac{n}{2}(\Delta + 2j_3 + 1)}}{[n]! [\Delta - n]! [\Delta_1 - n]! [\Sigma_2 - n]! [-\Delta + \Sigma_1 + n]! [-\Delta + \Delta_2 + n]!} \end{aligned} \quad (4.24)$$

con

$$\Delta = j_1 + j_2 - j_3 \quad ; \quad \Delta_i = j_i - m_i \quad ; \quad \Sigma_i = j_i + m_i \quad (4.25)$$

$$\Delta(j_1 j_2 j_3) = \left( \frac{[\Delta]! [-\Delta + 2j_1]! [-\Delta + 2j_2]!}{[\Delta + 2j_3 + 1]!} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.26)$$

y  $T$  la representación matricial del grupo  $SU_q(2)$ .

Si se desarrolla la suma para  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$  y  $j = 1$  se obtiene la matriz tridimensional de

<sup>8</sup>En la literatura se acostumbra a abreviar a los coeficientes de CG en espacios no conmutativos ( ${}^q C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}$ ) como  $q$ -WCG en honor a Wigner, Clebsch y Gordan.

rotación del espacio no conmutativo. Esta matriz explícitamente tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}ab & b^2 \\ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}ac & ad + q^{\frac{1}{2}}bc & \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}bd \\ c^2 & \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}cd & d^2 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Los pasos intermedios para obtener el anterior resultado están descritos en el Apéndice A.

Como se observa del resultado se ha encontrado cual es la forma del operador rotación en 3D pero aún no se conoce como depende explícitamente tal matriz del ángulo y las componentes del vector eje de giro los cuales caracterizan la rotación o simetría de un sistema. Esta relación se discutirá más adelante.

#### 4.2.2. Obtención de la matriz rotación tridimensional por medio de la función generatriz $g(jm)$ .

Otro camino similar a la ley del producto de Wigner para encontrar el resultado (4.27) es por medio de la función  $g(jm)$  (denominada función generatriz), expresada en términos de las representaciones en coordenadas  $(\chi_+$  y  $\chi_-)$  de la base desacoplada  $\frac{1}{2}$ . Esta función está dada para el espacio no conmutativo (4.2) por:

$$g(jm) = q^{\frac{1}{4}(j-m)(j+m)} \frac{\chi_+^{j+m} \chi_-^{j-m}}{\sqrt{[j-m]![j+m]!}} \quad (4.28)$$

Ahora, si se evaluara el efecto que tiene el operador rotación en la función generatriz se obtiene:

$$\begin{aligned} U_\phi(g(jm)) &= g(jm, \phi) \\ &= q^{\frac{1}{4}(j-m)(j+m)} \frac{U_\phi \chi_+^{j+m} U_\phi \chi_-^{j-m}}{\sqrt{[j-m]![j+m]!}} \\ &= q^{\frac{1}{4}(j-m)(j+m)} \frac{\chi_+^{j+m}(\phi) \chi_-^{j-m}(\phi)}{\sqrt{[j-m]![j+m]!}} \end{aligned}$$

y recordando que la acción del operador rotación en  $\chi_+$  y  $\chi_-$  está dada por el operador:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

cuyos elementos satisfacen (4.19) se tiene que  $g(jm, \phi)$  está expresada en términos de la base desacoplada no rotada por:

$$g(jm, \phi) = q^{\frac{1}{4}(j-m)(j+m)} \frac{(a\chi_+ + c\chi_-)^{j+m} (b\chi_+ + d\chi_-)^{j-m}}{\sqrt{[j-m]![j+m]!}}$$

Notese de nuevo que el resultado tradicional de la función generatriz ( $g_t(jm, \phi)$ ) se recupera en el  $q \rightarrow 1$

$$g_t(jm, \phi) = \frac{(\alpha\chi_+ + \gamma\chi_-)^{j+m} (\beta\chi_+ + \delta\chi_-)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} \quad (4.30)$$



Si se expresa la función generatriz rotada ( $g(jm, \phi)$ ) como una superposición de la no rotada ( $g(jm)$ ), y ésta a su vez en términos la base  $\chi_+$  y  $\chi_-$  se llega a:

$$g(jm, \phi) = \sum_{m'=-j}^j {}^q D_{m',m}^j(T) q^{\frac{1}{4}(j-m')(j+m')} \frac{\chi_+^{j+m'} \chi_-^{j-m'}}{\sqrt{[j-m']![j+m']!}} \quad (4.31)$$

En el caso de nuestro interés (3D o equivalentemente  $j = 1$ ) la función generatriz toma la forma:

$$g(1m, \phi) = q^{\frac{1}{4}(1-m)(1+m)} \frac{(a\chi_+ + c\chi_-)^{1+m} (b\chi_+ + d\chi_-)^{1-m}}{\sqrt{[1-m]![1+m]!}} \quad (4.32)$$

La anterior función daría cuenta de los elementos matriciales del operador rotación tridimensional en la base  $\chi_+$  y  $\chi_-$  como lo muestra la relación (4.31) para  $j = 1$ . Este hecho se puede mostrar (a manera de ejemplo), expandiendo (4.32) para  $m = 1$  y luego comparándolo con la relación (4.31) para las mismas condiciones como se muestra a continuación:

Partiendo de la expansión de (4.32) para  $m = 1$

$$\begin{aligned} g(11, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{[2]}} (a\chi_+ + c\chi_-)(a\chi_+ + c\chi_-) \\ &= \frac{1}{\sqrt{[2]}} (aa\chi_+\chi_+ + ac\chi_+\chi_- + ca\chi_-\chi_+ + cc\chi_-\chi_-) \end{aligned}$$

utilizando las relaciones de conmutación (4.19) y (4.2) en la relación anterior se concluye que:

$$\begin{aligned} g(11, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{[2]}} (aa\chi_+\chi_+ + (1+q)ac\chi_+\chi_- + cc\chi_-\chi_-) \\ &= a^2 \left( \frac{\chi_+\chi_+}{\sqrt{[2]}} \right) + \sqrt{[2]} q^{\frac{1}{4}} ac \left( q^{\frac{1}{4}} \chi_+\chi_- \right) + c^2 \left( \frac{\chi_-\chi_-}{\sqrt{[2]}} \right) \end{aligned}$$

que al compararlo con el desarrollo de (4.31) para  $j = m = 1$  se encuentra:

$$\begin{aligned} {}^q D_{1,1}^1 &= a^2 \\ {}^q D_{0,1}^1 &= \sqrt{[2]} q^{\frac{1}{4}} ac \\ {}^q D_{-1,1}^1 &= c^2 \end{aligned}$$

los cuales concuerdan con los resultados hallados por medio del producto de Wigner en (4.27).

Con el procedimiento expuesto en esta sección y en la anterior, se encontró la forma que tiene la representación matricial del operador rotación en tres dimensiones, pero aún no se han relacionados tales elementos con las cantidades que definen una rotación específica (eje y ángulo). Para esto se requiere examinar la acción directa del operador rotación en la base acoplada teniendo en cuenta la no conmutatividad del espacio tridimensional.

### 4.2.3. Acción del operador rotación en la base tridimensional a un vector con componentes $\chi_1$ , $\chi_0$ y $\chi_{-1}$ . (Rotaciones alrededor de $\vec{n} \perp \vec{k}$ ).

La representación matricial del operador rotación tridimensional en un espacio no conmutativo está dada por la representación  $j = 1$  del grupo  $SU_q(2)$  como se mostró en las dos secciones anteriores. Tal representación depende de los elementos matriciales de la representación fundamental del grupo (ec. (4.27)) y además por la suposición de un espacio no conmutativo para la base del grupo es induce la no conmutatividad de tales elementos.

El operador rotación tridimensional actúa obviamente en un espacio cuyos vectores tienen tres componentes. Tales componentes serán afectadas por la no conmutación de los elementos matriciales del operador (como fue mencionado anteriormente) implicando esto, que las componentes de tales vectores cumplan con ciertas relaciones de conmutación específicas, las cuales estén en acuerdo con la suposición original de la no conmutatividad del espacio (ec. (4.2)). Tales relaciones, son presentadas a continuación y cuya comprobación es presentada en el Apéndice B.

$$\chi_{-1}\chi_0 = q\chi_0\chi_{-1} \quad (4.33)$$

$$\chi_0\chi_1 = q\chi_1\chi_0 \quad (4.34)$$

$$[\chi_{-1}, \chi_1] = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})\chi_0\chi_0 \quad (4.35)$$

Las relaciones anteriores determinarán la conmutación de las componentes de un vector en el espacio tridimensional, lo cual será útil en la obtención de la acción del operador rotación a un vector escrito en la base  $\chi_1$ ,  $\chi_0$ ,  $\chi_{-1}$ .

EL operador rotación en terminos del vector ( $\vec{n}$ ) y ángulo ( $\phi$ ) de giro está escrito como:

$$U_{\phi, \vec{n}} = \exp(-i\phi(J \cdot \vec{n})) \quad (4.36)$$

Para nuestro propósito es preferible escribir a  $U_{\phi, \vec{n}}$  en terminos de  $J_+$ ,  $J_0$  y  $J_-$  los cuales están relacionados con las componentes cartesianas de la forma:

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad (4.37)$$

$$J_0 = J_z \quad (4.38)$$

$$J_- = J_x - iJ_y \quad (4.39)$$

Con esto el operador  $U_{\phi, \vec{n}}$  resulta ser:

$$U_{\phi, \vec{n}} = \exp\left(\frac{\phi}{2}(J_+(-n_y - in_x) - J_-(-n_y + in_x)) - i\phi J_0 n_z\right) \quad (4.40)$$

y si además se escribe las componentes de  $\vec{n}$  en coordenadas esféricas:

$$n_+ = \frac{i}{\sqrt{2}}(-n_y + in_x) \quad (4.41)$$

$$n_0 = n_z \quad (4.42)$$

$$n_- = \frac{i}{\sqrt{2}}(-n_y - in_x) \quad (4.43)$$

el operador rotación es:

$$U_{\phi, \vec{n}} = \exp \left( -i \frac{\phi}{\sqrt{2}} (J_+ n_- - J_- n_+) - i\phi J_0 n_0 \right) \quad (4.44)$$

Recordando la acción de los operadores creación y destrucción  $q$ -deformados en *ket*  $|jm\rangle$  (ec. 2.16):

$$J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{[j \mp m][j \pm m + 1]} |jm \pm 1\rangle$$

Se puede construir la representación matricial de tales operadores en el espacio deformado. Tal representación es escrita como:

$${}^q D^1(J_+) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{[2]} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{[2]} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$${}^q D^1(J_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{[2]} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{[2]} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Similarmente se encuentra la representación de  $J_0$  (recuerde que este operador es idéntico al caso no deformado como se muestra en (2.17)):

$${}^q D^1(J_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Tomando los resultados anteriores y reemplazándolos en el operador rotación (4.48) se obtiene que:

$${}^q D^1(U_{\phi, \vec{n}}) = \exp \left( -i \sqrt{\frac{[2]}{2}} \phi \begin{pmatrix} 0 & n_- & 0 \\ -n_+ & 0 & n_- \\ 0 & -n_+ & 0 \end{pmatrix} - i\phi \begin{pmatrix} n_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_0 \end{pmatrix} \right) \quad (4.48)$$

Con este resultado ahora se determinará la dependencia del elemento  $b^2$  con el ángulo de rotación y las componentes del vector eje de giro. Este caso particular es escogido porque corresponde al elemento matricial  ${}^q D^1_{1,-1}(T)$  el cual tiene contribución únicamente del acople entre dos spines  $\frac{1}{2}$  con proyecciones  $+\frac{1}{2}$  como se obtiene, por ejemplo de (4.31) para  $m = -1$ . La ventaja de esta elección es que no involucra combinaciones entre proyecciones de spin de diferente signo y por tanto el resultado no dependerá de como conmutan tales proyecciones.

Teniendo en cuenta que el resultado que se encuentre para  $b^2$  tiene que cumplir con la condición  $\lim_{q \rightarrow 1} b^2 = \beta^2$  y según el resultado anterior las únicas posibles dependencias de  $b$  (al igual que  $a$ ,  $c$  y  $d$ ) serán con los parámetros  $q$  y  $\phi$  y con las componentes del vector  $\vec{n}$ . Esto conlleva que las relaciones de conmutación que cumplen los elementos de  $T$  se induzcan en las componentes del vector  $\vec{n}$ <sup>9</sup> el cual al ser un vector de tres componentes

<sup>9</sup>Esta es la única posibilidad ya que  $q$  y  $\phi$  son parámetros y por tanto conmutan con cualquier operador.

éstas cumplirían con las relaciones (4.33), (4.34) y (4.35).

Como primer paso se explorará el valor de  $b^2$  para el caso en que  $n_0 = 0$ , ya que con esto se gana la conmutatividad en los elementos  $n_+$  y  $n_-$ . Entonces, notando a  $\phi_q = \sqrt{\frac{[2]}{2}}\phi$  y a  $W$  como la matriz en el argumento de la exponencial, se tiene de (4.48) que:

$${}^q D^1(U_{\phi, \vec{n} \perp n_0}) = \exp \left( -i\phi_q \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & n_- & 0 \\ -n_+ & 0 & n_- \\ 0 & -n_+ & 0 \end{pmatrix}}_W \right) \quad (4.49)$$

Para el desarrollo de la expresión anterior es útil utilizar la relación  $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$  como se muestra a continuación

$${}^q D^1(U_{\phi, \vec{n} \perp n_0}) = \cos(\phi_q W) - i \sin(\phi_q W) \quad (4.50)$$

Utilizando la expansión en series de potencias en la relación anterior, la matriz  ${}^q D^1(U_{\phi, \vec{n} \perp n_0})$  queda escrita como:

$${}^q D^1(U_{\phi, \vec{n} \perp n_0}) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \phi_q^{2n} W^{2n} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \phi_q^{2n+1} W^{2n+1} \quad (4.51)$$

Con el anterior resultado quedaría encontrar las expresiones para  $W^{2n}$  y  $W^{2n+1}$  y luego analizar la convergencia de las sumas.

El resultado para las potencias 1, 2 y 3 para  $W$  están dadas por:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & n_- & 0 \\ -n_+ & 0 & n_- \\ 0 & -n_- & 0 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} -n_- n_+ & 0 & n_- n_- \\ 0 & -n_+ n_- - n_- n_+ & 0 \\ n_+ n_+ & 0 & -n_+ n_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n_- n_- \\ 0 & 2 & 0 \\ 2n_+ n_+ & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$W^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2n_- & 0 \\ -2n_+ & 0 & 2n_- \\ 0 & -2n_- & 0 \end{pmatrix} = W \quad (4.54)$$

En estos resultados se tubo en cuenta la conmutatividad de las componentes  $n_+$  y  $n_-$  al igual que la condición  $|\vec{n}|^2 = 1$ .

Con los resultados anteriores se puede concluir que cualquier potencia impar de  $W$  es ella misma, es decir,  $W^{2n+1} = W$  y por tanto cualquier potencia par de  $W$  es igual a  $W^2$ , o equivalentemente  $W^{2n} = W^2$  <sup>10</sup>.

<sup>10</sup>Este resultado (potencias pares) es valido para  $n > 0$ . Si  $n = 0$  el resultado para  $W^{2n} = I$ , donde  $I$  representa la matriz identidad.

Con estos resultados ahora se puede evaluar la expresión (4.51) fácilmente como sigue:

$$\begin{aligned}
{}^q D^1(U_{\phi, \vec{n} \perp n_0}) &= I + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \phi_q^{2n} \right\} W^2 - i \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \phi_q^{2n+1} \right\} W \\
{}^q D^1(U_{\phi, \vec{n} \perp n_0}) &= I + \left\{ -1 + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \phi_q^{2n}}_{\cos(\phi_q)} \right\} W^2 - i \left\{ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \phi_q^{2n+1}}_{\sin(\phi_q)} \right\} W \\
{}^q D^1(U_{\phi, \vec{n} \perp n_0}) &= I + (-1 + \cos(\phi_q)) W^2 - i \sin(\phi_q) W \tag{4.55}
\end{aligned}$$

La relación anterior escrita explícitamente en forma matricial es:

$${}^q D^1(U_{\phi, \vec{n} \perp n_0}) = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\phi_q}{2}\right) & -i \sin(\phi_q) n_- & -2 \sin^2\left(\frac{\phi_q}{2}\right) n_-^2 \\ i \sin(\phi_q) n_+ & \cos(\phi_q) & -i \sin(\phi_q) n_- \\ -2 \sin^2\left(\frac{\phi_q}{2}\right) n_+^2 & i \sin(\phi_q) n_+ & \cos^2\left(\frac{\phi_q}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

Recuerde que la definición de  $\phi_q$  está dada por  $\phi_q = \sqrt{\frac{[2]}{2}} \phi$  y cumple con  $\phi_q \xrightarrow{q \rightarrow 1} \phi$ .

Si se compara el resultado anterior con la matriz (4.27) se tiene que los elementos  $a$ ,  $b$  y  $d$  estarán relacionados con los parámetros que caracterizan la rotación  $\phi$  y  $\vec{n}$  (donde este último cumple con la condición  $\vec{n} \perp n_0$ ), como se muestra a continuación:

$$a = \cos\left(\frac{\phi_q}{2}\right), \quad b = i\sqrt{2} \sin\left(\frac{\phi_q}{2}\right) n_- \quad \text{y} \quad d = \cos\left(\frac{\phi_q}{2}\right) \tag{4.57}$$

En el caso de  $c$  no se puede relacionar directamente el resultado obtenido con el resultado en (4.27) debido a que este elemento debería ser el elemento conjugado de  $b$  acompañado de un factor  $-q^{\frac{1}{2}}$ . Lo anterior es debido a la manera de obtener el resultado (4.56), ya que este no tiene en cuenta explícitamente los acoplos entre spin  $\frac{1}{2}$  en un espacio deformado para formar el estado  $|jm\rangle$ .

Con los resultados (4.57) ahora se puede analizar cómo se ven afectadas las rotaciones en un espacio deformado si se rota alrededor de un eje en el plano  $XY$ . Más adelante se discutirá las implicaciones que trae la escogencia  $n_z \neq 0$ .

#### 4.2.4. Relación de $q$ con el ángulo de rotación $\phi$ para rotaciones con $\vec{n} \perp \vec{k}$

El operador rotación tiene la característica de dejar invariante la norma del vector a operar. Esta propiedad se ve reflejada en condición de especialidad del operador, es decir, la representación matricial del operador debe satisfacer la condición  $\det(R) = 1$  ( $R$  denota la representación matricial del operador rotación) o en el caso de que el operador sea construido en un espacio no conmutativo este satisface la condición análoga  $\det_q({}^q R) = 1$ .

Es oportuno imponer la condición de especialidad mencionada anteriormente al operador rotación. Para ésto primero se definirá el  $q$ -determinante de una matriz  $M$  de dimensiones  $n \times n$  como:

$$\det_q(M_{n \times n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1)}^1 m_{\sigma(2)}^2 \cdots m_{\sigma(n)}^n \quad (4.58)$$

donde  $M$  y  $\epsilon(\sigma)$  son:

$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_1^2 & \cdots & m_1^n \\ m_2^1 & m_2^2 & \cdots & m_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n^1 & m_n^2 & \cdots & m_n^n \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{i < j, \sigma(j) < \sigma(k)} \left(-q^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(-q^{-\frac{1}{2}}\right)^{l(\sigma)} \quad (4.60)$$

y  $l(\sigma)$  es la longitud de  $\sigma$ .

Como siempre, del caso anterior se obtiene el resultado tradicional cuando  $q \rightarrow 1$ , recuperando a  $\epsilon$  como el tensor de Levi-Civita de orden  $n$ .

El anterior resultado para el  $q$ -determinante tiene la forma explicita para una matriz  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned} \det_q({}^q M_{3 \times 3}) &= \underbrace{\epsilon(\sigma_1, 1, 1)}_{=0} m_{\sigma_1}^1 m_1^2 m_1^3 + \underbrace{\epsilon(3, 1, 2)}_{=(-q^{-\frac{1}{2}})^2} m_3^1 m_1^2 m_2^3 + \underbrace{\epsilon(2, 1, 3)}_{=(-q^{-\frac{1}{2}})^1} m_2^1 m_1^2 m_3^3 \\ &+ \underbrace{\epsilon(3, 2, 1)}_{=(-q^{-\frac{1}{2}})^1} m_3^1 m_2^2 m_1^3 + \underbrace{\epsilon(\sigma_1, 2, 2)}_{=0} m_{\sigma_1}^1 m_2^2 m_2^3 + \underbrace{\epsilon(1, 2, 3)}_{=(-q^{-\frac{1}{2}})^0} m_1^1 m_2^2 m_3^3 \\ &+ \underbrace{\epsilon(2, 3, 1)}_{=(-q^{-\frac{1}{2}})^2} m_2^1 m_3^2 m_1^3 + \underbrace{\epsilon(1, 3, 2)}_{=(-q^{-\frac{1}{2}})^1} m_1^1 m_3^2 m_2^3 + \underbrace{\epsilon(\sigma_1, 3, 3)}_{=0} m_{\sigma_1}^1 m_3^2 m_3^3 \end{aligned}$$

Regresando al caso de nuestro interés, en el cual tenemos una matriz tridimensional (4.27) que al representar rotaciones en un espacio deformado deberá cumplir con la condición de especialidad se tiene del resultado anterior que:

$$\begin{aligned} \det_q({}^q D^1(T)) &= q^{-1} m_3^1 m_1^2 m_2^3 - q^{-\frac{1}{2}} m_2^1 m_1^2 m_3^3 - q^{-\frac{1}{2}} m_3^1 m_2^2 m_1^3 \\ &+ m_1^1 m_2^2 m_3^3 + q^{-1} m_2^1 m_3^2 m_1^3 - q^{-\frac{1}{2}} m_1^1 m_3^2 m_2^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Si se reemplaza las  $m$ s de la relación anterior por los elementos correspondientes en (4.27) se concluye que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  deben satisfacer:

$$\begin{aligned} q^{-1} q^{\frac{1}{2}} [2] c^2 a b^2 d - q^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} [2] a c a b d^2 - q^{-\frac{1}{2}} c^2 (a d + q^{\frac{1}{2}} b c) b^2 \\ + a^2 (a d + q^{\frac{1}{2}} b c) d^2 + q^{-1} q^{\frac{1}{2}} [2] a c^2 d b^2 - q^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} [2] a^2 c d b d = 1 \end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$q^{-\frac{1}{2}}[2]c^2ab^2d - [2]acabd^2 - q^{-\frac{1}{2}}c^2(ad + q^{\frac{1}{2}}bc)b^2 + a^2(ad + q^{\frac{1}{2}}bc)d^2 + q^{-\frac{1}{2}}[2]ac^2db^2 - [2]a^2cddb = 1 \quad (4.61)$$

El resultado anterior es valido para cualquier rotación, ya que no se han impuesto condiciones para eje de giro ni el ángulo para su obtención.

La dificultad que se presenta ahora en la aplicación del resultado (4.61) se basa en su dependencia con elementos no conmutativos<sup>11</sup> y por tanto no se puede factorizar en la forma tradicional. Por tanto es aconsejable que este resultado se reescriba en términos de elementos conmutantes antes de operar directamente en él.

Utilizando las relaciones de conmutación de los elementos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , y definiendo a  $\mathcal{X} = ad$  y  $\mathcal{Y} = bc$  se puede demostrar que  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  satisfacen:

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = 0 \quad (4.62)$$

además, recordando que el  $q$ -determinante de la representación fundamental  $T$  de  $SU_q(2)$  es la unidad se tiene que este resultado en terminos de  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  es:

$$\det_q(T) = \mathcal{X} - q^{-\frac{1}{2}}\mathcal{Y} = 1 \quad (4.63)$$

Con estos dos resultados para  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  presentes y desarrollando apropiadamente (4.61) se obtiene que se debe satisfacer la relación (4.64) para tener la condición de especialidad en el operador rotación<sup>12</sup>.

$$(q^{-\frac{5}{2}} + 2q^{-\frac{3}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} - 2q^{-1} - 2q^{-2})\mathcal{X}^2\mathcal{Y} + (-2q^{-\frac{7}{2}} + 2q^{-\frac{3}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} + q^{-4})\mathcal{X}\mathcal{Y}^2 + (-q^{-\frac{3}{2}} - 1)\mathcal{Y}^2 = 0 \quad (4.64)$$

Al utilizar de nuevo el resultado (4.63) en (4.64) y considerando  $q^{\frac{1}{2}} \neq 1$  (que es justamente el caso de nuestro interés) se obtiene una dependencia únicamente en  $\mathcal{Y}$  como se muestra en (4.65).

$$q^{-\frac{5}{2}}(-1 + q^{\frac{1}{2}})(1 + q)\mathcal{Y} - q^{-4}(-1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}})(-1 - q + q^{\frac{3}{2}})\mathcal{Y}^2 - q^{-\frac{9}{2}}(1 + q)(-1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}})(-1 + q + q^{\frac{3}{2}})\mathcal{Y}^3 = 0 \quad (4.65)$$

Ahora se puede relacionar el parámetro  $q$  con el producto  $bb^*$  utilizando la definición de  $\mathcal{Y}$  esto es:

$$q(-1 + q^{\frac{1}{2}})(1 + q)(bb^*) - (-1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}})(-1 - q + q^{\frac{3}{2}})(bb^*)^2 - (1 + q)(-1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}})(-1 + q + q^{\frac{3}{2}})(bb^*)^3 = 0 \quad (4.66)$$

<sup>11</sup>Recuerde que los elementos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  están relacionados como se muestra en (4.18) y satisfacen el álgebra (4.19).

<sup>12</sup>El procedimiento para encontrar el resultado (4.64) no se presenta en el escrito debido su extensión. Observe que en límite  $q \rightarrow 1$  la igualdad (4.64) se satisface sin importar el valor de  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$ .

Como es claro en la relación anterior el producto  $bb^*$  tiene tres posibles valores que satisfacen el resultado, a los cuales se denotarán como  $(bb^*)_0$ ,  $(bb^*)_1$  y  $(bb^*)_2$ . Notese que uno de estos tres valores es evidentemente 0 y se le asignará la solución  $(bb^*)_0$ .

Los valores de  $(bb^*)_1$  y  $(bb^*)_2$  se pueden obtener al suponer que  $bb^* \neq 0$  y resolviendo la ecuación cuadrática resultante de (4.66) dando como resultado los valores:

$$(bb^*)_1 = \frac{1 + q - q^{\frac{3}{2}}}{2(1 + q)(-1 + q + q^{\frac{3}{2}})} + \sqrt{\left(\frac{1 + q - q^{\frac{3}{2}}}{2(1 + q)(-1 + q + q^{\frac{3}{2}})}\right)^2 + \frac{q(-1 + q^{\frac{1}{2}})}{(-1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}})(-1 + q + q^{\frac{3}{2}})}} \quad (4.67)$$

$$(bb^*)_2 = \frac{1 + q - q^{\frac{3}{2}}}{2(1 + q)(-1 + q + q^{\frac{3}{2}})} - \sqrt{\left(\frac{1 + q - q^{\frac{3}{2}}}{2(1 + q)(-1 + q + q^{\frac{3}{2}})}\right)^2 + \frac{q(-1 + q^{\frac{1}{2}})}{(-1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}})(-1 + q + q^{\frac{3}{2}})}} \quad (4.68)$$

Con los resultados anteriores para  $bb^*$  (los cuales son generales) se puede encontrar la dependencia de la simetría como función de  $q$  siempre que se conozca el valor explícito de  $b$  como es el caso de rotaciones con  $\vec{n} \perp \vec{k}$  (ec. (4.57)).

En el caso de rotaciones perpendiculares al eje  $Z$  se tiene que el producto  $bb^*$  no depende en las coordenadas  $n_-$  y  $n_+$  debido a la conmutatividad de estas componentes cuando  $n_0 = 0$  y a la condición de vector unitario para  $\vec{n}$ . Por tanto la dependencia de  $bb^*$  es únicamente con los parámetros  $q$  y  $\phi$  como se muestra a continuación:

$$bb^* = \sin^2\left(\frac{\phi q}{2}\right) = \sin^2\left(\sqrt{\frac{[2]}{2}} \frac{\phi}{2}\right) \quad (4.69)$$

Para este caso la relación entre  $\phi$  y  $q$  está mediada por tres relaciones:

$$\sin^2\left(\sqrt{\frac{[2]}{2}} \frac{\phi}{2}\right) = (bb^*)_0, \quad \sin^2\left(\sqrt{\frac{[2]}{2}} \frac{\phi}{2}\right) = (bb^*)_1 \quad \text{y} \quad \sin^2\left(\sqrt{\frac{[2]}{2}} \frac{\phi}{2}\right) = (bb^*)_2$$

Por razones tal vez obvias se denotará a  $\phi$  para los correspondientes valores  $(bb^*)_0$ ,  $(bb^*)_1$  y  $(bb^*)_2$  como  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respectivamente. Con esto se puede obtener de las relaciones anteriores que al escribir cada  $\phi_l$  en términos de  $bb_l^*$  (relación (4.70)), para cada valor de  $q$  se encontrará dos posibles valores de  $\phi_l$  (negativo y positivo), lo cual no es contradictorio ya que al relacionar la geometría de un sistema con el parámetro  $q$  se tendrá que éste valor dará cuenta tanto de la operación que caracteriza a tal simetría como de su operación



inversa, por ejemplo rotaciones un ángulo  $\phi$  y rotaciones un ángulo  $-\phi$ . Por esta razón solo se discutirá las raíces positivas de la expresión (4.70).

$$\phi_l = \pm 2 \sqrt{\frac{2}{[2]}} \arcsin \left( \sqrt{(bb^*)_l} \right) \quad (4.70)$$

En este cálculo sería muy útil tener  $q$  en función de  $\phi_l$ , para evaluar directamente la simetría de interés y obtener el valor de  $q$  correspondiente, pero como se puede observar en los resultados para  $(bb^*)_l$  no se puede despejar  $q$  de allí. Por tanto la obtención del valor de  $q$  para cada ángulo se hará por medio gráfico como se muestra a continuación, pero antes se definirá de una manera más adecuada al ángulo.

Como el interés del trabajo es relacionar la geometría de un sistema con el parámetro  $q$  (en especial simetría de rotación), es razonable definir a  $\phi$  como:

$$\phi = \frac{2\pi}{m} \quad (4.71)$$

Donde  $m \in \mathbb{R}$ . Esto nos permite identificar más fácilmente los valores de  $q$  con la simetría, debido a que esta relación se da cuando los valores de  $m$  sean números enteros.

Con la definición de  $m$  (4.71) ahora se examinará los casos que relacionan a  $q$  con la simetría (ec. (4.70)).

En el primer caso ( $l = 0$ ) se tiene una relación “sencilla” para el ángulo (o mejor para  $m_0$ ) dada por:

$$m_0 = \frac{\sqrt{[2]/2}}{k} = \frac{\sqrt{(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})/2}}{k} \quad (4.72)$$

donde  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Observe que a medida que el valor de  $k$  aumenta en magnitud los valores de  $m_0$  disminuyen en la misma proporción.

Tomando a  $q = e^\tau$  y  $k = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$  se tiene una relación entre  $\tau$  y  $m_0$  como se muestra en la figura 4.1.

En esta figura se puede observar que para valores pequeños de  $\tau$  ( $\lesssim 0,1$ )<sup>13</sup> no se encuentra valores de  $m$  enteros (omitiendo  $m = 1$  en el caso ( $k = 0$ ) el cual corresponde a  $\tau = 0$  y por tanto a  $q = 1$ ). Para valores de  $m$  iguales a 2, 3 y 4 se encuentra (tomando  $k = 1$ ) que  $\tau$  es aproximadamente  $\pm 4$ ,  $\pm 6$  y  $\pm 7$  respectivamente siendo éste un crecimiento monótono. Este resultado se hace más notorio a medida que  $|k|$  aumenta, es decir, los valores de  $\tau$  que representan alguna geometría serán mayores para un  $|k| > 1$  que los correspondientes para  $k = 1$ .

Los valores anteriores de  $\tau$  no son “buenos resultados” en el sentido que aunque estos se

<sup>13</sup>Valores pequeños de  $\tau$  ( $\approx 0$ ) implican valores de  $q$  cercanos a 1. Esto se puede ver expandiendo  $q(\tau)$  en series y tomando valores menores a 1 para  $|\tau|$ . Por ejemplo si se toma a  $\tau = \pm \frac{1}{10}$  se tiene que  $q(\pm \frac{1}{10}) = 1 \pm \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \frac{1}{100} \pm \frac{1}{6} \frac{1}{1000} + \frac{1}{24} \frac{1}{10000} \pm \dots \approx \left\{ \begin{array}{l} 1,105 \\ 0,905 \end{array} \right\}$ .

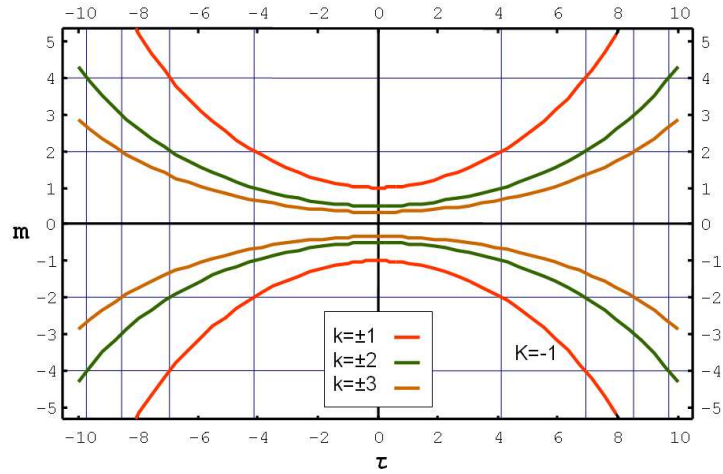


Figura 4.1: Caso  $m_0$ . Posible relación entre el parámetro  $q$  de deformación del álgebra (o equivalentemente  $\tau$ ) con la simetría de rotación de un sistema.

relacionan con la geometría del sistema no describirán el comportamiento energético, por ejemplo, en bandas nucleares debido al aumento exponencial en la diferencia de energía de dos niveles consecutivos predicho para tales valores. Lo anterior se discutirá al final de esta sección.

Debido a que  $m$  está relacionado con el ángulo de rotación (ec. (4.71)) y este es un parámetro real, se tiene que los posibles valores de  $m$  son también reales. Este hecho hay que tenerlo en cuenta en la obtención de los valores de  $\tau$  relacionados con  $m_1$  y  $m_2$  ya que para éstos se encuentran valores en general complejos.

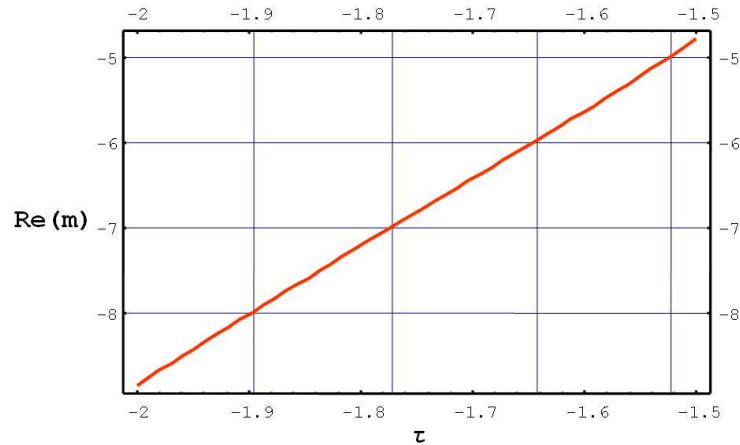


Figura 4.2: Parte real de  $m_1$ . Posible relación entre el parámetro  $q$  de deformación del álgebra (o equivalentemente  $\tau$ ) con la simetría de rotación de un sistema. Se muestra el rango de valores para  $\tau$  que cumple con la condición  $\text{Im}(m_1) = 0$ .

En la figura 4.2 se muestra los resultados para  $m_1$  en los cuales se ha tenido en cuenta que la condición  $\text{Im}(m_1) = 0$ . Como se puede observa en la figura, se encuentran valores correspondientes a simetrías rotación alrededor de un eje en el plano  $XY$  para ángulos de  $\frac{2\pi}{5}$ ,  $\frac{2\pi}{6}$ ,  $\frac{2\pi}{7}$  y  $\frac{2\pi}{8}$  a los cuales les corresponden valores de  $\tau$  en el rango  $[-1,9; -1,52]$  lo cual (como se menciono antes) no es ventajoso para la descripción energético de un sistema nuclear.

El último caso obtenido para valores de  $q$  reales es  $m_2$  el cual es mostrado en la figura 4.3. Allí se muestra de nuevo valores de  $\tau$  en el rango  $[0,1; 0,9]$  para simetrías de rotación en  $\frac{2\pi}{7}$ ,  $\frac{2\pi}{8}$  y  $\frac{2\pi}{9}$ , repitiéndose estas simetrías en valores de  $\tau$  entre 1.2 y 2.1. También son obtenidos resultados para simetrías más altas las cuales no son mostradas en la figura debido a que son obtenidas para valores de  $\tau$  superiores a 2.2 y como se dicute a continuación no serán de nuestro interés.

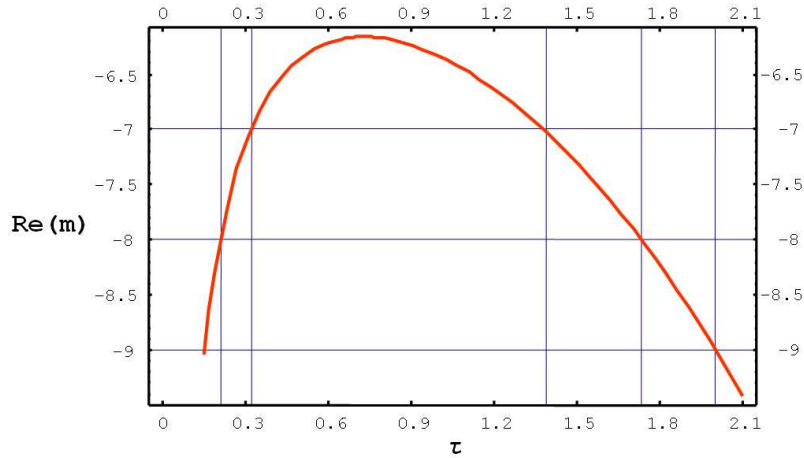


Figura 4.3: Parte real de  $m_2$ . Posible relación entre el parámetro  $q$  de deformación del álgebra (o equivalentemente  $\tau$ ) con la simetría de rotación de un sistema. Se muestra el rango de valores para  $\tau$  que cumple con la condición  $\text{Im}(m_2) = 0$ .

El hecho de encontrar que  $\tau$  sea mayor a 1 para que represente simetrías de rotación (recordando que se está interesado en simetrías de no mayores a  $C_5$ ) hace, por ejemplo, que sistemas que roten en alrededor de estos ejes tengan espectros cuya diferencia entre niveles podría ser mucho mayor (ordenes de magnitud) que las esperadas para un rotor ideal. Por ejemplo, si se considera el valor mínimo de  $\tau$  encontrado anteriormente para simetrías menores que  $C_6$  ( $\tau_{min} \approx -1,22$ ), se tiene que la diferencia de energía entre dos niveles consecutivos del rotor  $q$ -deformado comparada con el no deformado es (considerando el mismo momento de inercia para ambos):

$$\frac{E_{q=\exp(\tau_{min})}(j) - E_{q=\exp(\tau_{min})}(j-2)}{E(j) - E(j-2)} = \frac{\frac{\hbar^2}{2I} \{ [j][j+1] - [j-2][j-3] \}}{\frac{\hbar^2}{2I} \{ j(j+1) - (j-2)(j-3) \}} \geq 1,8 \quad \forall j \quad (4.73)$$

Para dar una idea más amplia de la dependencia de la energía de un rotor  $q$ -deformado en comparación con el no deformado se presenta en la tabla 4.1 el valor mínimo para la razón entre las diferencias de energía entre dos niveles consecutivos de los dos modelos. Es por

$\tau$	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	3	5
$q^{\frac{1}{2}}$	1	1.05	1.11	1.16	1.28	1,65	2,72	4,48	12,2
$\frac{\Delta E_q(j)}{\Delta E(j)} \geq$	1	1.005	1.02	1.04	1.12	1,54	4,38	16.6	305

Tabla 4.1: Razón mínima entre la diferencia de energías del rotor  $q$ -deformado y el rotor tradicional. La diferencia se toma entre dos niveles consecutivos.

ésto que la descripción de espectros nucleares (bandas) se esperarían valores menores a 1 (se han reportado valores alrededor de 0.006 en la literatura según la escogencia  $q = e^{\frac{\tau}{2}}$ ).

Resumiendo los resultados encontrados se tiene que: la relación entre el parámetro de deformación del álgebra se encuentra relacionado con la simetría rotacional de sistema de tal forma que considerando rotaciones finitas ( $C_m$ ) alrededor de un eje en el plano  $XY$ , ACqD describiría estados energéticos altamente excitados del sistema comparado con los esperados para un rotor cuántico ideal. Por tanto, un rotor cuántico sometido a perturbaciones no sería descrito por rotaciones en los ejes mencionados anteriormente en un espacio no conmutativo.

La pregunta que surge ahora es ¿que ocurre si se considera rotaciones alrededor de ejes de simetría  $C_m$  con componente  $n_z \neq 0$ ? En la siguiente sección se discute este interrogante.

#### 4.2.5. Relación de $q$ con el ángulo de rotación $\phi$ para rotaciones en cualquier eje $\vec{n}$

Como se observó en la sección anterior los resultados encontrados para el elemento  $b$  dependían en como conmutaban las componentes del vector eje de giro, que en el caso  $n_z = 0$  se podía encontrar una solución cerrada para éste.

La imposibilidad de encontrar una expresión en suma para el elemento  $a$  o  $b$  en la expansión del operador rotación en el caso  $n_z \neq 0$  limita el posible análisis del parámetro  $q$  con la geometría de un sistema. Sin embargo se puede encontrar aproximaciones para  $a$  y  $b$  si se considera ejes de rotación muy cercanos al eje  $Z$  incluyendo la condición que una de sus componentes  $n_x$  o  $n_y$  sea nula. Si se hace así se puede suponer que elementos de orden  $(1 - n_z^2)^4$  o superiores son despreciables con respecto a  $(1 - n_z^2)^2$ .

Tal aproximación no es presentada en este escrito debido a que aún obteniendo el elemento  $m$ -ésimo de la suma no se sabe su convergencia. Además como se verá en el capítulo siguiente está exploración no será crucial en la descripción del espectro de la banda base del núcleo  $^{48}\text{Cr}$ .

## Capítulo 5

# Ajuste de los parámetros del modelo ACqD a los niveles energéticos del $^{48}\text{Cr}$ y discusión de resultados

En el capítulo 3 se mostró por tres diferentes criterios que la banda del estado base (y por tanto la yrast) del núcleo  $^{48}\text{Cr}$  no es de carácter rotacional, sino que tiene contribuciones quizás de tipo vibracional, que hacen que el carácter sea de tipo transicional. En este capítulo se mostrará como ACqD describe un espectro experimental (banda del estado base  $^{48}\text{Cr}$ ) por medio de ajuste de parámetros, donde los valores del ajuste dependerán de la escogencia del parámetro de deformación del álgebra y si a ésta hay necesidad de generalizarla o no.

Como primer intento se escogerá a  $q$  real ( $q = e^\tau$ ) de tal forma que si el ajuste del parámetro es tal que su valor se puede relacionar con una geometría específica se tendría una relación entre el modelo  $q$ -deformado y el modelo de partícula alfa.

Un segundo intento se discutirá para el caso generalizado de ACqD manteniendo el parámetro  $q$  real. En este caso se podría encontrar la relación tanto con la geometría como con el carácter energético del la banda del estado base del sistema.

Finalizando se discutirá los resultados de ajustes si se toma al parámetro de deformación complejo ( $q = e^{i\tau}$ ). Esto se hace con el fin de comparar los resultados obtenidos con los reportados en la literatura<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>En este caso la relación entre el parámetro de deformación con la geometría del sistema no es aplicable a los resultados encontrados para  $q$  real debido a la construcción de la representación fundamental de  $SU_q(2)$ .

### 5.1. Ajuste con ACqD: $q$ real ( $q = e^\tau$ )

La expresión energética para los niveles de un rotor  $q$ -deformado se discutieron en el capítulo 2 <sup>2</sup>. Esta expresión tiene la forma explícita mostrada en 2.21 para valores de  $q$  real

$$E_q(j) = \frac{\hbar^2}{2I} \frac{\sinh\left(\frac{\tau}{2}j\right) \sinh\left(\frac{\tau}{2}(j+1)\right)}{\sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}$$

Ahora, ajustando los valores de momento de inercia <sup>3</sup> y parámetro de deformación del álgebra ( $\tau$ ) a los niveles de la banda base del  $^{48}\text{Cr}$  se obtiene la figura 5.1.

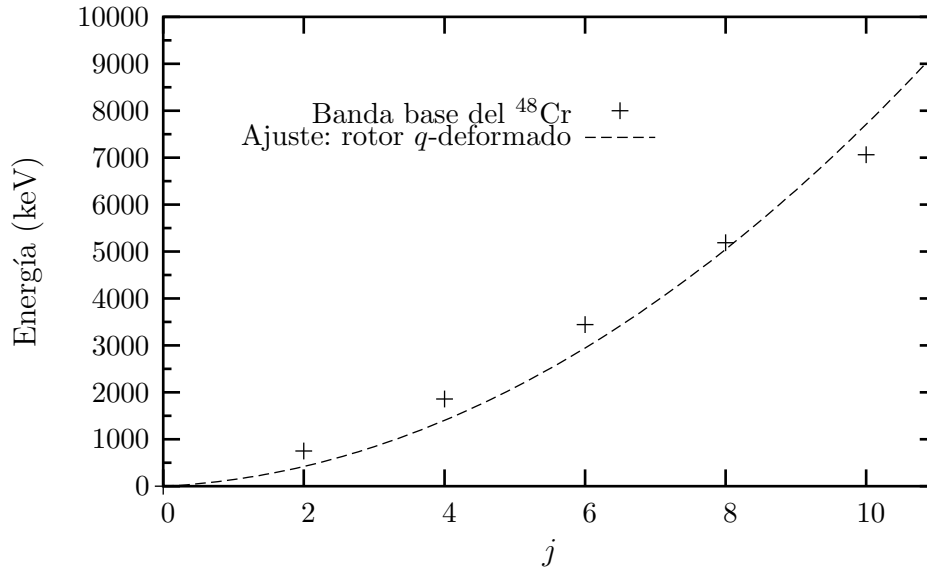


Figura 5.1: Ajuste de parámetros del modelo de rotor  $q$ -deformado a los niveles experimentales de la banda base del  $^{48}\text{Cr}$ , con una escogencia para  $q$  real.

Los resultados del ajuste anterior para el momento de inercia es  $\frac{\hbar^2}{2I} = 70(13)\text{MeV}$  y para el parámetro de deformación  $\tau = 6 \times 10^{-5}$  con error del 204 %.

Los resultados anteriores no describen adecuadamente la energía de los niveles de la banda del estado base del  $^{48}\text{Cr}$  debido a que el aumento de la diferencia entre de energías consecutivas es menor que un aumento lineal en  $j$ , esto es en otras palabras, la escogencia del parámetro  $q$  como un número real mantiene como mínimo un aumento cuadrático en la energía y por tanto no describirá espectros que crezcan más lentamente que  $E(j) \propto j^2$ .

<sup>2</sup>Recuerde que según la construcción del álgebra deformada en este escrito en la relación 2.20 hay que hacer el cambio  $q \rightarrow q^{\frac{1}{2}}$ .

<sup>3</sup>Por razones de precisión en el método de ajuste se entenderá por momento de inercia a la razón  $\frac{\hbar^2}{2I}$  la cual será el parámetro a ajustar.

## 5.2. Ajuste con ACqD generalizadas: $q$ real ( $q = e^\tau$ )

Una manera de describir sistemas perturbados más general que el utilizado en la sección anterior es utilizando una generalización para la energía de un rotor  $q$ -deformado. Esta generalización consta de la introducción de un parámetro  $\tilde{c}$  en la energía como se muestra en la siguiente relación:

$$E_q(j) = \frac{\hbar^2}{2I}[j][j + \tilde{c}]^4$$

En el caso de una escogencia  $q \in \mathbb{R}$  la relación anterior aún mantiene un mínimo incremento en la energía del sistema de carácter cuadrático en  $j$ , por tanto aún generalizando ACqD para tal escogencia de  $q$  no se esperaría un resultado positivo en la descripción del espectro energético del  $^{48}\text{Cr}$  en su banda base. Esto se puede observar en la figura 5.2 la cual un valor de  $\tilde{c} = 1,1$  y valores para  $\tau$  y el momento de inercia similares al los reportados en la sección anterior.

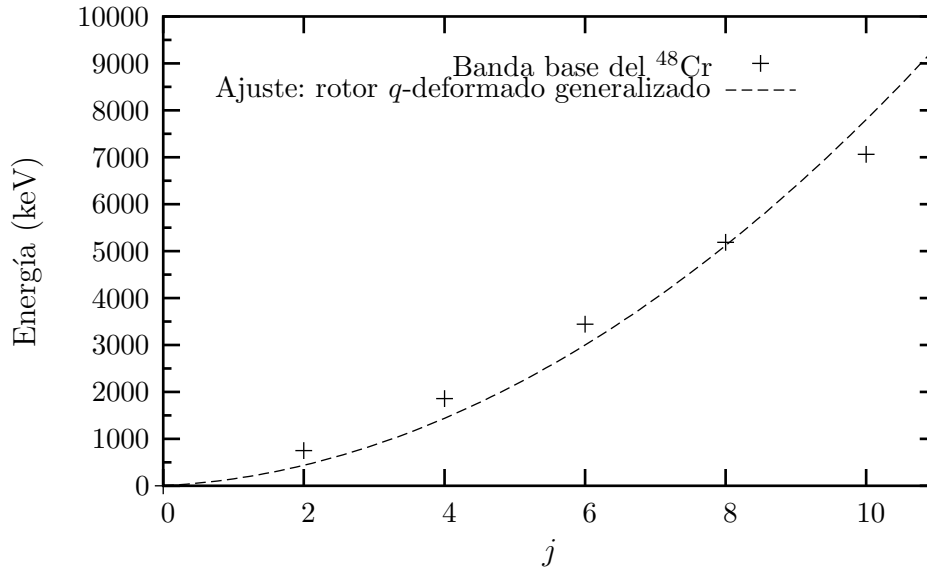


Figura 5.2: Ajuste de parámetros del modelo de rotor  $q$ -deformado generalizado a los niveles experimentales de la banda base del  $^{48}\text{Cr}$ , con una escogencia para  $q$  real.

En resumen, la generalización en la energía del rotor  $q$ -deformado por medio de la introducción de un parámetro  $\tilde{c}$ , no posibilita dar explicación a sistemas mecánico cuánticos cuyos niveles de energía aumenten con menor rapidez en  $j$  a como lo hace un rotor cuántico no deformado.

Con lo mencionado anteriormente se tiene que la relación entre la geometría del sistema con el valor de  $q$  no se puede encontrar en el caso específico del  $^{48}\text{Cr}$  para un valor real de  $q$ , por tanto la posibilidad de relacionar la geometría del sistema con tal parámetro es

<sup>4</sup>Note que en los límites  $c \rightarrow 1$  y  $q \rightarrow 1$  se recupera la energía del cuántico tradicional.

(posiblemente) por medio de elección de  $q$  como un valor complejo de tipo  $e^{i\tau}$  como se discute en las dos siguientes secciones.

### 5.3. Ajuste con ACqD: $q$ complejo ( $q = e^{i\tau}$ )

La escogencia para  $q$  como un número complejo permite que la descripción de sistemas cuánticos con un incremento en la separación de energía entre dos niveles consecutivos de menor rapidez que dependencia lineal en  $j$ .

Aunque se gane esta posibilidad para la descripción del sistema  $^{48}\text{Cr}$ , se gana también un punto en contra en la interpretación geométrica del sistema según el valor de  $\tau$ . Esto se da por la manera de encontrar la representación fundamental de  $SU_q(2)$  en la cual el procedimiento utilizado al exigir la condición de unitariedad es válido para valores de  $q$  reales. Este hecho se propaga a los elementos de la matriz representación fundamental ( ${}^q D^{\frac{1}{2}}(T)$ ) dando una conexión entre los elementos  $c = {}^q D^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(T)$  y  $b = {}^q D^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(T)$  por conjugación como se mostró en (4.17).

La relación entre  $c$  y  $b$  se utilizó en la obtención de la relación entre el parámetro de deformación y la simetría del sistema (condición  $\det_q({}^q D^1(T)) = 1$ ), por tanto, los valores encontrados en el capítulo 4 no son aplicables para descripciones geométricas si  $q \in \mathbb{C}$ .

Independiente de si  $q$  es real o complejo se tiene que la energía de un rotor  $q$ -deformado está dada según (2.20), que en caso en el caso  $q \in \mathbb{C}$  es (ec. (2.22)):

$$E_q(j) = \frac{\hbar^2 \sin\left(\frac{\tau}{2}j\right) \sin\left(\frac{\tau}{2}(j+1)\right)}{2I \sin^2(\tau/2)}$$

La cual al ser ajusta a los datos experimentales de la banda del estado base del  $^{48}\text{Cr}$  se obtiene la figura 5.3 mostrando ésta una mejor concordancia con respecto a lo encontrado para  $q$  real, aunque aún sigue sin describir el estado  $j = 2$  y por tanto su carácter transicional en este nivel. Esta desventaja es superada al generalizar ACqD de la misma forma como se hizo en la sección anterior. Esto se muestra en la siguiente sección.

Los resultados del ajuste para  $\tau$  y el momento de inercia (mostrados en la tabla 5.1) tienen ahora menor error con respecto al caso  $q$  real y como es de esperar el valor de  $\tau$  es menor a 1 interpretando esto para el núcleo  $^{48}\text{Cr}$  como un sistema rotante sometido a perturbaciones o como un sistema en el cual se expresa la no conmutatividad de la coordenadas siendo un rotor en tal espacio coordinado  $q$ -deformado.

$\tau$	$\sigma(\tau)$	$\frac{\hbar^2}{2I}$ (MeV)	$\sigma\left(\frac{\hbar^2}{2I}\right)$ (MeV)
0.21	0.01	95	4

Tabla 5.1: Resultados del ajuste de la banda del estado base del  $^{48}\text{Cr}$  según ACqD siendo  $q$  complejo.



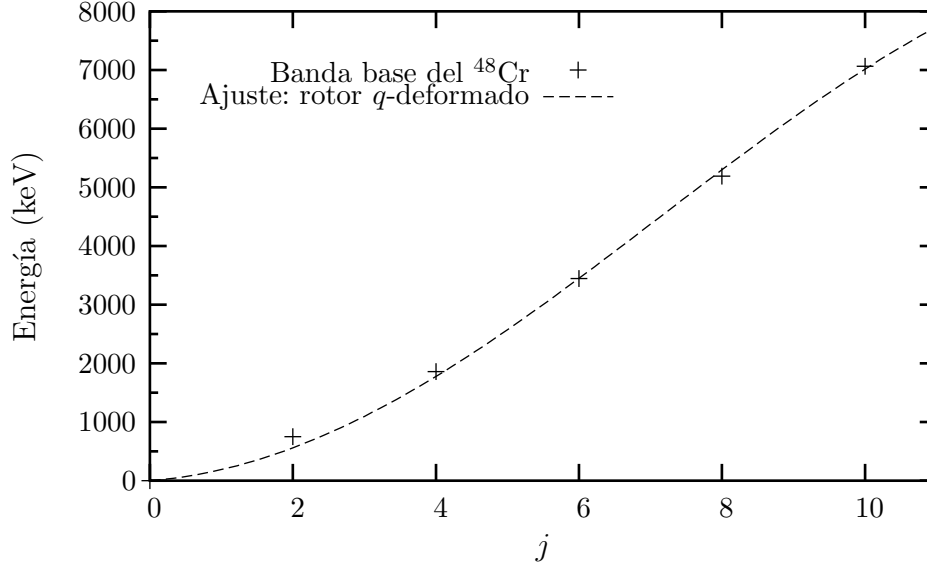


Figura 5.3: Ajuste de parámetros del modelo de rotor  $q$ -deformado a los niveles experimentales de la banda base del  $^{48}\text{Cr}$ , con una escogencia para  $q$  complejo.

#### 5.4. Ajuste con ACqD generalizadas: $q$ complejo ( $q = e^{i\tau}$ )

La última consideración para el ajuste de la banda base del  $^{48}\text{Cr}$  es la generalización de ACqD (introduciendo el parámetro  $\tilde{c}$ ) y la escogencia de  $q \in \mathbb{C}$ . Con tal asunciones el valor esperado de energía para el rotor  $q$ -deformado es:

$$E_q(j) = \frac{\hbar^2 \sin\left(\frac{\tau}{2}j\right) \sin\left(\frac{\tau}{2}(j+c)\right)}{2I \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}$$

Ajustado la relación anterior a los datos experimentales del  $^{48}\text{Cr}$  (banda del estado base) se obtiene un ajuste muy bueno (Figura 5.4) con el cual son explicados todos los niveles (los resultados del ajuste sin mostrados en la tabla 5.2). Además el valor hallado para el parámetro  $\tilde{c}$  clasifica al núcleo como un sistema transicional<sup>5</sup> razón por la cual el valor energético para  $j = 2$  es predicho ahora.

$\tau$	$\sigma(\tau)$	$\frac{\hbar^2}{2I}$ (MeV)	$\sigma\left(\frac{\hbar^2}{2I}\right)$ (MeV)	$\tilde{c}$	$\sigma(\tilde{c})$
0.14	0.01	65	4	3.7	0.5

Tabla 5.2: Resultados del ajuste de la banda del estado base del  $^{48}\text{Cr}$  según ACqD generalizadas siendo  $q$  complejo.

<sup>5</sup>Como ha sido mostrado para otros núcleos en .

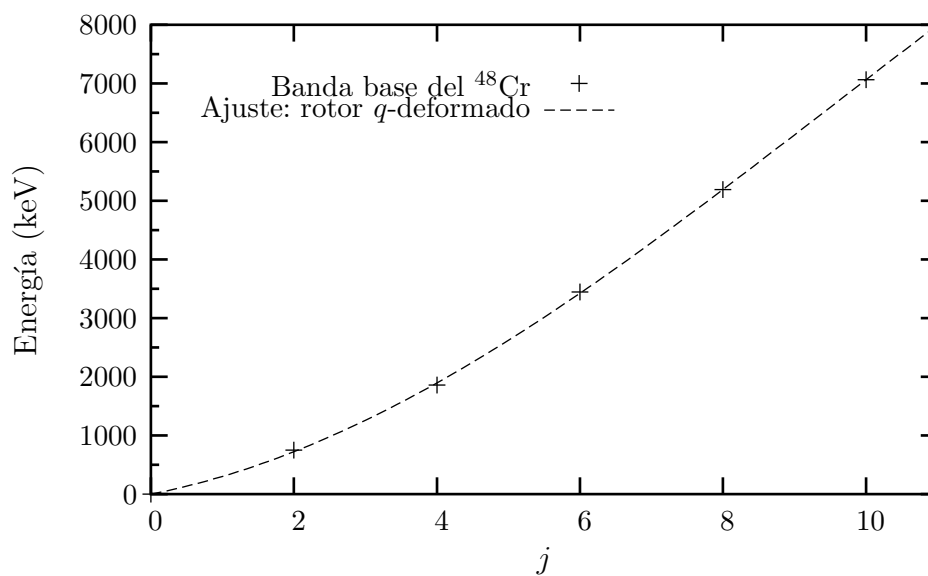


Figura 5.4: Ajuste de parámetros del modelo de rotor  $q$ -deformado generalizado a los niveles experimentales de la banda base del  $^{48}\text{Cr}$ , con una escogencia para  $q$  complejo.

## Capítulo 6

# Conclusiones

El estudio de sistemas mecánico cuánticos por medio de álgebras  $q$ -deformadas conduce a relacionar el parámetro de deformación con características específicas del sistema tales como las perturbaciones a las cuales está sometido y/o al tipo de simetría del mismo. Esta caracterización con el parámetro de deformación depende de cual sea su escogencia, si es de tipo real o compleja, dando explicación, para el primero de estos dos casos, a sistemas cuyas perturbaciones tengan el efecto de separar los niveles energéticos a tal punto que su crecimiento con  $j$  sea mayor o igual al cuadrático, de lo contrario se tendrá que utilizar como parámetro de deformación un número complejo.

En el caso  $q \in \mathbb{R}$  se encuentran seis ecuaciones reducibles a tres, que relacionan valores específicos de  $q$  con la simetría de un sistema rotante altamente perturbado. Para el caso  $q \in \mathbb{C}$  se tiene que la condición de unitariedad en espacios no conmutativos hace las relaciones entre los elementos de la representación fundamental de  $SU_q(2)$  estén relacionados de diferente manera a como lo hacen para el caso  $q$  real implicando esto que la relación entre valores de  $q$  y la geometría cambien en comparación a caso  $q \in \mathbb{R}$ .

Aunque las relaciones entre  $q$  y la simetría existe en el caso real, se tiene que rotaciones alrededor de ejes perpendiculares al eje  $Z$  no describirían comportamientos energéticos en sistemas nucleares, implicando ésto que simetrías en tales ejes no puedan ser exploradas por ACqD para tal escogencia de  $q$ . Sin embargo, habría una posibilidad aún no explorada, la cual es considerar rotaciones alrededor de ejes cuya componente  $n_z$  sea diferente de 0. Esta alternativa presenta una gran complejidad en el cálculo debido a la no conmutatividad del espacio y por eso es difícil encontrar una relación cerrada que relacione simetrías de rotación con el parámetro de deformación.

El estudio de sistemas nucleares es factible con ACqD generalizadas si se toman al parámetro de deformación complejo. Con este modelo se encontró una concordancia muy buena entre los valores experimentales de energía de la banda base del  $^{48}\text{Cr}$  y el ajuste de parámetros del modelo.

## Apéndice A

### Acople $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \downarrow 1 \oplus 0$

#### A.1. Acople de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \downarrow 0$ a partir de la ley del producto de Wigner

Partiendo de la ley del producto de Wigner:

$${}^q D_{m_3 m'_3}^{j_3} = \sum_{m_1, m'_1, m_2, m'_2} {}^q C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} {}^q C_{m'_1 m'_2 m'_3}^{j_1 j_2 j_3} {}^q D_{m_1 m'_1}^{j_1} {}^q D_{m_2 m'_2}^{j_2} \quad (\text{A.1})$$

Para las condiciones  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$  y  $j_3 = 0$  se tiene que la expresión anterior tiene 4 términos que dependiendo de los valores de  $m_3$  y  $m'_3$  son diferentes de 0 y los cuales, si se asume la notación:

$$\langle m_1 m_2 m_3; m'_1 m'_2 m'_3 \rangle_0 = {}^q C_{m_1 m_2 m_3}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q C_{m'_1 m'_2 m'_3}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q D_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.2})$$

y notando a  $\frac{1}{2} \rightarrow +$  y  $-\frac{1}{2} \rightarrow -$  se tiene que:

(Recuerdese que es necesario que  $m_3 = m_1 + m_2$  para que  ${}^q C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} \neq 0$ )

$$\begin{aligned} {}^q D_{m_3 m'_3}^0 &= \sum_{m_1 m'_1 m_2 m'_2} \langle m_1 m_2 m_3; m'_1 m'_2 m'_3 \rangle_0 \\ &= \{ \langle + - m_3; + - m'_3 \rangle_0 + \langle + - m_3; - + m'_3 \rangle_0 \\ &\quad + \langle - + m_3; + - m'_3 \rangle_0 + \langle - + m_3; - + m'_3 \rangle_0 \} \rightarrow (m_3 = 0, m'_3 = 0) \end{aligned}$$

Como se puede observar en el anterior resultado solo hay un elemento de la matriz  ${}^q D_{m_3 m'_3}^0$  el cual es:

$${}^q D_{m_3 m'_3}^0 = ({}^q D_{00}^0) \quad (\text{A.3})$$

Ahora, para calcular los elementos  $\langle m_1 m_2 m_3; m'_1 m'_2 m'_3 \rangle_0$ , se utilizara el coeficiente de C-G  $q$ -deformado y los elementos matriciales del operador rotación para  $j = \frac{1}{2}$  los cuales están dados por:

*Coefficientes C-G  $q$ -deformados:*

$$\begin{aligned} {}_q C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} &= \delta_{m_3, m_1 + m_2} \times q^{\frac{1}{4}\Delta(\Delta+2j_3+1)+(j_1 m_2 - j_2 m_1)} \times \Delta(j_1 j_2 j_3) \\ &\times ([\Sigma_1]![\Delta_1]![\Sigma_2]![\Delta_2]![\Sigma_3]![\Delta_3]![2j_3+1])^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_n \frac{(-1)^n q^{-\frac{n}{2}(\Delta+2j_3+1)}}{[n]![\Delta-n]![\Delta_1-n]![\Sigma_2-n]![-\Delta+\Sigma_1+n]![-\Delta+\Delta_2+n]!} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

con

$$\Delta = j_1 + j_2 - j_3 \quad ; \quad \Delta_i = j_i - m_i \quad ; \quad \Sigma_i = j_i + m_i \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta(j_1 j_2 j_3) = \left( \frac{[\Delta]![-\Delta+2j_1]![-\Delta+2j_2]!}{[\Delta+2j_3+1]!} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

*Representación matricial para rotaciones con  $j = \frac{1}{2}$ :*

$${}^q D_{m_3 m'_3}^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} {}^q D_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} & {}^q D_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ {}^q D_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} & {}^q D_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -q^{\frac{1}{2}} b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Por tanto con los resultados anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned} {}^q D_{00}^0 &= {}^q C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q D_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}^q C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q D_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &+ {}^q C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q D_{-\frac{1}{2} +\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}^q C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q D_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned} {}^q D_{00}^0 &= \left( {}^q C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} \right)^2 {}^q D_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &+ {}^q C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} \left( {}^q D_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + {}^q D_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \left( {}^q C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} \right)^2 {}^q D_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} {}^q D_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de  ${}^q D_{m_3 m'_3}^{\frac{1}{2}}$  en la relación anterior se tiene que:

$${}^q D_{00}^0 = \left( {}^q C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} \right)^2 aa^* + {}^q C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} {}^q C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} (-q^{\frac{1}{2}} b^* b - q^{\frac{1}{2}} b b^*) + \left( {}^q C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0} \right)^2 a^* a$$

y por último evaluando los coeficientes de C-G  $q$ -deformados se llega a:

$$\begin{aligned} {}^q D_{00}^0 &= \frac{q^{\frac{1}{2}}}{[2]} aa^* + \left( \frac{q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{[2]}} \right) \left( \frac{-q^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{[2]}} \right) (-q^{\frac{1}{2}} b^* b - q^{\frac{1}{2}} b b^*) + \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{[2]} a^* a \\ &= \frac{q^{\frac{1}{2}}}{[2]} aa^* + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{[2]} bb^* + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{[2]} b^* b + \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{[2]} a^* a \end{aligned}$$

Reorganizando y utilizando los resultados para el  $q$ -determinante

$$\det_q\left({}^qD^{\frac{1}{2}}\right) = aa^* + bb^* = a^*a + qb^*b = 1$$

y la relación de conmutación  $b^*b = bb^*$  se tiene que:

$$\begin{aligned} {}^qD_{00}^0 &= \frac{q^{\frac{1}{2}}}{[2]}(aa^* + bb^*) + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{[2]}b^*b + \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{[2]}(a^*a + \underbrace{qb^*b - qb^*b}_{=0}) \\ &= \frac{1}{[2]}(q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}bb^* + q^{-\frac{1}{2}}(1 - qb^*b)) \\ &= \frac{1}{[2]}(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}) = 1 \end{aligned}$$

Con este resultado se concluye que el acople  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \downarrow 0$  no se deforma.

## A.2. Acople de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \downarrow 1$ a partir de la ley del producto de Wigner

Analogamente a la sección anterior se tiene que partiendo de la ley del producto de Wigner:

$${}^qD_{m_3 m'_3}^{j_3} = \sum_{m_1, m'_1, m_2, m'_2} {}^qC_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} {}^qC_{m'_1 m'_2 m'_3}^{j_1 j_2 j_3} {}^qD_{m_1 m'_1}^{j_1} {}^qD_{m_2 m'_2}^{j_2} \quad (\text{A.8})$$

Para las condiciones  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$  y  $j_3 = 1$ , la expansión de la serie anterior tiene 16 términos que dependiendo de los valores de  $m_3$  y  $m'_3$  estos términos son diferentes de 0 y los cuales, si se asume la notación similar a la mostrada en la anterior sección:

$$\langle m_1 m_2 m_3; m'_1 m'_2 m'_3 \rangle_1 = {}^qC_{m_1 m_2 m_3}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1} {}^qC_{m'_1 m'_2 m'_3}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1} {}^qD_{m_1 m'_1}^{\frac{1}{2}} {}^qD_{m_2 m'_2}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.9})$$

y notando a  $\frac{1}{2} \rightarrow +$  y  $-\frac{1}{2} \rightarrow -$  se tiene que:

(Recuérdese que es necesario que  $m_3 = m_1 + m_2$  para que  ${}^qC_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3} \neq 0$ )

$$\begin{aligned} {}^qD_{m_3 m'_3}^1 &= \sum_{m_1 m'_1 m_2 m'_2} \langle m_1 m_2 m_3; m'_1 m'_2 m'_3 \rangle_1 \\ &= \langle ++ m_3; ++ m'_3 \rangle_1 \rightarrow (m_3 = 1, m'_3 = 1) \\ &+ \langle +- m_3; ++ m'_3 \rangle_1 + \langle -+ m_3; ++ m'_3 \rangle_1 \rightarrow (m_3 = 0, m'_3 = 1) \\ &+ \langle -- m_3; ++ m'_3 \rangle_1 \rightarrow (m_3 = -1, m'_3 = 1) \\ &+ \langle ++ m_3; +- m'_3 \rangle_1 + \langle ++ m_3; -+ m'_3 \rangle_1 \rightarrow (m_3 = 1, m'_3 = 0) \\ &+ \{ \langle +- m_3; +- m'_3 \rangle_1 + \langle +- m_3; -+ m'_3 \rangle_1 \\ &+ \langle -+ m_3; +- m'_3 \rangle_1 + \langle -+ m_3; -+ m'_3 \rangle_1 \} \rightarrow (m_3 = 0, m'_3 = 0) \\ &+ \langle -- m_3; +- m'_3 \rangle_1 + \langle -- m_3; -+ m'_3 \rangle_1 \rightarrow (m_3 = -1, m'_3 = 0) \\ &+ \langle ++ m_3; -- m'_3 \rangle_1 \rightarrow (m_3 = 1, m'_3 = -1) \\ &+ \langle +- m_3; -- m'_3 \rangle_1 + \langle -+ m_3; -- m'_3 \rangle_1 \rightarrow (m_3 = 0, m'_3 = -1) \\ &+ \langle -- m_3; -- m'_3 \rangle_1 \rightarrow (m_3 = -1, m'_3 = -1) \end{aligned}$$

Como se puede observar en el anterior resultado cada renglón contribuye a sólo un elemento de la matriz  ${}^qD_{m_3 m'_3}^1$  que está escrita como:

$${}^qD_{m_3 m'_3}^1 = \begin{pmatrix} {}^qD_{11}^1 & {}^qD_{01}^1 & {}^qD_{-11}^1 \\ {}^qD_{10}^1 & {}^qD_{00}^1 & {}^qD_{-10}^1 \\ {}^qD_{1-1}^1 & {}^qD_{0-1}^1 & {}^qD_{-1-1}^1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

El valor explícito para los elementos matriciales de  ${}^qD_{m_3 m'_3}^1$  se pueden obtener utilizando las relaciones A.4 a A.7 y las relaciones de conmutación (dadas también en la relación (4.19)):

$$ab = q^{-\frac{1}{2}}ba, \quad (\text{A.11})$$

$$ab^* = q^{-\frac{1}{2}}b^*a, \quad (\text{A.12})$$

$$bb^* = b^*b, \quad (\text{A.13})$$

$$[a, a^*] = (q-1)bb^*, \quad (\text{A.14})$$

$$b^*a^* = q^{-\frac{1}{2}}a^*b^*, \quad (\text{A.15})$$

$$ba^* = q^{-\frac{1}{2}}a^*b \quad (\text{A.16})$$

dando como resultado

$${}^qD_{m_3 m'_3}^1 = \begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{[2]}q^{1/4}ab & b^2 \\ -\sqrt{[2]}q^{3/4}ab^* & aa^* - qbb^* & \sqrt{[2]}q^{1/4}ba^* \\ q(b^*)^2 & -\sqrt{[2]}q^{3/4}b^*a^* & (a^*)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

También se pueden obtener utilizando las relaciones simplificadas para los coeficientes de C-G  $q$ -deformados

$${}^qC_{m_1 \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2}}^{j_1 \frac{1}{2} j_1 + \frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{4}(j_1 - m_1)} \sqrt{\frac{[j_1 + m_1 + 1]}{[2j_1 + 1]}} = \begin{cases} 1, & \text{si } j_1 = \frac{1}{2} \text{ y } m_1 = \frac{1}{2}, \\ \frac{q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{[2]}}, & \text{si } j_1 = \frac{1}{2} \text{ y } m_1 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$${}^qC_{m_1 - \frac{1}{2} m_1 - \frac{1}{2}}^{j_1 \frac{1}{2} j_1 + \frac{1}{2}} = q^{-\frac{1}{4}(j_1 + m_1)} \sqrt{\frac{[j_1 - m_1 + 1]}{[2j_1 + 1]}} = \begin{cases} \frac{q^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{[2]}}, & \text{si } j_1 = \frac{1}{2} \text{ y } m_1 = \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{si } j_1 = \frac{1}{2} \text{ y } m_1 = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

## Apéndice B

# Relaciones de conmutación para las componentes en un espacio 3D no conmutativo

Las relaciones de conmutación entre las coordenadas en tres dimensiones (ecs. (4.33), (4.34) y (4.35)) se pueden obtener al aplicar la matriz (4.27) al vector con componentes  $\chi_-$ ,  $\chi_0$  y  $\chi_+$ , esto es:

$$\begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}ab & b^2 \\ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}ac & ad + q^{\frac{1}{2}}bc & \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}bd \\ c^2 & \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}cd & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_0 \\ \chi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi'_+ \\ \chi'_0 \\ \chi'_- \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Obteniendo un resultado explícito para las componentes primadas dado por:

$$\begin{pmatrix} \chi'_+ \\ \chi'_0 \\ \chi'_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\chi_+ + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}ab\chi_0 + b^2\chi_- \\ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}ac\chi_+ + ad\chi_0 + q^{\frac{1}{2}}bc\chi_0 + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}bd\chi_- \\ c^2\chi_+ + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}cd\chi_0 + d^2\chi_- \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Con este resultado se puede encontrar las relaciones de conmutación por medio de comparación, por ejemplo entre el resultado  $\chi'_+\chi'_0$  y  $\chi'_0\chi'_+$  para obtener la relación de conmutación entre las componentes no primadas (recuerde que las componentes de cualquier vector deben satisfacer las mismas relaciones de conmutación). Posteriormente utilizando el mismo procedimiento, se pueden obtener los resultados para las conmutaciones entre  $\chi_0$  y  $\chi_-$  y por último las correspondientes a  $\chi_-$  y  $\chi_+$ .

En el caso  $\chi'_+\chi'_0$  y  $\chi'_0\chi'_+$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \chi'_+\chi'_0 &= (a^2\chi_+ + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}ab\chi_0 + b^2\chi_-)(\sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}ac\chi_+ + ad\chi_0 + q^{\frac{1}{2}}bc\chi_0 + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}bd\chi_-) \\ &= \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}a^2ac\chi_+\chi_+ + a^2ad\chi_+\chi_0 + q^{\frac{1}{2}}a^2bc\chi_+\chi_0 + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}a^2bd\chi_+\chi_- \\ &\quad + [2]q^{\frac{1}{2}}abac\chi_0\chi_+ + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}abad\chi_0\chi_0 + \sqrt{[2]}q^{\frac{3}{4}}abbc\chi_0\chi_0 + [2]q^{\frac{1}{2}}abbd\chi_0\chi_- \\ &\quad + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}b^2ac\chi_-\chi_+ + b^2ad\chi_-\chi_0 + q^{\frac{1}{2}}b^2bc\chi_-\chi_0 + \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}}b^2bd\chi_-\chi_- \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$



$$\begin{aligned}
\chi'_0\chi'_+ &= (\sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}ac}\chi_+ + ad\chi_0 + q^{\frac{1}{2}}bc\chi_0 + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}bd}\chi_-)(a^2\chi_+ + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}ab}\chi_0 + b^2\chi_-) \\
&= \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}aca^2}\chi_+\chi_+ + ada^2\chi_0\chi_+ + q^{\frac{1}{2}}bca^2\chi_0\chi_+ + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}bda^2}\chi_-\chi_+ \\
&\quad + [2]q^{\frac{1}{2}}acab\chi_+\chi_0 + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}adab}\chi_0\chi_0 + \sqrt{[2]q^{\frac{3}{4}}bcab}\chi_0\chi_0 + [2]q^{\frac{1}{2}}bdab\chi_-\chi_0 \\
&\quad + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}acb^2}\chi_+\chi_- + adb^2\chi_0\chi_- + q^{\frac{1}{2}}bcb^2\chi_0\chi_- + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}bdb^2}\chi_-\chi_- \quad (B.4)
\end{aligned}$$

Una de las pistas para encontrar las relaciones de conmutación entre los dos productos anteriores es comparando los coeficientes del producto  $\chi_+\chi_+$  en ambas relaciones (similarmenete para el producto  $\chi_-\chi_-$ ). En este caso se obtiene:

$$\begin{aligned}
\chi'_+\chi'_0 &= q^{-1}\sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}aca^2}\chi_+\chi_+ + a^2ad\chi_+\chi_0 + q^{\frac{1}{2}}a^2bc\chi_+\chi_0 + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}a^2bd}\chi_+\chi_- \\
&\quad + [2]q^{\frac{1}{2}}abac\chi_0\chi_+ + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}abad}\chi_0\chi_0 + \sqrt{[2]q^{\frac{3}{4}}abbc}\chi_0\chi_0 + [2]q^{\frac{1}{2}}abbd\chi_0\chi_- \\
&\quad + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}b^2ac}\chi_-\chi_+ + b^2ad\chi_-\chi_0 + q^{\frac{1}{2}}b^2bc\chi_-\chi_0 + q^{-1}\sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}bdb^2}\chi_-\chi_- \quad (B.5)
\end{aligned}$$

donde se utilizaron las relaciones de conmutación  $a^2ac = q^{-1}aca^2$  y  $b^2bd = q^{-1}bdb^2$ . Como las relaciones de conmutación entre las componentes de un vector no deben depender de las de ningún otro (en particular para el caso anterior de los productos  $\chi_+\chi_+$  y  $\chi_-\chi_-$ ), se puede intuir que la relación de conmutación para  $\chi_0$  y  $\chi_+$  es de la forma:

$$\chi'_0\chi'_+ = q\chi'_+\chi'_0 \quad (B.6)$$

Similarmenete se puede intuir la relación entre  $\chi_-$  y  $\chi_0$  dando como resultado:

$$\chi'_-\chi'_0 = q\chi'_0\chi'_- \quad (B.7)$$

Si se suponen como ciertas las anteriores relaciones se tiene que éstas deben ser validas para las componentes no primadas y deberán ser autoconsistentes para cualquier transformación lineal (por ejemplo  $\chi \rightarrow \chi'$ ). Por tanto, desarrollando (B.6) en terminos de las componentes no primadas se tiene (en el resultado siguiente se tiene en cuenta la igualdad  $\sqrt{[2]q^{\frac{3}{4}}bcab}\chi_0\chi_0 = \sqrt{[2]q^{\frac{7}{4}}abbc}\chi_0\chi_0$ ):

$$\begin{aligned}
\chi'_0\chi'_+ - q\chi'_+\chi'_0 &= ada^2\chi_0\chi_+ + q^{\frac{1}{2}}bca^2\chi_0\chi_+ + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}bda^2}\chi_-\chi_+ \\
&\quad + [2]q^{\frac{1}{2}}acab\chi_+\chi_0 + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}adab}\chi_0\chi_0 + [2]q^{\frac{1}{2}}bdab\chi_-\chi_0 \\
&\quad + \sqrt{[2]q^{\frac{1}{4}}acb^2}\chi_+\chi_- + adb^2\chi_0\chi_- + q^{\frac{1}{2}}bcb^2\chi_0\chi_- \\
&\quad - qa^2ad\chi_+\chi_0 - q^{\frac{3}{2}}a^2bc\chi_+\chi_0 - \sqrt{[2]q^{\frac{5}{4}}a^2bd}\chi_+\chi_- \\
&\quad - [2]q^{\frac{3}{2}}abac\chi_0\chi_+ - \sqrt{[2]q^{\frac{5}{4}}abad}\chi_0\chi_0 - [2]q^{\frac{3}{2}}abbd\chi_0\chi_- \\
&\quad - \sqrt{[2]q^{\frac{5}{4}}b^2ac}\chi_-\chi_+ - qb^2ad\chi_-\chi_0 - q^{\frac{3}{2}}b^2bc\chi_-\chi_0 \quad (B.8)
\end{aligned}$$

Organizando la relación anterior se llega a:

$$\begin{aligned}
 & \chi'_0 \chi'_+ - q \chi'_+ \chi'_0 \\
 &= (ada^2 + q^{\frac{1}{2}} bca^2 - [2]q^{\frac{3}{2}} abac) \chi_0 \chi_+ + ([2]q^{\frac{1}{2}} acab - qa^2 ad - q^{\frac{3}{2}} a^2 bc) \chi_+ \chi_0 \\
 &+ (adb^2 + q^{\frac{1}{2}} bcb^2 - [2]q^{\frac{3}{2}} abbd) \chi_0 \chi_- + ([2]q^{\frac{1}{2}} bdab - qb^2 ad - q^{\frac{3}{2}} b^2 bc) \chi_- \chi_0 \\
 &+ (\sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} bda^2 - \sqrt{[2]}q^{\frac{5}{4}} b^2 ac) \chi_- \chi_+ + (\sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} acb^2 - \sqrt{[2]}q^{\frac{5}{4}} a^2 bd) \chi_+ \chi_- \\
 &+ (\sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} adab - \sqrt{[2]}q^{\frac{5}{4}} abad) \chi_0 \chi_0
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Factorizando términos en los diferentes corchetes

$$\begin{aligned}
 & \chi'_0 \chi'_+ - q \chi'_+ \chi'_0 \\
 &= (ada^2 + q^{\frac{1}{2}} bca^2 - [2]q^{\frac{3}{2}} abac) \chi_0 \chi_+ + ([2]q^{\frac{1}{2}} acab - qa^2 ad - q^{\frac{3}{2}} a^2 bc) \chi_+ \chi_0 \\
 &+ ([2]q^{\frac{1}{2}} bdab - qb^2 ad - q^{\frac{3}{2}} b^2 bc) \chi_- \chi_0 + (adb^2 + q^{\frac{1}{2}} bcb^2 - [2]q^{\frac{3}{2}} abbd) \chi_0 \chi_- \\
 &+ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} \{b(da^2 - qbac) \chi_- \chi_+ + a(cb^2 - qabd) \chi_+ \chi_-\} \\
 &+ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} a(dab - qbad) \chi_0 \chi_0
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Utilizando las reglas de conmutación entre los elementos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  seguido de una factorización se llega a:

$$\begin{aligned}
 & \chi'_0 \chi'_+ - q \chi'_+ \chi'_0 \\
 &= (ad + q^{\frac{1}{2}} bc - [2]bc) a^2 \chi_0 \chi_+ + qa^2 ([2]bc - ad - q^{\frac{1}{2}} bc) \chi_+ \chi_0 \\
 &+ b^2 ([2]q^{\frac{1}{2}} da - qad - q^{\frac{3}{2}} bc) \chi_- \chi_0 + (ad + q^{\frac{1}{2}} bc - [2]q^{\frac{1}{2}} ad) b^2 \chi_0 \chi_- \\
 &+ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} \{b(da - q^{\frac{1}{2}} bc) a \chi_- \chi_+ + a(bc - q^{\frac{1}{2}} ad) b \chi_+ \chi_-\} \\
 &+ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} a(da - qad) b \chi_0 \chi_0
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Desarrollado  $[2] = q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}$  explícitamente y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \chi'_0 \chi'_+ - q \chi'_+ \chi'_0 \\
 &= (ad - q^{-\frac{1}{2}} bc) a^2 \chi_0 \chi_+ - qa^2 (ad - q^{-\frac{1}{2}} bc) \chi_+ \chi_0 \\
 &+ b^2 ((1 + q)da - qad - q^{\frac{3}{2}} bc) \chi_- \chi_0 + (q^{\frac{1}{2}} bc - qad) b^2 \chi_0 \chi_- \\
 &+ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} \{b(da - q^{\frac{1}{2}} bc) a \chi_- \chi_+ + a(bc - q^{\frac{1}{2}} ad) b \chi_+ \chi_-\} \\
 &+ \sqrt{[2]}q^{\frac{1}{4}} a(da - qad) b \chi_0 \chi_0
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Recordando la definición del  $q$ -determinante de  $T$  ( $\det_q(T) = ad - q^{-\frac{1}{2}} bc$ ) y además, como se sabe que éste conmuta con los elementos de  $T$  se puede reescribir la relación anterior

como (utilizando el hecho  $[b, ad] = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \chi'_0 \chi'_+ - q \chi'_+ \chi'_0 &= \det_q(T) a^2 (\chi_0 \chi_+ - q \chi_+ \chi_0) \\
 &+ (da + qda - qad - q^{\frac{3}{2}} bc) b^2 \chi_- \chi_0 - \det_q(T) b^2 q \chi_0 \chi_- \\
 &+ \sqrt{[2]} q^{\frac{1}{4}} \{ b(da - q^{\frac{1}{2}} bc) a \chi_- \chi_+ + a(bc - q^{\frac{1}{2}} ad) b \chi_+ \chi_- \} \\
 &+ \sqrt{[2]} q^{\frac{1}{4}} a (da - qad) b \chi_0 \chi_0
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Por último de nuevo utilizando las relaciones de conmutación entre los elementos de  $T$  y factorizando se tiene:

$$\begin{aligned}
 \chi'_0 \chi'_+ - q \chi'_+ \chi'_0 &= \det_q(T) a^2 (\chi_0 \chi_+ - q \chi_+ \chi_0) \\
 &+ \det_q(T) b^2 (\chi_- \chi_0 - q \chi_0 \chi_-) \\
 &+ \sqrt{[2]} q^{\frac{3}{4}} \det_q(T) ab \left\{ (\chi_- \chi_+ - \chi_+ \chi_-) - \left( q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}} \right) \chi_0 \chi_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

De la relación anterior, se tiene que al cumplirse las relaciones (B.6) y (B.7) (como se había sugerido) se debe satisfacer:

$$\chi_- \chi_+ - \chi_+ \chi_- = \left( q^{-\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}} \right) \chi_0 \chi_0 \tag{B.15}$$

debido a que  $\det_q(T) \neq 0$  y en general  $[2] \neq 0$ .

Con esto quedan comprobadas las relaciones (4.33), (4.34) y (4.35) al igual que su auto-consistencia.

# Bibliografía

- [1] J. A. Wheeler. Molecular viewpoints in nuclear structure. *Phys. Rev.*, 52:1083, 1937.
- [2] L. R. Hafstad and E. Teller. The alpha-particle model of the nucleus. *Phys. Rev.*, 54:681–692, 1938.
- [3] H. J. Fink, W. Greiner, and W. Sheid. *Nucl. Phys.*, A188:259, 1972.
- [4] R. Bijker and F. Iachello. Cluster states in nuclei as representations of  $u(\nu + 1)$  group. *Phys. Rev. C*, 61(067305), 2000.
- [5] T. Sakuda and S. Ohkubo. Cluster structure and collective behavior of the nucleus  $^{48}\text{Cr}$ . *Nucl. Phys.*, A712(59), 2002.
- [6] John Jairo Sandoval Llanos. Aplicación del álgebra cuántica  $su_q(2)$  a la física nuclear. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2003. Trabajo de grado en física.
- [7] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, and D. Lenis. Quantum algebras in nuclear structure. *arXiv:nucl-th*, 1(9512017), 1995.
- [8] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, and D. Lenis. Quantum algebraic symmetries in nuclear and molecular physics. *arXiv:nucl-th*, 1(9512016), 1995.
- [9] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, A. Faessler, P. P. Raychev, and R. P. Roussev. Quantum algebraic description of vibrational and transitional nuclear spectra. *Phys. Rev. C*, 50(1):497–500, 1994.
- [10] J. Blatt and V. Weisskopf. *Theoretical nuclear physics*. Dover, New York, 1979.
- [11] W. Greiner, Park, and W. Scheid. *Nuclear molecules*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [12] W. Wefelimer. *Naturwiss.*, 25:525, 1937.
- [13] Fl. Stancu. *Group theory in subnuclear physics*. Oxford Univ. Press, New York, 1996.
- [14] W. Greiner and B. Müller. *Quantum mechanics - Symmetries*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

- [15] M. Hamermesh. *Group theory and its applications to physical problems*. Dover, USA, 1962.
- [16] J. A. Cameron and *et al.* Collective properties of  $^{48}\text{Cr}$  at high spin. *Phys. Lett. B*, 387:266–270, 1996.
- [17] S. M. Lenzi and *et al.* Band termination and second backbending in  $^{50}\text{Cr}$ . *Phys. Rev. C*, 56:1313–1319, 1997.
- [18] F. Brandolini and *et al.* *Nucl. Phys. A*, 642:387–, 1998.
- [19] Richard B. Firestone. *Table of isotopes*. Wiley Interscience, 8<sup>a</sup> edition, 1996.